

Устойчивость управленческих решений в цифровой логистической сети

С.Е. БАРЫКИН¹ ✉, Л.Н. БОРИСОГЛЕБСКАЯ², В.В. ПРОВоторов³, И.В. КАПУСТИНА¹,
С.М. СЕРГЕЕВ¹ ✉, Е. ДЕ ЛА ПОЗА ПЛАЗА⁴, Л.А. САЙЧЕНКО⁵

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

² Орловский государственный университет, Орел, Россия

³ Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

⁴ Политехнический университет Валенсии, Валенсия, Испания

⁵ Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

✉ sbe@list.ru (С.Е. Барыкин); sergeev2@yandex.ru (С.М. Сергеев)

Ссылка для цитирования оригинальной статьи: Barykin, S.E.; Borisoglebskaya, L.N.; Provotorov, V.V.; Kapustina, I.V.; Sergeev, S.M.; De La Poza Plaza, E.; Saychenko, L. Sustainability of Management Decisions in a Digital Logistics Network. Sustainability 2021, 13, 9289. <https://doi.org/10.3390/su13169289>

Аннотация: Глобализация дала мощный импульс развитию международной коммерческой деятельности и систем управления логистикой, использующих все преимущества трансграничного сетевого взаимодействия. Решение находится на стыке информационных технологий, технических средств межмашинного взаимодействия (M2M), высокоскоростных мобильных сетей, геолокации, облачных сервисов и ряда международных стандартов. Современная тенденция к созданию цифровых логистических платформ ставит перед разработчиками ряд серьезных задач. Важнейшим требованием является условие устойчивости полученных решений к возмущениям условий логистической деятельности, вызванным не только рыночной неопределенностью, но и целым комплексом неблагоприятных факторов, сопровождающих транспортный процесс. В рамках представленного исследования ставится задача получения условий устойчивости решений, полученных на основе математических моделей. При этом учитываются процессы передачи не только дискретных, но и непрерывных материальных потоков по сложно структурированным сетям. В работе приводятся результаты анализа устойчивости решений дифференциальных систем различных типов, моделирующих процессы переноса в сетевых средах. Начально-краевые задачи для эволюционных уравнений и дифференциально-разностных систем актуальны в логистике, как для дискретной транспортировки широкой номенклатуры грузов, так и для квазинепрерывной транспортировки, например, жидких углеводородов. Критерием работы логистического оператора является интегральный функционал. Для математического описания процесса транспортировки непрерывных и дискретных сред используется широкий класс интегрируемых функций, которые адекватно описывают транспортировку сред со сложной внутренней реологической структурой.

Ключевые слова: логистика; устойчивость; цифровизация; непрерывная математическая модель; дискретная математическая модель; оптимизация.

Sustainability of Management Decisions in a Digital Logistics Network

Sergey E. BARYKIN¹ ✉, Larisa N. BORISOGLEBSKAYA², Vyacheslav V. PROVOTOROV³, Irina V. KAPUSTINA¹,
Sergey M. SERGEEV¹ ✉, Elena DE LA POZA PLAZA⁴ and Lilya A. SAYCHENKO⁵

¹ Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

² Orel State University, Orel, Russia

³ Voronezh State University, Voronezh, Russia

⁴ Universitat Politècnica de València, Valencia, Spain

⁵ Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russia

✉ sbe@list.ru (S.E. Barykin); sergeev2@yandex.ru (S.M. Sergeev)

Abstract: Globalization has given a powerful impetus to the development of international commercial activity and logistics management systems taking full advantage of cross-border networking. The solution lies at the intersection of information technologies, technical means of machine-to-machine (M2M) interaction, mobile high-speed networks, geolocation, cloud services, and a number of international standards. The current trend towards creating digital logistics platforms has set a number of serious challenges for developers. The most important requirement is the condition of sustainability of the obtained solutions with respect to disturbances in the conditions of logistics activities caused not only by market uncertainty but also by a whole set of unfavorable factors accompanying the transportation process. Within the framework of the presented research, the problem of obtaining the conditions for the stability of solutions obtained on the basis of mathematical models is set. At the same time, the processes of transferring not only discrete but also continuous material flows through complex structured networks are taken into account. This study contains the results of the analysis of the stability of solutions of differential systems of various types that simulate the transfer processes in network media. Initial

* Перевод подготовлен для повышения интереса русскоязычной аудитории к данной статье.

© 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

© Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II (перевод), 2024.

boundary value problems for evolutionary equations and differential-difference systems are relevant in logistics, both for the discrete transportation of a wide range of goods and for the quasi-continuous transportation of, for example, liquid hydrocarbons. The criterion for the work of a logistics operator is the integral functional. For the mathematical description of the transport process of continuous and discrete media, a wide class of integrable functions are used, which adequately describe the transport of media with a complex internal rheological structure.

Keywords: logistics; sustainability; digitalization; continuous mathematical model; discrete mathematical model; optimization

1. Введение

Трансформации экономики в устойчивые экономики [1, 2], а также биоэкономики [3] могут способствовать различные факторы.

В данной работе представлено тематическое описание процесса переноса непрерывных и дискретных сред с помощью формализмов дифференциальных систем с непрерывно изменяющимся временем и дифференциально-разностных систем с дискретно изменяющимся временем. В 2010 году авторами был выполнен качественный анализ эволюционных уравнений переноса с пространственной переменной, изменяющейся на сети или сетеподобной области (существование и единственность решения, корректность поставленных начально-краевых задач). Последнее привело к появлению дальнейших исследований авторов, которые в 2020 году завершились научными результатами в направлении изучения свойств решений (устойчивость, стабилизация и управляемость решений системы) и практического использования полученных результатов, логическим завершением которых стали результаты данной работы. Следует отметить, что использование указанных математических результатов является отличительной особенностью данной работы и представляет собой преимущество перед большинством исследований экономической направленности, в которых вопросы устойчивости математических моделей экономического характера, а значит и устойчивости процессов, изучаются крайне редко и поверхностно или не рассматриваются вовсе. Авторы также отмечают, что полученные результаты являются новыми – авторам не известны аналогичные публикации в исследуемом направлении.

Разработка корректных математических моделей, отражающих эволюцию материальных потоков в сетях, является сложной задачей и требует привлечения серьезного математического аппарата [4]. Для найденных теоретических решений и алгоритмов реальный бизнес выдвигает дополнительное условие исследования их устойчивости. Это необходимо в силу таких факторов, как нестабильность рыночной конъюнктуры, разброс параметров математических моделей, неточность исходных данных.

2. Материалы и методы

2.1. Цель исследования и методы

Цель исследования, в силу своей сложности, включает в себя две задачи.

Первая задача заключается в нахождении устойчивости решения эволюционной параболической системы с непрерывным временем. Система имеет распределенные параметры на графе, используемом в качестве прототипа логистической транспортной сети [5, 6]. Сама математическая модель описывает процесс передачи материальных потоков по пространственной сети. Параболическая система изучается с помощью класса интегрируемых функций, отражающих массоперенос со сложной внутренней реологией. Обобщенное решение или слабое решение системы в данном случае является интегрируемой функцией, определяющей вариационную формулировку начальной краевой задачи.

Вторая задача связана с анализом аналога начальной краевой задачи для дифференциальной системы параболического типа с дискретно изменяющейся переменной времени: дифференциально-разностной системы уравнений с пространственной переменной, изменяющейся на графе (сети), задающем математическую модель процесса переноса в дискретном времени. Для построения такого аналога мы используем метод полувыборки Э. Роте по временной переменной. Получены условия существования слабого решения дифференциально-разностной системы и анализ его устойчивости. Результаты исследования могут быть использованы в задачах оптимизации сетеподобных процессов передачи, таких как начальные краевые задачи и дифференциально-разностные системы уравнений.

Одной из наиболее актуальных проблем является несоответствие между развитием аппаратного и интеллектуального обеспечения. Проблема заключается в том, что если аппаратное обеспечение логистических платформ представлено полной линейкой современных технических средств для отслеживания движения товаров и грузов, а также обмена информацией между всеми участниками логистического процесса, то алгоритмы мозгового обеспечения только начали развиваться в направлении сетевой логистики. Для практики нужны алгоритмы, которые, в первую очередь, оптимальны по экономическим критериям и приемлемы для встраивания в программное обеспечение серверов цифровых логистических платформ.

Отдельно отмечаются следующие параметры: уровень трафика; пропускная способность маршрутов; разброс времени ожидания и процесса погрузочно-разгрузочных работ; таможенные услуги при пересечении государственных границ; влияние погодных условий на скорость движения; технические сбои перевозчиков; другие факторы, известные логистическому менеджменту. Кроме того, на издержки влияют колебания стоимости стивидорных операций, нормы пробега в мультимодальной логистике, труднопрогнозируемый диапазон цен на аренду портовой и станционной инфраструктуры и т. д.

Оценить их влияние можно с помощью теории случайных функций и теории очередей (или теории очередей, QT). Традиционно для этих целей используются методы А. М. Ляпунова, позволяющие оценить устойчивость систем, описываемых дифференциальными уравнениями, при малых возмущениях начального условия. Развитие этого подхода лежит в области моделирования логистических сетей с учетом устойчивости материальных потоков. При этом рассматриваются методы, использующие карты, теорию графов и системы уравнений из аппарата математической физики, а также применяются методы теории оптимального принятия решений.

В рамках представленного исследования ставится задача получения условий устойчивости решений, полученных на основе математических моделей. При этом учитываются процессы передачи не только дискретных, но и непрерывных материальных потоков по сложно структурированным сетям. Данное исследование содержит результаты анализа устойчивости решений дифференциальных систем различных типов, моделирующих процессы передачи в сетевых средах. Рассматриваемые задачи актуальны для логистики, как для дискретной транспортировки широкого спектра товаров, так и для квазинепрерывной транспортировки, например, жидких углеводородов.

Обобщенное решение – это функция, определяющая вариационную формулировку начальной краевой задачи или дифференциально-разностной системы. Выход за рамки классических непрерывно дифференцируемых решений продиктован необходимостью более точно описать физическую природу процессов транспортировки непрерывных сред (например, газа, нефти, нефтепродуктов) или дискретных потоков (коммерческих товаров и грузов) по логистическим сетям.

Анализ влияния возмущений исходных данных на поведение реальной логистической системы и абстрактной математической модели (решений, полученных либо в классе начальных краевых задач, либо используемой системы дифференциально-разностных уравнений) является критичным, прежде всего, с точки зрения экономических показателей коммерческой деятельности. Это позволяет оценить риски для инвесторов, а также проанализировать устойчивость предлагаемых бизнес-моделей.

Отметим, что в классе обыкновенных дифференциальных уравнений получены и широко применяются результаты математической теории устойчивости. Новые задачи, продиктованные необходимостью управления экономическими процессами, требуют оптимизации по критериям эффективности, содержащим как минимум две переменные, одной из которых является текущее время процесса. В подобных экономических приложениях, в связи с усложнением алгоритмов моделирования эволюционных процессов переноса, возникает естественная потребность в использовании формализмов уравнений и систем дифференциальных уравнений, более соответствующих специфике эволюционных процессов.

В настоящей работе указанные формализмы на практике принимаются за основные при математическом описании эволюционных процессов в сетях, и их анализ является основной целью исследования. А именно, мы получим условия устойчивости решений для двух классов эволюционных дифференциальных систем – систем с непрерывно меняющейся временной переменной и систем с дискретно меняющейся временной переменной.

2.2. Основные определения

Мы используем классические обозначения и понятия, введенные авторами для описания дифференциальных систем с пространственной переменной, изменяющейся на графе Γ (в приложениях – на логистической сети). При этом внутренняя структура графа может быть произвольной (граф может содержать циклы), оставаясь связным и ограниченным.

В связи с использованием функций с носителем на графе (и, соответственно, дифференциальных уравнений с переменной, меняющейся на графе), на каждом ребре $\gamma \subset \Gamma$ вводится параметризация отрезком $[0, 1]$.

Не исключен случай параметризации разными отрезками. В соответствии с обозначениями, введенными в [3,4], $\partial\Gamma$, $J(\Gamma)$ – это множества граничных ζ и внутренних ξ вершин Γ соответственно.

Через $\Gamma_0 \subset \Gamma$ обозначим граф, не содержащий граничных и концевых узлов: $\Gamma_0 = \Gamma \setminus (\partial\Gamma \cup J(\Gamma))$, а $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$), $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$ ($\gamma_t = \gamma_0 \times (0, t)$), $t \in (0, T]$, $T < \infty$ – константа). Мы используем понятие интеграла Лебега на графе Γ и на области Γ_t :

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x) dx, \int_{\Gamma_t} f(x, t) dx dt = \sum_{\gamma_t} \int_{\gamma_t} f(x, t) dx dt, \text{ соответственно.}$$

$f(\cdot)|_{\Gamma}$ – сужение функции $f(\cdot)$ до фиксированного ребра γ . Мы используем классическое пространство $C(\Gamma)$ непрерывных функций на графе и пространство Лебега $L_p(\Gamma)$ ($p = 1, 2$) измеримых и суммируемых функций p -й степени с нормой $\|u\|_{2,\Gamma} = (\int_{\Gamma} u^2(x) dx)^{1/2}$, и пространство $L_p(\Gamma_t)$ с нормой:

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} = \left(\int_{\Gamma_T} u^2(x, t) dx dt \right)^{1/2}$$

а также пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой:

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt$$

При анализе дифференциальных уравнений и систем уравнений с пространственной переменной, меняющейся на графе Γ , мы используем основные пространства функций Соболева: $W_2^1(\Gamma)$ с элементами из $L_2(\Gamma)$, для которого производная первого порядка (обобщенная производная) принадлежит $L_2(\Gamma)$; пространство функций $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с элементами из $L_2(\Gamma_T)$, для которого производная первого порядка по пространственной переменной x принадлежит $L_2(\Gamma_T)$, причем пространство $W_2^1(\Gamma_T)$ вводится аналогично; а $V_2(\Gamma_T)$ состоит из множества непрерывных по времени t зависимостей u , удовлетворяющих конечной норме

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma)} \quad (1)$$

Далее мы вводим пространство состояний со вспомогательными пространствами. Это необходимо не только для процесса принятия решений, но и для выработки условий существования этих решений. Для этого в $W_2^1(\Gamma)$ рассмотрим выражение:

$$\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx \quad (2)$$

определяющее билинейную форму с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 коэффициентами $a(x)$, $b(x)$ из пространства $L_2(\Gamma)$:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, |b(x)| \leq \beta, x \in \Gamma_0.$$

2.3. Теоретические основы

Авторы рассматривают утверждение, доказанное в работе [5].

Лемма 1. Пусть для функции $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$, где $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ – произвольная функция, а $f(x) \in L_2(\Gamma)$ фиксирована, выполняется соотношение $l(u, v) - \int_{\Gamma} f(x)\eta(x)dx = 0$. Тогда сужение $a(x)_\gamma \Gamma \frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно для множества внутренних вершин рассматриваемого графа для произвольного ребра $\Gamma \subset \Gamma$.

Мы вводим набор $\Omega_a(\Gamma)$ функций $u(x)$, удовлетворяющих утверждению леммы 1 и следующим соотношениям, которые в приложениях называются условиями равновесия

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$$

для любого внутреннего узла $\xi \in J(\Gamma)$ графа (в приложениях – узлы накопления и распределения транспортируемой среды логистической сети); здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ обозначают множества ребер Γ , ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », соответственно.

Операция замыкания $\Omega_a(\Gamma)$ по норме пространства $W_2^1(\Gamma)$ приводит к определению пространства $W^1(a, \Gamma)$. Если предположить, что для $u(x)$ из множества $\Omega_a(\Gamma)$ существует граничное условие $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то определяется другое пространство W .

Введем множество $\Omega_a(\Gamma_T)$ функций $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$, следы которых существуют на отрезках области Γ_T с плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) и принадлежат пространству $W_0^1(a, \Gamma)$. Для них также справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0, t)_\gamma}{\partial x} \quad (3)$$

(здесь $\xi \in J(\Gamma)$ – произвольный узел логистической сети). Операция замыкания $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) приводит к определению пространства $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$; последующее включение $V^{1,0}(a, \Gamma_T) \in W_2^1(\Gamma_T)$ очевидно.

Другое подпространство $W_2^1(\Gamma_T)$ мы определяем как замыкание по норме W множества дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (3) в $\xi \in J(\Gamma)$ и в $t \in [0, T]$.

Мы вводим для него обозначение $W_0^1(\Gamma_T)(a, \Gamma_T)$ и определяем его аналогично $W^1(a, \Gamma_T)$; в этом случае W выполняется (в приложениях, использующих это моделирование, это соответствует условию поглощения).

Мы определили область состояний $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ дифференциальной системы, а также дополнительно $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и $W^1(a, \Gamma_T)$. Основное отличие $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ от пространств $W_0^1(a, \Gamma_T)$, $W^1(a, \Gamma_T)$ состоит в том, что элементы $W_0^1(\Gamma_T)(a, \Gamma_T)$, $W^1(a, \Gamma_T)$ не имеют непрерывности по временной переменной t .

Доказанное утверждение имеет большое практическое значение при формировании экономических показателей для оценки сетевой логистики. Действительно, интегральный критерий, отражающий затраты на перемещение грузов, зависит как от пройденного расстояния, так и от времени. Такие зависимости возникают из-за изменения тарифов на мультимодальные перевозки, приближения сроков годности широкого спектра потребительских товаров сегмента товаров повседневного спроса (ТПС), условий аренды транспорта, портовой инфраструктуры, демереджа, задержания или договорных штрафов за недопоставку или просрочку отгрузки и других факторов, связанных с логистической деятельностью.

3. Результаты

3.1. Математическая модель перемещения с непрерывно изменяющимся временем

Использование введенных формализмов для моделирования процессов перемещения товаров через структуру логистической сети позволяет строго математически описать следующий алгоритм. На элементах пространств $W_0^1(a, \Gamma_T)$ и $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x, t) = f(x, t) \quad (4)$$

Это система параболических дифференциальных уравнений с распределенными параметрами $a(x)$ и $b(x)$, которые характеризуют количественные показатели состояния потока $y(x, t)$ (скорость передачи, эффективность транспортировки и другие критерии) по ребрам γ графа Γ как портрет логистической сети $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Функция состояния $(x, t \in \bar{\Gamma}_T)$ ($x, t \in \bar{\Gamma}_T$) для системы (4) в сетевой области $\bar{\Gamma}_T$ определяется обобщенным решением $y(x, t)$ системы (4), удовлетворяющим начальным и граничным условиям вида:

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{x \in \partial \Gamma_T} = 0 \quad (5)$$

здесь $\varphi(x) \in L^2(\Gamma)$.

Выше мы уже определили суммируемость с квадратом для установленных функций $a(x)$ и $b(x)$.

Из условия принадлежности $y(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и суммируемости с квадратом функций $a(x)$, $b(x)$ следует, что состояние $y(x, t)$, как отображение экономического критерия на график, то есть отображение $y: [0, T] \rightarrow W_0^1(\Gamma_T)$ ($a, \Gamma \subset L_2(\Gamma)$), является непрерывной функцией на графике, так что первое соотношение в (5) имеет смысл и понятно почти для всех значений его переменной.

Для простоты дальнейшего изложения используем граничное условие Дирихле (второе соотношение в (5)), которое в приложениях означает отсутствие потока (притока) сплошной среды в граничных узлах сети, т.е. рассматриваем первую начальную краевую задачу (4), (5).

Мы приводим основные утверждения и фрагменты доказательства справедливости полученных результатов в той части, которая необходима для исследования устойчивости решений. В первую очередь это относится к анализу принятия управленческих стратегий менеджерами логистических служб и управлению рисками логистических бизнес-процессов. Для этого рассмотрим решение сначала во вспомогательном пространстве $W_0^1(a, \Gamma_T)$, затем в основном пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Определение 1. Под обобщенным решением начальной краевой задачи (4), (5) понимается элемент (функция) $y(x, t) \in W_0^1(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющий тождеству интегрального типа:

$$-\int_{\Gamma_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad (6)$$

для произвольного элемента $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$, равного нулю для $t = T$; $\ell_t(y, \eta)$ обозначает билинейную форму относительно элементов y и η :

$$\ell_t(y, \eta) = \int_{\Gamma_t} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x)y(x, t)\eta(x, t) \right) dx dt, \quad t \in (0, T]$$

Следует отметить, что разрешимость задачи (4), (5) в $W_0^1(a, \Gamma_T)$ (и $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$) устанавливается путем представления решения $y(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ в виде ряда по системе обобщенных собственных функций краевой задачи (задачи для эллиптического уравнения):

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \quad u(x)|_{\partial \Gamma} = 0 \quad (7)$$

в классе функций пространства $W^1(a, \Gamma)$ [6, 7].

Отсюда следует, что при предположении (2) спектральная задача (7) имеет множество собственных значений $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$, образующих счетное множество. Для спектральных характеристик задачи (7) справедливы следующие свойства:

1. Собственные значения вещественны и имеют конечную кратность, они пронумерованы в порядке возрастания модулей (с учетом кратности): $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$, каждому собственному значению соответствует своя вещественная обобщенная собственная функция, а множество обобщенных собственных функций образует последовательность $\{\Phi_k(x)\}_{k \geq 1}$;
2. Числа λ_k положительны, за исключением конечного числа первых; при $b(x) > 0$ все числа λ_k положительны;
3. Множество $\{\Phi_k(x)\}_{k \geq 1}$ является ортогональным базисом в пространствах $W_0^1(a, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$ (ниже $\|\Phi_k\|_{L_2(\Gamma)} = 1$);
4. Для краевой задачи $\Lambda \Phi = \lambda_\Phi + g$, $g \in L_2(\Gamma)$, порожденной дифференциальным выражением:

$$\Lambda u = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x)$$

является альтернативой Фредгольма в пространстве W .

Замечание 1. В прикладных задачах практической экономики коэффициент $b(x)$ является положительной функцией, а значит, все собственные значения краевой задачи, описываемой выражением (7), положительны. Для нахождения условий устойчивости эволюционных систем с эллиптической частью, определяемой дифференциальным оператором, априорное неравенство $b(x) > 0$ является основным для установления условий устойчивости.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\phi(x) \in L_2(\Gamma)$, $b(x)$ – неотрицательная функция. Начальная краевая задача (4), (5) в пространстве W (и пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$) имеет единственное обобщенное решение.

Для доказательства однозначной слабой разрешимости в пространстве $W_0^1(a, \Gamma_T)$ (а затем и в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$) мы используем метод Федота-Галеркина со специальным базисом – набором обобщенных собственных функций $\{\Phi_k(x)\}_{k \geq 1}$ класса $W_0^1(a, \Gamma_T)$ одномерного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением:

$$\Lambda u = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x)$$

Представление решения в виде ряда в системе $\{\Phi_k(x)\}_{k \geq 1}$ и последующий анализ сходимости этого ряда вместе с его производной по временной переменной завершают доказательство. Единственность решения устанавливается классическим методом, используя линейность эллиптической части уравнения (4).

3.2. Математическая модель транспорта с дискретно изменяющимся временем

Далее рассмотрим математическую модель процесса переноса при дискретном изменении времени. Математическое описание основано на методе полудискретизации Роте, который позволяет представить математическую модель формализмом дифференциально-разностной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на графе, то есть системой уравнений с пространственной переменной, изменяющейся на графе. В этом случае устанавливается теорема о существовании решения в пространстве $W_0^1(a, \Gamma_T)$ и указываются способы анализа устойчивости этого решения. В пространстве $W_0^1(a, \Gamma_T)$ состояний $u(x, t)$ системы (4) мы рассматриваем начальную краевую задачу (4), (5).

Рассекаем область Γ_T плоскостями $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$, $\tau = \frac{M}{T}$, а сечения Γ_T для любого k равны Γ . Уравнение (4) заменяется дифференциально-разностным уравнением:

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k) = f_\tau(k), \quad (8)$$

где $f_\tau(k) \equiv f_\tau(x, k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt$, а $k = 1, 2, \dots, M$.

Ясно, что $f_\tau(k) \in L_2(\Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Функции $u(k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, определяются как слабые решения эллиптического уравнения (8), удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для фиксированного k соотношение (8), (9) является краевой задачей для эллиптического уравнения (8) относительно $u(k)$.

Замечание 2. Соотношения (8), (9) аналогичны неявной разностной схеме аппроксимации первого порядка по времени t для начальной краевой задачи (4), (5), заданной в пространстве $W_0^1(a, \Gamma_T)$, с эллиптическим оператором:

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{d\omega}{dx} \right) + b(x)\omega, \quad \omega \in W_0^1(a, \Gamma).$$

Определение 2. Элементы (функции) $u(k)$, $(k = 1, 2, \dots, M)$ пространства $W_0^1(a, \Gamma)$ называются слабыми решениями дифференциально-разностного уравнения (8) с условиями (9), если они удовлетворяют интегральному тождеству:

$$\int_{\Gamma} u(k)_t v(x) dx + \ell(u(k), v(x)) = \int_{\Gamma} f_\tau(k) v(x) dx \quad (10)$$

для любого элемента (функции) $v(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$; равенство $u(0) = \varphi(x)$, как равенство в пространствах $L_2(\Gamma)$, понимается почти всюду, $u(k)_t \equiv u(x, k)_t = \frac{1}{\tau} [u(k) - u(k-1)]$.

Теорема 2. При условиях $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ функции $u(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) для достаточно малых τ ($\tau < \tau_0$) однозначно определены как элементы пространства $W_0^1(a, \Gamma)$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что из условия $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и представления $f_\tau(k)$, $f_\tau(k) \in L_2(\Gamma)$ следует в силу самого определения пространства $L_{2,1}(\Gamma)$. Пусть $k = 1$. Исходя из свойств 3 и 4 краевой задачи $\Lambda\varphi = \lambda\varphi$, $\Phi|_{\partial\Gamma} = 0$, и соотношения:

$$\Lambda u(1) = -\frac{1}{\tau} u(1) + f_\tau(1) + \frac{1}{\tau} u(0), \quad u(0) = \varphi(x) \in L_2(\Gamma),$$

следует утверждение для функции $u(1)$. То же самое утверждение, учитывая соотношение

$$\Lambda u(k) = -\frac{1}{\tau} u(k) + f_\tau(k) + \frac{1}{\tau} u(k-1), \quad u(0) = \varphi(x) \in L_2(\Gamma),$$

остается верным для $k = 2, 3, \dots, M$. Ниже, при получении априорной оценки для функций $u(k)$, будет задана граница τ_0 для изменения τ . Теорема доказана.

3.3. Устойчивость управляющих решений процессов переноса

Ниже рассматривается устойчивость математических моделей процесса передачи (управления процессом принятия решения) с непрерывно и дискретно изменяющимся временем. Отметим, что термин «управляющее решение процесса» в прикладных задачах практической экономики означает фиксацию (выбор) исходных данных задачи в соответствии с текущей экономической потребностью и возможностями хозяйствующего субъекта.

3.3.1. Устойчивость решений при непрерывно изменяющемся времени

Проведем математически обоснованное исследование параметров устойчивости найденного решения системы (4), которая описывает динамику логистического процесса, формализованного в виде массового перемещения товаров и грузов по сети. Транспортная сеть, в свою очередь, представляется в виде математического графа.

Предположим, что $0 \leq b(x) \leq \beta$ для $x \in \Gamma$, что гарантирует положительность собственных значений λ_i , $i \geq 1$. В цилиндре $\Gamma_\infty = \Gamma_0 \times (0, \infty)$ рассмотрим систему (4), определенную выше.

Введем обозначения: $\Gamma_{t_0,t} = \Gamma_0 \times (t_0, t)$, $\partial\Gamma_{t_0,t} = \partial\Gamma \times (t_0, t)$, $(0 < t_0 < t < \infty)$, $\Gamma_{t_0,\infty} = \Gamma_0 \times (t_0, \infty)$, $\partial\Gamma_{t_0,\infty} = \partial\Gamma \times (t_0, \infty)$; очевидно, что $\Gamma_{t_0,t} \subset \Gamma_t$.

По предположению, сделанному выше, $f(x, t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ обозначается пространством функций, непрерывных по переменной t , и нормой пространства $L_{2,1}(\Gamma_T)$), и

$$\int_t^{t+1} \|f(\cdot, \varsigma)\|_{L_2(\Gamma)}^2 d\varsigma \leq A$$

($A > 0$ – фиксированная постоянная) для произвольного $t \geq 0$.

Пусть слабым решением для (4) является $\bar{y}(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$, которое является обобщенным решением системы (4) на $\Gamma_{t_0,\infty}$. В этом случае мы формулируем начальные и граничные условия следующим образом:

$$y|_{t=t_0} = \bar{\varphi}(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{x \in \partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0.$$

Введем соотношение $y(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$, справедливое для слабого решения системы (4) в рассматриваемом графе $\Gamma_{t_0,\infty}$. При этом мы также формулируем начальные и граничные условия следующим образом:

$$y|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y|_{x \in \partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0$$

Слабое решение $\bar{y}(x, t)$ для (4) обозначается термином «невозмущенное». С другой стороны, для решения $y(x, t)$ мы вводим определение «возмущенное». Полученные ранее соотношения для обобщенного решения системы (4), (5) определяют зависимости $\bar{y}(x, t)$, $y(x, t)$ в $\Gamma_{t_0,\infty}$, соответствующие условиям. Они также позволяют определить $V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$ при $f(x, t) \in CL_{2,1}(\Gamma_\infty)$.

Устойчивость слабого решения для (4), (5) мы определяем так же, как и устойчивость по Ляпунову для рассматриваемой задачи.

Определение 3. Мы предполагаем, что невозмущенное слабое решение $\bar{y}(x, t)$ для уравнений (4) устойчиво в том случае, когда для любых $t_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что если $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(t_0, \varepsilon)$, то выполняется неравенство $\|y(\cdot, t) - \bar{y}(\cdot, t)\|_{W^1(a, \Gamma)} < \varepsilon$, $t \geq t_0$. В этом случае $y(x, t)$ является возмущенным слабым решением для (4).

Для практических нужд управления можно также ввести определение условий равномерной устойчивости. Это необходимо для долгосрочного планирования логистической деятельности. В этом случае невозмущенное состояние системы (4) в рассматриваемой области $\Gamma_{t_0,\infty}$ будет определяться полностью по аналогии с определением 3.

Кроме того, для практических приложений в долгосрочном планировании в рамках (4) можно определить асимптотическую и экспоненциальную устойчивость. Отметим, что переформулировка допустима в силу линейности системы (4).

Мы покажем, что невозмущенное слабое решение (состояние) системы (4) в Γ_T устойчиво, если выполняется неравенство $0 < b(x) \leq \beta$, $x \in \Gamma$.

Это следствие линейности системы (4). Пусть $\theta(x, t) = y(x, t) - \bar{y}(x, t)$, что означает $\theta(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{t_0,\infty})$, и пусть $\theta(x, t)$ – обобщенное решение задачи для однородной системы (4), удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$\theta|_{t=t_0} = \phi(x), \quad x \in \Gamma, \quad \theta|_{x \in \partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0,$$

где $\phi(x) = \phi(x) - \bar{\phi}(x)$.

Отсюда следует, что задача (4) единственным образом обобщается и разрешима. Ее слабое решение можно представить в виде $\theta(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$, $\phi_i = (\phi, u_i)$ и является пределом слабо сходящейся последовательности $\{\theta^N\}_{N \geq 1}$.

В этом случае следующее неравенство выполняется одновременно для всех N :

$$\|\theta^N\|_{2, \Gamma_t} \leq \sum_{i=1}^N \phi_i^2 e^{-2\lambda_i t}, \quad N = 1, 2, \dots$$

В этом неравенстве, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, мы получаем верхнюю границу, заданную $e^{-2\lambda_i t} < 1$ ($i = 1, 2, \dots$):

$$\|\theta\|_{2,\Gamma_t} \leq C^* \|\phi\|_{L_2(\Gamma)}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$; C^* – константа, не зависящая от t .

Это означает, что:

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{W^1(a,\Gamma)} \leq C^* \|\phi\|_{L_2(\Gamma)}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{C^*}$, тогда в силу неравенства:

$$\|\phi\|_{L_2(\Gamma)} = \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L_2(a,\Gamma)} < \delta$$

получаем неравенство

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{W^1(a,\Gamma)} = \|y(\cdot, t) - \bar{y}(\cdot, t)\|_{W^1(a,\Gamma)} < \varepsilon$$

для произвольного $t > t_0$ и, следовательно, устойчивость невозмущенного слабого решения (состояния) системы (4) в Γ_T .

3.3.2. Устойчивость решений с дискретно изменяющимся временем

Прежде всего отметим, что в силу представления (8) дифференциально-разностного аналога непрерывной системы (4) аналогом дискретного времени для непрерывно меняющейся временной переменной $t \in (0, \Gamma]$ является множество $\{t = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots, M\}$, где $\tau = \Gamma/M$. Для дифференциально-разностной системы (8), (9) устойчивость определяется как непрерывная зависимость ее решения от начальных данных: функций $f_\tau(k) \in L_2(\Gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) и $\phi(x) \in L_2(\Gamma)$.

Определение 4. Дифференциально-разностная система (4), (5) называется устойчивой, если для малых справедливо соотношение:

$$\|u(k)\|_{2,\Gamma} \leq C(\|\phi\|_{2,\Gamma} + \|f_\tau(k)\|_{2,1,\Gamma})$$

для любых $k = 1, 2, \dots, M$; C – положительная константа, не зависящая от τ ; $\|u(k)\|_{2,\Gamma}$ – норма в пространстве $L^2(\Gamma)$; а норма $\|f_\tau(k)\|_{2,1,\Gamma}$ определяется по формуле

$$\|f_\tau(k)\|_{2,1,\Gamma} = \tau \sum_{s=1}^k \|f_\tau(s)\|_{2,\Gamma}.$$

Теорема 3. Если выполняются условия $f(x, t) \in L^{2,1}(\Gamma_T)$ и $\phi(x) \in L^2(\Gamma)$, то дифференциально-разностная система (4), (5) устойчива.

Доказательство. Из равенства:

$$u(k-1)^2 = (u(k) - \tau u(k)_t)^2 = u(k)^2 + \tau^2 u(k)_t^2 - 2\tau u(k)u(k)_t$$

следует соотношение:

$$2\tau u(k)u(k)_t = u(k)^2 + \tau^2 u(k)_t^2 - u(k-1)^2. \quad (11)$$

Принимая соотношение (8) $v(x) = 2\tau u(k)$ и учитывая (9), а также нижнюю границу a^* для $a(x)$, получаем неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u(k)^2 dx - \int_{\Gamma} u(k-1)^2 dx + \tau^2 \int_{\Gamma} (u(k)_t)^2 dx + 2a_* \tau \int_{\Gamma} \left(\frac{du(k)}{dx}\right)^2 dx \leq \\ & \leq -2\tau \int_{\Gamma} b(x)u(k)^2 dx + 2\tau \int_{\Gamma} f_\tau(k)u(k) dx, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство:

$$\begin{aligned} & \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|u(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 + \tau^2 \|u(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_* \tau \left\|\frac{du(k)}{dx}\right\|^2 \leq \\ & \leq 2\beta \tau \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma} \|u(k)\|_{2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Для $k = 1, 2, \dots, M$ и $\rho = 2\beta$, получаем:

$$\|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|u(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 \leq \rho\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma} \|u(k)\|_{2,\Gamma}. \quad (12)$$

Для $\|u(k)\|_{2,\Gamma} + \|u(k-1)\|_{2,\Gamma} > 0$, с учетом

$$\frac{\|u(k)\|_{2,\Gamma}}{\|u(k)\|_{2,\Gamma} + \|u(k-1)\|_{2,\Gamma}} \leq 1,$$

мы получим при $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{2\rho}$ оценку:

$$\|u(k)\|_{2,\Gamma} \leq \frac{1}{1-\rho\tau} \|u(k-1)\|_{2,\Gamma} + \frac{2\tau}{1-\rho\tau} \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma}, \quad (13)$$

Для $\|u(k)\|_{2,\Gamma} + \|u(k-1)\|_{2,\Gamma} = 0$, из соотношения (12) следует $0 \leq \rho\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma}$, т.е. соотношение $\|u(k)\|_{2,\Gamma} \leq \rho\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma} - \|u(k-1)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma}$ и, следовательно, неравенство (13). Из рекуррентного свойства оценки (13) получаем:

$$\begin{aligned} \|u(k)\|_{2,\Gamma} &\leq \frac{1}{1-\rho\tau} \|u(k-1)\|_{2,\Gamma} + \frac{2\tau}{1-\rho\tau} \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \|u(0)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \sum_{s=1}^k \frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}} \|f_\tau(s)\|_{2,\Gamma} \leq \\ &\leq e^{2\rho T} (\|u(0)\|_{2,\Gamma} + 2 \|f_\tau(k)\|_{2,1,\Gamma}). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, в определении 4 оценка $C = e^{2\rho T}$ и теорема доказана.

Замечание 3. Можно существенно уточнить оценку (14), представленную в доказательстве утверждения Теоремы 3.

Для любых $M = 1, 2, \dots, M$:

$$\sum_{k=1}^m \|f_\tau(k)\|_{2,1,\Gamma} = \sum_{k=1}^m \left(\tau \sum_{s=1}^k \|f_\tau(s)\|_{2,\Gamma} \right) \leq m\tau \sum_{s=1}^m \|f_\tau(s)\|_{2,\Gamma} = m \|f_\tau(m)\|_{2,1,\Gamma},$$

учитывая оценку Теоремы 3, получаем неравенство:

$$\sum_{k=1}^m \|u(k)\|_{2,\Gamma} \leq m e^{2\rho T} (\|\varphi\|_{2,\Gamma} + 2 \|f_\tau(m)\|_{2,1,\Gamma}).$$

Суммируя неравенства

$$\begin{aligned} \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|u(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 + \tau^2 \|u(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \left\| \frac{du(k)}{dx} \right\|^2 \leq \\ \leq 2\beta\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma} \|u(k)\|_{2,\Gamma} \end{aligned}$$

для k от 1 до $m \leq M$ и, используя полученные выше оценки, получаем неравенство:

$$\begin{aligned} \|u(m)\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{du(k)}{dx} \right\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|u(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 \leq \\ \leq \sum_{k=1}^m \left(\beta\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma} \|u(k)\|_{2,\Gamma} \right) \leq \\ \leq \sum_{k=1}^m \|u(k)\|_{2,\Gamma} \sum_{k=1}^m (\beta\tau \|u(k)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \|f_\tau(k)\|_{2,\Gamma}) \leq \\ \leq m e^{2\rho T} \left\{ (3m\beta T e^{2\rho T} + 1) \|\varphi\|_{2,\Gamma}^2 + (6m\beta T e^{2\rho T} + 5) \|f_\tau(m)\|_{2,1,\Gamma}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство:

$$\|u(m)\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{du(k)}{dx} \right\|^2 \leq C (\|\varphi\|_{2,\Gamma}^2 + \|f_\tau(m)\|_{2,1,\Gamma}^2), \quad (15)$$

где постоянная C зависит только от a_* , β и T .

3.4. Связь транспортных моделей с непрерывно и дискретно изменяющимся временем

Неравенства (14) и (15) позволяют обосновать применимость метода Рунге и установить связь между начальной краевой задачей (4), (5) и дифференциально-разностной системой (8), (9).

Пусть $u_M(x, t) = u(k)$, $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \dots, M$. Очевидно, что $u_M(x, t)$ принадлежит $W_0^1(a, \Gamma_T)$ и для нее справедлива оценка (15), а также оценка

$$\|u_M\|_{2, \Gamma_T} + \left\| \frac{\partial u_M}{\partial x} \right\|_{2, \Gamma_T} \leq C^*, \quad (16)$$

с постоянной величиной C^* , не зависящей от τ , через $\|\cdot\|_{2, \Gamma_T}$ – норму в $L_2(\Gamma_T)$.

Пусть $f_M(x, t) = f_\tau(x, k)$, $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \dots, M$ и $M \rightarrow \infty$. В силу (16) из $\{u_M(x, t)\}$, можно выбрать последовательность $\{\tilde{u}_M(x, t)\}$, которая слабо сходится в норме пространства $W_{0,2}^1(\Gamma_T)$ к $u(x, t) \in W_2^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Мы покажем, что $u(x, t)$ определяет слабое решение начальной краевой задачи (4), (5); другими словами, тождество (6) справедливо для $u(x, t)$. Мы проверяем справедливость этого тождества для функций $\eta(x, t) \in C^1(\Gamma_T + \tau)$ удовлетворяющих условиям соответствия для узлов $\xi \in J(\Gamma)$ для любых $t \in (0, T)$ и условиям $\eta|_{\partial \Gamma_T} = 0$, $\eta|_{t \in [T, T+\tau]} = 0$.

Через $\eta(x, t)$, мы определяем функцию $\eta(k) = \eta(x, k\tau)$, $k = 1, 2, \dots, M$, и $\eta(k)_{t'} = \frac{1}{\tau} [\eta(k+1) - \eta(k)]$.

Как и для $u(k)$, кусочно-непрерывные функции $\eta_M(x, t)$, $\partial \eta_M(x, t)/\partial x$, и $\partial \eta_M(x, t)/\partial t$ определены относительно $\eta(k)$.

Очевидно, что $\eta_M(x, t)$, $\partial \eta_M(x, t)/\partial x$, $\partial \eta_M(x, t)/\partial t$ равномерно сходятся на $\bar{\Gamma}_T$ к соответственно $\eta(x, t)$, $\partial \eta(x, t)/\partial x$, $\partial \eta(x, t)/\partial t$, и $\eta_M(x, t) = 0$, $t \in [T, T + \tau]$.

Пусть в (10) $v(x) = \tau \eta(k)$ и, суммируя полученные тождества в отношении k и от 1 до M , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_T} u_M(x, t) \frac{\partial \eta_M(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u_M, \eta_M) - \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(1) dx = \\ & = \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta_M(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Из полученного соотношения (17) при $M \rightarrow \infty$ перейдем к пределу относительно последовательности $\{\tilde{u}_M(x, t)\}$ и получим тождество (6), из которого следует, что $u(x, t)$ (функция $u \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$) является слабым решением (состоянием) системы (4) и (5). В силу единственности решения $u(x, t)$ задачи (4) и (5) по основным началам и оценки (16), последовательность $\{u_M(x, t)\}$ слабо сходится к $u(x, t)$. Теорема доказана.

Замечание 4. Полученные результаты могут быть использованы для анализа эволюционных и дифференциально-разностных систем с граничными условиями второго и третьего типов. Для этого достаточно задать второе или третье граничное условие вместо граничного условия Дирихле для краевой задачи (7).

3.5. О вычислительных аспектах транспортных моделей с непрерывно и дискретно изменяющимся временем

Математические модели (4), (5) и (8), (9) допускают эффективную аппроксимацию разностными схемами на двумерной сетке $\Gamma_T^{h,\tau} = \{ih, j\tau, ih \in \gamma, j\tau \in [0, T]\}$ и одномерной сетке $\Gamma^h = \{ih\}$ (точки разбиения краев $\gamma \in \Gamma$ и временной интервал $[0, T]$ нумеруются индексами i, j) с погрешностями аппроксимации, равными $O(h, \tau)$ и $O(h)$ соответственно. При этом погрешность аппроксимации систем (4) и (8) на ребрах равна $O(h^2 + \tau)$ и $O(h^2)$, а в узлах – $O(h)$ в обоих случаях; аппроксимация граничных условий (5) и (9) является точной. Численный анализ тестовых примеров по схемам для систем (4), (5) и (8), (9) показал практически одинаковый результат по точности вычислений, однако предпочтение следует отдать расчетным схемам (8), (9); за счет одномерности Γ_h количество арифметических операций на несколько порядков меньше. Ограничения на использование представленных результатов определяются свойством линейности дифференциальных операторов систем (4), (5) и (8), (9).

4. Обсуждение

Цифровая логистика основана на некоторых платформенных бизнес-моделях, поэтому вопросы внедрения цифровых бизнес-моделей для устойчивого развития могут стать темой для будущих исследований. Информация компаний об их социально-экологических действиях имеет большое значение, как и рейтинги корпоративной социальной ответственности [8], так и степень схождения в международных рейтингах оценки брендов, относящихся к ИТ-сектору [9].

Цифровая трансформация логистических сетей обусловлена различными факторами, включая подходы таких компаний-гигантов, как Apple, Alibaba, Facebook и Google [10], к развитию экосистемы платформы [11], а также новые бизнес-модели на основе концепции цифрового двойника, которая первоначально была реализована в обрабатывающей промышленности [12]. Исследователи учитывают различные аспекты цифровых логистических сетей [13-16] и особенности цифровых экосистем [17, 18].

Конкурентоспособность всех видов коммерческой деятельности, пользующихся услугами логистических операторов, включая концепции 3PL и 4PL аутсорсинга, зависит от качества алгоритмов обработки массивов данных о движении товаров (с учетом устойчивого управления человеческими ресурсами [19]). В качестве прототипа логистической сети читатель может рассматривать граф. Авторы предлагают использовать формализмы начально-краевых задач или дифференциально-разностных систем для построения математической модели задач переноса в классе суммируемых функций, поскольку такие системы и используемый класс функций позволяют более точно учесть ключевое свойство переносимых непрерывных или дискретных сред – многофазность, заключающуюся в отсутствии непрерывности функций, описывающих количественные характеристики переносимых сред. Современные математические методы и подходы, разработанные авторами, дают необходимый математический инструментарий не только для описания процесса на линейных фрагментах сети, но и для получения адекватных математических соотношений, описывающих процесс в узлах соединения линейных фрагментов сети. Кроме того, авторы применили интегральный функционал качества логистической сети [20-24]. В статье исследуются границы устойчивости эволюционной параболической системы и дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на выделенном графе [25-29]. Анализ вычислительной сложности для демонстрации вычислительной эффективности предложенных методик решения может стать темой будущих исследований из-за ограничения объема статьи.

5. Выводы

Современная транснациональная структура бизнеса основана на сложной многоуровневой и постоянно развивающейся транспортной сети. В середине XX века были разработаны простые модели поиска оптимальных маршрутов с использованием методов линейного программирования. Необходимость работать в условиях неопределенности и в динамичной рыночной среде требует учитывать принципиальное различие между дискретными и квазинепрерывными перевозками.

В настоящее время теоретические основы логистики представляют собой комплекс различных методов и моделей управления логистическими сетями. Деятельность логистических операторов основана на предиктивном планировании и оперирует потоком данных о состоянии груза и его местонахождении в режиме реального времени. Прогнозирование движения материальных потоков в логистической сети и выбор оптимальных цепей поставок требуют создания эффективных цифровых логистических платформ. Основу этих систем составляют алгоритм, реализованный на математических моделях, и теория принятия оптимальных решений на основе критериев экономической эффективности. Реальная логистическая деятельность протекает под воздействием множества случайных возмущений. Для решения практических бизнес-задач критически важным является анализ устойчивости предлагаемых решений, который не только дает оценку инвестиционных рисков, но и позволяет перейти к прогнозным показателям перспективного планирования.

В данной работе проведено развитие классических подходов к исследованию устойчивости решений, полученных с помощью математического моделирования на основе систем дифференциальных уравнений. Сложная топология логистических сетей, в рамках которых строятся цепи поставок, обуславливает необходимость применения более глубоких методов при исследовании динамики логистических потоков. Исходя из реальных условий логистической деятельности, было

сделано предположение, что данный функционал не всегда является непрерывным по параметрам движения и времени. Сложность решения задач формирования эффективных цепей поставок возросла под влиянием тенденции объединения бизнеса в сетевые структуры. Применение результатов, полученных в данной работе, не ограничивается анализом устойчивости решений. Их использование актуально при оценке инвестиционных рисков, устойчивости бизнес-модели аутсорсинговых логистических операторов, а также для получения конкурентных преимуществ.

Вклад авторов: все авторы внесли существенный вклад в подготовку всей представленной работы. И.В.К. и В.В.П. осуществляли администрирование проекта, Л.Н.Б. осуществляла руководство, С.М.С. подготовила концептуализацию, Л.С. выполнила курацию данных, а также формальный анализ, Е.Д.Л.П.П. внесла вклад в обзор литературы, а С.Е.Б. разработала методологию и отредактировала рукопись. Авторы хотели бы поблагодарить четырех анонимных рецензентов за их очень полезные предложения. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: исследование финансировалось РФФИ в соответствии с научно-исследовательским проектом № 20-014-00029.

Заявление Совета по институциональному надзору: не применимо.

Заявление об информированном согласии: не применимо.

Заявление о доступности данных: в этом исследовании не было создано или проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных не применимо к данной статье.

Конфликты интересов: авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов, о котором необходимо заявить в связи с данной публикацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Filser, M.; Kraus, S.; Roig-Tierno, N.; Kailer, N.; Fischer, U. Entrepreneurship as Catalyst for Sustainable Development: Opening the Black Box. *Sustainability* 2019, 11, 4503. <http://doi.org/10.3390/su11164503>
2. Gupta, R.; Mejia, C.; Kajikawa, Y. Business, innovation and digital ecosystems landscape survey and knowledge cross sharing. *Technol. Forecast. Soc. Chang.* 2019, 147, 100–109. <http://doi.org/10.1016/j.techfore.2019.07.004>
3. Kuckertz, A. Bioeconomy Transformation Strategies Worldwide Require Stronger Focus on Entrepreneurship. *Sustainability* 2020, 12, 2911. <http://doi.org/10.3390/su12072911>
4. Borisoglebskaya, L.N.; Provotorov, V.V.; Sergeev, S.M.; Kosinov, E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2019, 537, 042025. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/537/4/042025>
5. Borisoglebskaya, L.N.; Provotorova, E.N.; Sergeev, S.M. Commercial software engineering under the digital economy concept. *J. Phys. Conf. Ser.* 2019, 1399, 033029. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033029>
6. Zhabko, A.P.; Shindyapin, A.I.; Provotorov, V.V.E. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestn. St.-Peterbg. Univ. Prikl. Mat. Inform. Protsessy Upr.* 2019, 15, 457–471. <http://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.404>
7. Krasnov, S.; Sergeev, S.; Zotova, E.; Grashchenko, N. Algorithm of optimal management for the efficient use of energy resources. *E3S Web Conf.* 2019, 110, 110. <http://doi.org/10.1051/e3sconf/201911002052>
8. Alcaide González, M.Á.; De La Poza Plaza, E.; Guadalajara Olmeda, N. The impact of corporate social responsibility transparency on the financial performance, brand value, and sustainability level of IT companies. *Corp. Soc. Responsib. Environ. Manag.* 2020, 27, 642–654. <http://doi.org/10.1002/csr.1829>
9. Alcaide González, M.Á.; Guadalajara Olmeda, M.N.; De la Poza, E. Modelling It Brand Values Supplied By Consultancy Service Companies: Empirical Evidence For Differences. *Technol. Econ. Dev. Econ.* 2020, 27, 120–148. <http://doi.org/10.3846/tede.2020.13755>
10. Wilson, J.P.; Campbell, L. Financial functional analysis: A conceptual framework for understanding the changing financial system. *J. Econ. Methodol.* 2016, 23, 413–431. <http://doi.org/10.1080/1350178X.2016.1157200>
11. Kenney, M.; Zysman, J. The platform economy: Restructuring the space of capitalist accumulation. *Camb. J. Reg. Econ. Soc.* 2020, 13, 55–76. <http://doi.org/10.1093/cjres/rsaa001>
12. Bécue, A.; Maia, E.; Feeken, L.; Borchers, P.; Praça, I. A New Concept of Digital Twin Supporting Optimization and Resilience of Factories of the Future. *Appl. Sci.* 2020, 10, 4482. <http://doi.org/10.3390/app10134482>
13. Barykin, S.Y.; Bochkarev, A.A.; Sergeev, S.M.; Baranova, T.A.; Mokhorov, D.A.; Kobicheva, A.M. A methodology of bringing perspective innovation products to market. *Acad. Strateg. Manag. J.* 2021, 20, 19.
14. Barykin, S.Y.; Kapustina, I.V.; Sergeev, S.M.; Kalinina, O.V.; Vilken, V.V.; Putikhin, Y.Y.; Volkova, L.V. Developing the physical distribution digital twin model within the trade network. *Acad. Strateg. Manag. J.* 2021, 20, 1–24.
15. Barykin, S.Y.; Smirnova, E.A.; Sharapaev, P.A.; Mottaeva, A.B. Development of the Kazakhstan digital retail chains within the EAEU E-commerce. *Acad. Strateg. Manag. J.* 2021, 20, 1–18.
16. Barykin, S.Y.; Kapustina, I.V.; Valebnikova, O.A.; Valebnikova, N.V.; Kalinina, O.V.; Sergeev, S.M.; Camastral, M.; Putikhin, Y.Y.; Volkova, L.V. Digital technologies for personnel management: Implications for open innovations. *Acad. Strateg. Manag. J.* 2021, 20, 1–14.
17. Shmatko, A.; Barykin, S.; Sergeev, S.; Thirakulwanich, A. Modeling a Logistics Hub Using the Digital Footprint Method—The Implication for Open Innovation Engineering. *J. Open Innov. Technol. Mark. Complex.* 2021, 7, 59. <http://doi.org/10.3390/joitmc7010059>

18. Barykin, S.Y.; Kapustina, I.V.; Kirillova, T.V.; Yadykin, V.K.; Konnikov, Y.A. Economics of Digital Ecosystems. *J. Open Innov. Technol. Mark. Complex.* 2020, 6, 124. <http://doi.org/10.3390/joitmc6040124>
19. Zhang, L.; Guo, X.; Lei, Z.; Lim, M.K. Social Network Analysis of Sustainable Human Resource Management from the Employee Training's Perspective. *Sustainability* 2019, 11, 380. <http://doi.org/10.3390/su11020380>
20. Zaytseva, O.D.; Prudovskiy, B.D. The task of detection the optimal scheme of transport kinds' coordination into logistic transport system with taking into account input limits. *J. Min. Inst.* 2014, 209, 177.
21. Kopteva, A.; Koptev, V.; Malarev, V.; Ushkova, T. Development of a system for automated control of oil transportation in the Arctic region to prevent the formation of paraffin deposits in pipelines. *E3S Web Conf.* 2019, 140, 07004. <http://doi.org/10.1051/e3sconf/201914007004>
22. Avksentiev, S.Y.; Avksentieva, E.Y. Determining the Parameters of the Hydraulic Transport of Tailings for Processing Iron Ore. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2018, 194, 032003. <http://doi.org/10.1088/1755-1315/194/3/032003>
23. Samolenkov, S.V.; Kabanov, O.V. Study of the ways saving to energy at transport of the oils. *J. Min. Inst.* 2012, 195, 81.
24. Zhukovskiy, Y.L.; A Korolev, N.; Babanova, I.S.; Boikov, A.V. The prediction of the residual life of electromechanical equipment based on the artificial neural network. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2017, 87, 032056. <http://doi.org/10.1088/1755-1315/87/3/032056>
25. Lapiga, I.; Shchipachev, A.; Osadchiy, D. Using of artificial neural networks to assess the residual resource of trunk pipelines. *E3S Web Conf.* 2021, 225, 02006. <http://doi.org/10.1051/e3sconf/202122502006>
26. Nazarova, M.N.; Davydenko, M.I.; Yaroslavova, Y.E. Modernization of polyethylene pipelines for expanding application of them in gas transportation systems. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2018, 194, 072009. <http://doi.org/10.1088/1755-1315/194/7/072009>
27. Alexandrov, V.I.; Khrabrov, A.P. Parameters of high viscosity oils transportation in the form of emulsion research in order to its optimization. *J. Min. Inst.* 2011, 189, 175.
28. Kovalchuk, M.; Poddubniy, D. Improving the efficiency of conveyor transport with the use of network technologies. *E3S Web Conf.* 2019, 140, 04011. <http://doi.org/10.1051/e3sconf/201914004011>
29. Vasiliev, B.U. Factors Of Environmental Safety and Environmentally Efficient Technologies Transportation Facilities Gas Transportation Industry. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2017, 50, 12003. <http://doi.org/10.1088/1755-1315/50/1/012003>