

Кинетическая теория неустойчивости при взаимодействии электронного пучка и плазмы с произвольной анизотропной функцией распределения скоростей электронов

В.С. СУХОМЛИНОВ¹ ✉, А.С.-У. МУСТАФАЕВ², Хенд КУБАДЖИ²,
Н.А. ТИМОФЕЕВ¹, Оскар МУРИЛЬО²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет

² Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

✉ v_sukhomlinov@mail.ru

Ссылка для цитирования оригинальной статьи: Sukhomlinov, V.S.; Mustafaev, A.S.; Koubaji, H.; Timofeev, N.A.; Murillo, O. Kinetic theory of instability in the interaction of an electron beam and plasma with an arbitrary anisotropic electron velocity distribution function. *New J. Phys.* 2021, 23, 123044. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac4125>

Аннотация: В работе на основе кинетического подхода исследуется устойчивость системы, состоящей из пучка быстрых электронов и плотной плазмы, при произвольной (анизотропной) функции распределения электронов по скоростям. Показано, что при взаимодействии пучка быстрых электронов с холодной плазмой как условия потери устойчивости, так и скорость роста возмущений не зависят от формы функции распределения электронов (ФРЭ) в плазме и определяются только отношением энергии электронного пучка к средней энергии в плазме. С увеличением средней энергии электронов в плазме возникает необходимость учета следующих энергетических моментов ФРЭ. Было обнаружено, что анизотропия плазмы оказывает существенное влияние как на условия потери стабильности, так и на скорость роста. Физической причиной этого эффекта является сдвиг плазменной частоты из-за эффекта Доплера, вызванного анизотропией плазмы в системе координат, движущейся вместе с пучком. Другие результаты включают область аномальной дисперсии системы электронный пучок-плазма и области отрицательной групповой скорости возмущений в такой системе. Для всех наблюдаемых эффектов предложены физические интерпретации.

Ключевые слова: система электронный пучок-плазма, неустойчивость системы, кинетический подход, скорость электронов.

Kinetic theory of instability in the interaction of an electron beam and plasma with an arbitrary anisotropic electron velocity distribution function

Vladimir S. SUKHOMLINOV¹ ✉, Alexander S.-U. MUSTAFAEV², Hend KOUBAJI²,
Nikolay A. TIMOFEEV¹ and Oscar MURILLO²

¹ Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

² Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russia

Abstract: Based on the kinetic approach, this work investigates the stability of the system consisting of a fast electron beam and a dense plasma at an arbitrary (anisotropic) electron velocity distribution function. It is shown that during the interaction of a fast electron beam with a cold plasma, both the conditions for losing stability and the growth rate of disturbances do not depend on the form of the electron distribution function (EDF) of a plasma and are determined only by the ratio of the electron beam energy to the mean energy in a plasma. With an increase in the mean electron energy in the plasma, it becomes necessary to take into account the following energy moments of the EDF. It was found that the plasma anisotropy has a significant effect on both the stability loss conditions and the growth rate. The physical reason for this effect is the shift in the plasma frequency due to the Doppler effect caused by the plasma anisotropy in the coordinate system moving along with the beam. Other findings include a region of anomalous dispersion of the electron beam-plasma system and regions of negative group velocity of perturbations in such system. Physical interpretations are proposed for all the observed effects.

Keywords: electron beam-plasma system, system instability, kinetic approach, electron velocity.

* Перевод подготовлен для повышения интереса русскоязычной аудитории к данной статье.

© 2021 The Author(s). Published by IOP Publishing Ltd on behalf of the Institute of Physics and Deutsche Physikalische Gesellschaft. Original content from this work may be used under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

© Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II (перевод), 2024.

Введение

Исследования закономерностей динамики электронных пучков в плазме важны для разработки новых устройств плазменной электроники, в которых используется пучковая плазма. Однако при практическом использовании пучковых разрядов часто возникают различные виды неустойчивостей, что затрудняет их применение.

Около семидесяти лет известно о возникновении интенсивных осцилляций параметров плазмы в условиях распространения через нее однонаправленного пучка быстрых электронов, когда их средняя энергия значительно выше, чем у электронов плазмы. Этот тип плазменной неустойчивости был предсказан в работах [1, 2]. Его суть заключается в возникновении и дальнейшем усилении колебаний плазмы и параметров пучка (например, плотности и скорости), продольных по отношению к направлению начальной скорости пучка, до значений, сравнимых по амплитуде со значениями самих параметров.

Исследованию этого явления было посвящено большое количество работ. Обзоры этих работ приведены, например, в монографиях [3–6].

Ранее нами была решена аналогичная задача: разработана кинетическая теория устойчивости системы электрон-пучок-ограниченная плазма для плоской геометрии при числах Кнудсена (Kn) порядка 1 [7–9]. При этом функция распределения электронов (ФРЭ) плазмы в [9] предполагалась изотропной, а в [7, 8] – максвелловской. Следует отметить, что, вообще говоря, первое предположение не совсем верно.

Действительно, рассмотрим плазму, ограниченную двумя бесконечными плоскостями. Введем систему координат XYZ , в которой плоскость XY совпадает с одной из плоскостей (условно назовем ее катодом), а ось z направлена ко второй плоскости (аноду). Пусть электронный луч движется от катода по направлению к аноду с энергией E_0 , лежащей в диапазоне, где сечение упругих электрон-атомных столкновений значительно превышает сечение неупругих. Для инертных газов, например, эта энергия составляет менее 100 эВ [10–12].

Пусть электроны упруго отражаются от катода и полностью поглощаются на аноде. Тогда совершенно очевидно, что вблизи анода для скоростей электронов плазмы, позволяющих им преодолеть анодную разность потенциалов, существует значительная анизотропия ФРЭ. Поскольку размер области анизотропии вблизи полностью поглощающей поверхности имеет порядок длины пути, а число Кнудсена $Kn \sim 1$, то очевидно, что ФРЭ плазмы имеет анизотропный характер в значительной части рассматриваемой области.

Кроме того, в зависимости от условий ФРЭ может существенно отклоняться от максвелловской [13]. Так, в сильных электрических полях дрейфовая скорость электронов в плазме может составлять значительную часть средней тепловой скорости, что также приводит к значительной анизотропии ФРЭ.

Наконец, обычно при разработке кинетической теории устойчивости предполагается, что выполняется следующее неравенство [7–9]:

$$\kappa_E = \frac{E_t}{E_0} \ll 1, \quad (1)$$

где E_t – средняя энергия электронов плазмы. В то же время интересна ситуация, когда энергия электронного пучка и плотность электронов в пучке порядка тех, что в плазме. Действительно, такую ситуацию можно наблюдать, например, в тлеющем разряде вблизи анода, $Kn \sim 1$, $\kappa_E < 1$, а плотность электронов, движущихся в одном направлении, оказывается порядка плотности плазмы. Как известно, во многих случаях неустойчивости возникают в газоразрядной плазме, которая генерируется в узкой прианодной области [13].

Кроме того, вблизи диэлектрических границ плазмы возникает ситуация, когда при потенциале стенок порядка средней энергии электронов, электроны плазмы с более высокой энергией, упруго рассеянные в направлении стенки, могут достигать этих поверхностей. Таким образом, формируется направленный поток быстрых электронов в направлении к поверхности, ограничивающей плазму. При условии, $Kn \sim 1$, как если бы существовал пучок, имеющий энергию направленного движения к стенке выше средней энергии электронов в плазме и с температурой пучка,

равной этой энергии. Было бы интересно изучить устойчивость этого явления при флуктуациях параметров плазмы.

Таким образом, представляется актуальным выяснить влияние типа ФРЭ плазмы и ее анизотропии на устойчивость системы электронный пучок-плазма, а также исследовать устойчивость такой системы при выполнении следующих соотношений:

$$\kappa_E, \kappa_b < 1, \quad (2)$$

где $\kappa_b = \frac{n_{ob}}{n_{ot}}$, а n_{ob} , n_{ot} – плотности электронов в пучке и плазме, соответственно.

Мы рассматриваем нерелятивистские электронные пучки, когда распространяющиеся возмущения являются электростатическими.

1. Основные соотношения

Обозначим ФРЭ в плазме как $n_{0t}F_{0t}(z, v, \mu)$, где v – скорость электрона; $\mu = \cos \theta$ и θ – полярный угол в ранее введенной системе координат. Далее, согласно [7-9], необходимо написать систему кинетических уравнений для электронного пучка и электронов плазмы, а также уравнение Пуассона. При этом необходимо иметь решение кинетических уравнений для ФРЭ без возмущений, т.е. в области устойчивости системы. Затем в этой системе уравнений предполагается гармоническое возмущение всех параметров (включая электрическое поле) с частотой ω , волновым числом γ , и с помощью полученной системы уравнений ищется связь между этими параметрами возмущения, которая и является дисперсионным уравнением.

Как известно, задача о распространении волн малой амплитуды в среде может быть решена с помощью двух подходов:

- путем изучения временной динамики волны, которая в момент времени $t = 0$ возникла в каждой точке определенной пространственной области – это так называемая задача с начальными условиями [1, 14-16], когда частота предполагается комплексной;
- путем изучения распространения волны от источника возмущений, локализованного на некоторой поверхности (в нашем случае – плоскости катода) – это так называемая задача с граничными условиями [17], когда волновое число предполагается комплексным.

Очевидное различие между этими двумя подходами состоит в том, что в первом случае исследуется временная динамика возмущений, а во втором – пространственная. В зависимости от свойств среды результаты этих подходов могут быть как одинаковыми, так и кардинально отличаться. Примером такого существенного различия является задача о распространении звуковых волн в плазме молекулярных газов [18].

Как правило, при решении задачи о неустойчивости плазмы решается задача с начальными условиями. Мы рассматриваем оба подхода. Как отмечается в [16], при некоторых условиях возможен рост возмущений как в пределах времени в фиксированной точке пространства, так и вдоль направления распространения пучка в определенный момент времени. Мы, однако, более подробно исследуем вторую задачу, поскольку она, на наш взгляд, более физически обоснована, так как часто в системе электронный пучок-самостоятельный разряд генератором возмущений является катод (дробовой и тепловой шум).

Для получения дисперсионного уравнения в явном виде, согласно ранее разработанной теории [7-9] (см. приложение А), необходимо вычислить интеграл:

$$I_t = 8\pi^2 e \int_0^\infty \int_{-1}^1 v^2 b_t(v, \mu) d\mu dv; \quad (3)$$

$$b_t = -\frac{e}{m [i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)]} \frac{\partial F_{0t}}{\partial v_z},$$

где e , m – заряд и масса электрона, соответственно; $v_t = \sqrt{\frac{8kT_t}{\pi m}}$ – средняя тепловая скорость электронов плазмы; $\bar{\nu}_{ea}(v) = \nu_{ea}[1 - \bar{\mu}_0(v)]$ – эффективная частота упругих электрон-атомных столкновений; $\bar{\mu}_0$ – средний косинус упругого рассеяния электрона атомом; $v_z = \mu v$; μ – косинус угла между скоростью электрона и осью z в введенной системе координат.

1.1. Случай разделения переменных μ и ν в ФРЭ плазмы

Для случая, когда переменные μ и ν в ФРЭ можно разделить и представить в виде (В6), расчет интеграла (3) приведен в приложении В. Используя формулы, приведенные в приложениях А и Б, а также результаты [7] и действуя так, как описано выше, получим дисперсионное уравнение для задачи с начальными условиями (когда частота ω считается комплексной, а волновое число – вещественным и известным) в виде:

$$\frac{\kappa_b}{\varepsilon^2} + P_t(\varepsilon) \left[1 + i \frac{\nu_{ea}}{\gamma v_0 (1 + \varepsilon)} \right]^{-1} - \frac{\gamma^2 v_0^2}{\omega_D^2} + \kappa_i \frac{1}{\varepsilon (2 + \varepsilon)} \left[1 + i \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{2\gamma v_0} \ln \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \right) \right]^{-1} = 0; \quad \kappa_i = \frac{\omega_{iD}^2}{\omega_D^2}, \quad (4)$$

где в общем случае

$$P_t(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \overline{\mu}^{n-1}}{(1 + \varepsilon)^{n+1}} \overline{\left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad (5)$$

и в случае, когда ФРЭ плазмы является четной функцией от μ ,

$$P_t(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1) \overline{\mu}^{2j-2}}{(1 + \varepsilon)^{2j}} \overline{\left(\frac{E}{E_0} \right)^{j-1}} \quad (6)$$

(определения величин $\overline{\mu}^k$ и $\overline{\left(\frac{E}{E_0} \right)^k}$ приведены в приложении В).

Для задачи с граничными условиями, когда волновое число γ предполагается комплексным, а частота ω – вещественной и известной, дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_b}{\varepsilon^2} + P_t(\varepsilon) \left(1 - i \frac{\nu_{ea}}{\omega_D \kappa_{\omega} \left(1 - i \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{\kappa_{\omega} \omega_D} \right)} \right)^{-1} - \frac{\left(1 - i \frac{1}{\kappa_{\omega}} \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{\omega_D} \right)^2}{(1 + \varepsilon)^2} \kappa_{\omega}^2 + \\ \kappa_i \frac{1}{\varepsilon (2 + \varepsilon)} \left[1 + i \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0) (1 + \varepsilon)}{2\omega_D \kappa_{\omega} \left(1 - i \frac{1}{\kappa_{\omega}} \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{\omega_D} \right)} \ln \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \right) \right]^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\kappa_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_D}$.

Кроме того, оно удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im}(\gamma v_0)}{\omega_D} &= -\kappa_{\omega} \frac{\text{Im}(\varepsilon) + [1 + \text{Re}(\varepsilon)] \frac{1}{\kappa_{\omega}} \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{\omega_D}}{[1 + \text{Re}(\varepsilon)]^2 + \text{Im}(\varepsilon)^2}; \\ \frac{\text{Re}(\gamma v_0)}{\omega_D} &= \kappa_{\omega} \frac{[1 + \text{Re}(\varepsilon)] - \text{Im}(\varepsilon) \frac{1}{\kappa_{\omega}} \frac{\bar{\nu}_{ea}(v_0)}{\omega_D}}{[1 + \text{Re}(\varepsilon)]^2 + \text{Im}(\varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что при выполнении неравенства (1) первые три члена функции $P_t(\varepsilon)$ в общем случае имеют вид:

$$P_t(\varepsilon) = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} + 2\overline{\mu} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{0.5} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^3} + 3\overline{\mu}^2 \left(\frac{E}{E_0} \right) \frac{1}{(1 + \varepsilon)^4} + O \left[\left(\frac{E}{E_0} \right)^{1.5} \right], \quad (9)$$

а для четного ФРЭ:

$$P_t(\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + 3\overline{\mu^2} \left(\frac{E}{E_0}\right) \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + 5\overline{\mu^4} \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 \frac{1}{(1+\varepsilon)^6} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^3\right]. \quad (10)$$

Для изотропной плазмы полученные соотношения адекватно описывают ситуацию, в том числе и для $\kappa_E < 1$. Как видно, в формулах (9) и (10) первый член соответствует «холодной» плазме с нулевой средней энергией электронов. Следующие члены зависят от средней энергии и распределения угловых скоростей электронов плазмы. Кроме того, если ФРЭ плазмы обладает заметной анизотропией, то второй член существенно больше, чем для изотропной ФРЭ (точнее, для равномерной ФРЭ μ), поскольку это соотношение порядка $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} > \left(\frac{E_t}{E_0}\right)$. Влияние этого на устойчивость электронно-пучково-плазменной системы и физические причины этого влияния будут рассмотрены ниже.

Напишем функции $P_t(\varepsilon)$ для следующих частных случаев углового распределения электронов плазмы, которые понадобятся нам при обсуждении полученных результатов: для изотропной ФРЭ (который является частным случаем равномерной ФРЭ по μ) – $P_t^i(\varepsilon)$; для изотропного ФРЭ вдоль передней полусферы, когда $\mu > 0$ – $P_t^{ip}(\varepsilon)$; для изотропной ФРЭ вдоль задней полусферы, когда $\mu < 0$ – $P_t^{in}(\varepsilon)$; для суммы изотропной ФРЭ и небольшой анизотропной добавки, пропорциональной μ – $P_t^\mu(\varepsilon)$. Второй и третий варианты характерны для ФРЭ вблизи полностью поглощающих поверхностей и отличаются только направлением анизотропии относительно скорости пучка. Последний вариант слабой анизотропии обычно используется для описания ФРЭ в газоразрядной плазме вдали от поглощающих поверхностей в присутствии электрического поля. После расчетов мы получили для первых трех ФРЭ:

$$\begin{aligned} P_t^i(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)} \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2} \frac{1}{(1+\varepsilon)^6} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^3\right]; \\ P_t^{ip}(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)^{0.5}} \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} + \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)} \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^{1.5}\right]; \\ P_t^{in}(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)^{0.5}} \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} + \overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)} \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^{1.5}\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае максвелловской ФРЭ мы получаем из (11):

$$\begin{aligned} P_t^i(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \left(\frac{E_t}{E_0}\right) \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + \frac{15}{9} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^2 \frac{1}{(1+\varepsilon)^6} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^3\right]; \\ P_t^{ip}(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} + \left(\frac{E_t}{E_0}\right) \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + O\left[\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{1.5}\right]; \\ P_t^{in}(\varepsilon) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} + \left(\frac{E_t}{E_0}\right) \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + O\left[\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{1.5}\right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $O(x)$ – это значение, для которого

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{O(x)}{x} = \text{const} \neq 0; \quad \text{const} < \infty.$$

Для расчета $P_t^\mu(\varepsilon)$ представим соответствующую модель ФРЭ в виде

$$F_{0t}^\mu(v, \mu) = \frac{1}{2} [\Phi_{0t}(v) + 3 \mu \Phi_{1t}(v)]; \quad (13)$$

где $\int_0^\infty \Phi_{1t}(v) v^2 dv = \pm \sqrt{2} \frac{u_d}{v_t}$.

Соотношение (13) представляет собой первые два члена разложения ФРЭ по полиномам Лежандра в отношении μ .

Например, для плазмы с положительным столбом в условиях, когда ФРЭ определяется упругими электрон-атомными столкновениями, а ось z в выбранной системе координат параллельна вектору электрического поля, справедливо следующее:

$$\Phi_{1t}(v) = -u_d \frac{d\Phi_{0t}(v)}{dv}, \quad (14)$$

где u_d – скорость дрейфа электронов. В случае противоположного направления оси z знак в правой части (14) меняется на противоположный. Следовательно, в случае максвелловской функции $\Phi_{0t}(v)$ мы получаем

$$\int_0^\infty \Phi_{1t}(v) v^2 dv = \pm \sqrt{2} \frac{u_d}{v_t}.$$

Величина $\frac{u_d}{v_t}$ в газоразрядной плазме, в зависимости от напряженности электрического поля и типа газа, может достигать значений в несколько десятых [13]. После аналогичных преобразований с учетом (14) получаем асимптотический ряд для величины $P_t^\mu(\varepsilon)$:

$$P_t^\mu(\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{3^{k-1}(1+\varepsilon)^{2k+1}} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^k \left[1 \pm \frac{12k\sqrt{\frac{6}{\pi}} u_d}{2k+1} \frac{1}{v_t} (1+\varepsilon) \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} \right]. \quad (15)$$

Первые три члена этого разложения равны:

$$P_t^\mu(\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \pm 4\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{u_d}{v_t} \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} \left(\frac{E_t}{E_0}\right) + O\left[\frac{u_d}{v_t} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{1.5}\right] + O\left[\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^2\right]. \quad (16)$$

Напомним, что верхний и нижний знаки в формулах (15) и (16) соответствуют параллельному и антипараллельному направлениям вектора электрического поля в плазме относительно оси z .

1.2. Общий случай произвольной ФРЭ

Рассмотрим общий случай произвольной зависимости ФРЭ плазмы от переменных v и μ (в том числе, когда эти переменные не могут быть разделены). В этом случае удобнее рассматривать зависимость ФРЭ не от переменных v, μ , а от переменных v_x, v_y, v_z – компонент скорости v в выбранной декартовой системе координат. Таким образом, в соответствии с вышесказанным, необходимо вычислить величину

$$I_t(\varepsilon) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_t(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z,$$

где

$$b_t(v_x, v_y, v_z) = -\frac{e}{m[i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_t)]} \frac{\partial \bar{F}_{0t}(v_x, v_y, v_z)}{\partial v_z},$$

$$\bar{F}_{0t}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = v^2 F_{0t}(v, \mu, \varphi) dv d\mu d\varphi,$$

и φ – полярный угол с осью z в цилиндрической системе координат.

Мы предполагаем, что ФРЭ плазмы при энергиях выше средней тепловой энергии имеет монотонный характер и число электронов плазмы со скоростями порядка v_0 пренебрежимо мало. Тогда, действуя так же, как это было сделано в приложении В, и пренебрегая затуханием Ландау (по тем же причинам, что и раньше), мы можем получить, что при $\left(\frac{v_z}{v_0}\right) \ll 1$ для $I_t(\varepsilon)$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} I_t(\varepsilon) &= -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)^{n-1}} + O \left[\overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)^N} \right] \\ &= -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}} + O \left[\overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^{\frac{N}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь E_z – энергия электрона в направлении z .

Из (17) мы получаем для функции $P_t(\varepsilon)$ аналог соотношения (5) также в виде асимптотического ряда:

$$P_t(\varepsilon) = -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}} + O \left[\overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^{\frac{N}{2}}} \right]. \quad (18)$$

Формула (18) справедлива для произвольной ФРЭ плазмы.

Нетрудно убедиться, что если переменные v и μ можно разделить, то непосредственно из (18) следует соотношение (5).

Таким образом, оказывается, что роль плазмы в распространении гармонических возмущений в определенном направлении определяется энергетическими моментами (или моментами скоростей) невозмущенной ФРЭ в этом направлении: скоростью дрейфа, энергией, потоком энергии и т.д. Оставляя первые четыре члена в (18), имеем:

$$P_t(\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} + \frac{3}{(1+\varepsilon)^4} \overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)} + \frac{5}{(1+\varepsilon)^6} \overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^{1.5}} + O \left[\overline{\left(\frac{E_z}{E_0}\right)^2} \right]. \quad (19)$$

Чтобы проанализировать влияние анизотропии ФРЭ плазмы на параметры распространяющегося возмущения и сравнить их со случаем изотропного ФРЭ, получим аналитическое выражение для решения дисперсионного уравнения (4). Для простоты рассмотрим ситуацию, когда $\kappa_i = v_{ea} = 0$ и $\frac{\gamma v_0}{\omega_D} = 1$, и оставим два ведущих члена в разложении (19). Таким образом, уравнение (4) принимает простой вид:

$$\frac{\kappa_b}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} - 1 = 0, \quad (20)$$

и, кроме того, в конкретном рассматриваемом случае выполняется следующее условие:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_D}{\omega_D}.$$

Для ситуации, когда $\kappa_b, \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \leq 10^{-3}$, оставляя в (20) члены $O(\varepsilon^3)$, можно получить решение при $\text{Im}(\varepsilon) \leq 0$:

$$\begin{aligned} 1 + \text{Re}(\varepsilon) &= -\frac{\kappa_b^{1/3}}{2^{4/3}} \left[1 + \frac{14}{3^4} \kappa_b - \frac{4}{9} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \right] - \frac{\kappa_b^{2/3}}{3 \cdot 2^{2/3}} + \frac{\left[\kappa_b + 2 \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \right]}{6} + O \left(\kappa_b^{5/3} \right) + \\ &\quad O \left[\kappa_b^{2/3} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{Im}(\varepsilon) = -\frac{3^{1/2} \kappa_b^{1/3}}{2^{4/3}} \left[1 + \frac{14}{3^4} \kappa_b - \frac{4}{9} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \right] + \frac{\kappa_b^{2/3}}{3^{1/2} \cdot 2^{2/3}} + O \left(\kappa_b^{5/3} \right) + O \left[\kappa_b^{2/3} \overline{\left(\frac{v_z}{v_0}\right)} \right].$$

Отметим, что первый член во второй формуле (21) тождественно совпадает с подобным формулами в [15, 19], где в рамках гидродинамического подхода решалась задача об устойчивости системы электронный пучок-изотропная плазма. Аналогично, формулы (21) для $\overline{(\frac{v_z}{v_0})} = 0$ вплоть до значений $O(\kappa_b^{2/3})$, совпадают с соотношением (42) в [7], где была разработана кинетическая теория низковольтного пучкового разряда (НВПР) в инертных газах.

Покажем связь между параметрами электронно-пучково-плазменной системы, которые соответствуют области потери устойчивости. Для задач с начальными и граничными условиями, соответственно, имеем:

$$\frac{\overline{v}_{ea}(v_0)}{\gamma v_0} + \text{Im}(\varepsilon) \leq 0; \quad \frac{\overline{v}_{ea}(v_0)}{\omega_D} + \frac{\text{Im}(\varepsilon)}{[1 + \text{Re}(\varepsilon)]} \leq 0. \quad (22)$$

Второе соотношение непосредственно следует из формулы (8). Знак равенства соответствует скорости роста при нулевом возмущении.

Фазовая и групповая скорости, соответственно, для задачи с начальными условиями вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{v_f}{v_0} &= [1 + \text{Re}(\varepsilon)]; \\ \frac{v_g}{v_0} &= \frac{d\text{Re}(\omega)}{d\gamma v_0} = 1 + \text{Re}(\varepsilon) + 2a \frac{d\text{Re}(\varepsilon)}{da}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $a = \frac{\gamma^2 v_0^2}{\omega_D^2}$.

Аналогично, для задачи с граничными условиями имеем:

$$\begin{aligned} \frac{v_{bf}}{v_0} &= \kappa_\omega \frac{[1 + \text{Re}(\varepsilon)]^2 + \text{Im}(\varepsilon)^2}{\left\{ \kappa_\omega [1 + \text{Re}(\varepsilon)] - \text{Im}(\varepsilon) \frac{\overline{v}_{ea}(v_0)}{\omega_D} \right\}}; \\ \frac{v_{bg}}{v_0} &= \left\{ \frac{d \frac{\kappa_\omega [1 + \text{Re}(\varepsilon)] - \text{Im}(\varepsilon) \frac{\overline{v}_{ea}(v_0)}{\omega_D}}{[1 + \text{Re}(\varepsilon)]^2 + \text{Im}(\varepsilon)^2}}{d\kappa_\omega} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношения (23) и (24) следуют из определений фазовой и групповой скоростей и из формул, полученных для членов в правых частях этих формул.

Связь между фазовой и групповой скоростями, необходимая нам при обсуждении результатов, может быть получена в следующем виде из определения этих скоростей:

$$\frac{d^2 v_f}{d\omega^2} = \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{v_f}{v_g} \right) \left[\left(1 - \frac{v_f}{v_g} \right) \frac{dv_f}{d\omega} + \left(\frac{v_f}{v_g} \right)^2 \frac{dv_g}{d\omega} \right]; \quad \frac{dv_f}{d\omega} = \frac{v_f}{\omega} \left(1 - \frac{v_f}{v_g} \right). \quad (25)$$

2. Обсуждение

Прежде всего отметим, что в известных частных случаях, когда $\kappa_i = v_{ea} = 0$, $\frac{\gamma v_0}{\omega_D} = 1$ и $\kappa_b, \overline{(\frac{v_z}{v_0})} \leq 10^{-3}$, рассмотренных в [15, 19, 20], а также для НВПР, и в предположении, что ФРЭ плазмы изотропна и имеет максвелловское распределение скоростей [7, 8], наши результаты совпадают с данными, полученными в других исследованиях.

Из этих результатов следует, что в случае изотропного ФРЭ и при выполнении неравенства (1) при одинаковой средней энергии электронов в плазме форма скоростного ФРЭ слабо влияет на параметры распространяющегося в плазме возмущения.

Рассмотрим результаты, полученные для анизотропной ФРЭ в плазме. Особый интерес представляет случай сильного нарушения изотропии, например, для плазмы в сильных электрических полях или вблизи поглощающих поверхностей. Расчеты проводились для случая инертного газа Не.

Диапазон малых параметров $\kappa_b, \kappa_e \leq 10^{-3}$ для взаимодействия пучка быстрых электронов с изотропной плазмой изучен достаточно полно (за исключением случая $\kappa_i \neq 0$). На наш взгляд, больший интерес представляет диапазон, когда эти параметры имеют порядок 10^{-2} и выше. Такие значения характерны для различных пучковых разрядов, например, для НВПР в инертных газах [21].

Мы кратко обсудим задачу о неустойчивости с начальными условиями и более подробно – задачу с граничными условиями, поскольку, как правило, вторая постановка задачи часто реализуется в плазме, когда источником возмущений является электронный пучок.

В расчетах средний косинус угла рассеяния для упругих электрон-атомных столкновений принимался равным 0,3, что для случая атома He соответствует энергии пучка, равной $E_0 = 30$ эВ (НВПР в He). Из уравнений (4) и (7) следует, что для обеих задач (с начальными и граничными условиями) средний косинус угла упругого рассеяния $\bar{\mu}_0(v)$ входит в дисперсионное уравнение только для группы электронов, имеющих изотропное распределение с энергией пучка (т.е. при $v = v_0$), поскольку для электронов плазмы, имеющих среднюю энергию порядка нескольких эВ, величина

$\bar{\mu}_0(v)$ близка к 0 [10, 11], по крайней мере, для инертных газов. Первый член дисперсионных уравнений (4) и (7), соответствующий электронам пучка, также не включает $\bar{\mu}_0(v_0)$, поскольку любое упругое рассеяние, независимо от угла рассеяния, приводит к выходу электрона из этой группы. В связи с этим наблюдается слабая зависимость параметров возмущения от величины $\bar{\mu}_0(v_0)$.

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов зависимости относительной скорости роста и относительного сдвига частоты возмущения, распространяющегося в системе электронный пучок-плазма, от относительного волнового числа для задачи с начальными условиями при различных значениях проекции скорости дрейфа $\bar{v}_z = u_d$ на ось z . Расчеты проводились для уравнения (4), где использовалось соотношение $P_t^\mu(\varepsilon)$ из соотношения (16). Как видно из этих данных, в случае, когда дрейфовая скорость (которая здесь является причиной анизотропии ФРЭ плазмы) направлена вдоль распространения пучка, модуль скорости роста и частотный сдвиг уменьшаются относительно случая изотропной ФРЭ (т.е. при $u_d = 0$), оставаясь отрицательными. Напротив, если эта скорость находится в направлении, противоположном электронному пучку, то модуль этих параметров увеличивается. То есть при $u_d < 0$ система становится менее устойчивой, а при $u_d > 0$ – более устойчивой. Мы объясним это ниже, когда будем анализировать соответствующие зависимости для задачи с граничными условиями.

В то же время следует отметить, что с увеличением волнового числа неустойчивость системы растет. Это согласуется с хорошо известным фактом, что скорость роста растет с увеличением частоты возмущений [7, 19].

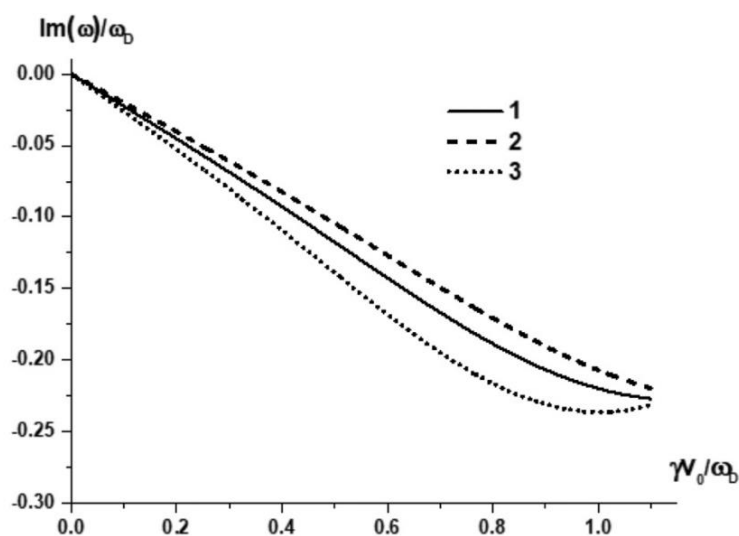


Рис. 1. Зависимость относительных скоростей роста $\frac{Im(\omega)}{\gamma v_0}$ от относительного числа волн гармонического возмущения

для задачи с начальными условиями, рассчитанными по формулам (4) и (16) при $\kappa_i = 0.01$; $\kappa_b = 0.06$; $\kappa_e = 0.05$; $v_{ea} = 0$;

(1) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0,2$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,2$

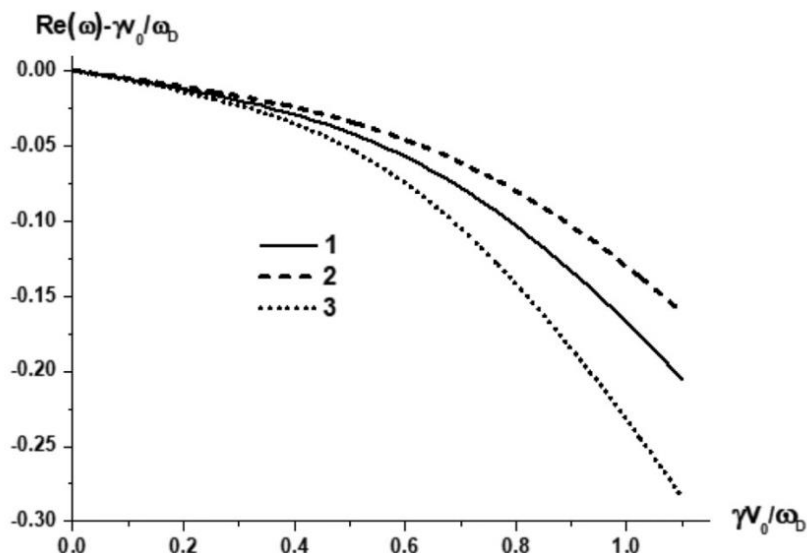


Рис. 2. Зависимость относительных сдвигов частот от относительного числа волн гармонического возмущения для задачи с начальными условиями $\frac{Re(\omega) - \gamma v_0}{\omega_D}$, рассчитанных по формулам (4) и (16) при $K_i = 0.01$; $K_b = 0.06$; $K_E = 0.05$; $v_{ea} = 0$;
(1) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0.2$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0.2$

На рисунках 3 и 4 приведены зависимости фазовой и групповой скоростей для задачи с начальными условиями (формулы (23) и (24)), соответственно, от относительного числа волн возмущения и для условий рисунков 1 и 2. Видно, что, во-первых, с ростом числа волн уменьшаются как фазовая, так и групповая скорости. Это объясняется следующим образом. На относительно низких частотах (большие длины волн и малые числа волн) возмущения не распространяются в плазме и, следовательно, переносятся пучком с относительной скоростью, близкой к 1. С ростом частоты возмущения (увеличением числа волны) и приближением ее к ленгмюровской частоте возбуждаются колебания в плазме, что приводит к уменьшению скорости распространения возмущения. Более подробно мы рассмотрим этот эффект при обсуждении результатов расчетов для задачи с граничными условиями.

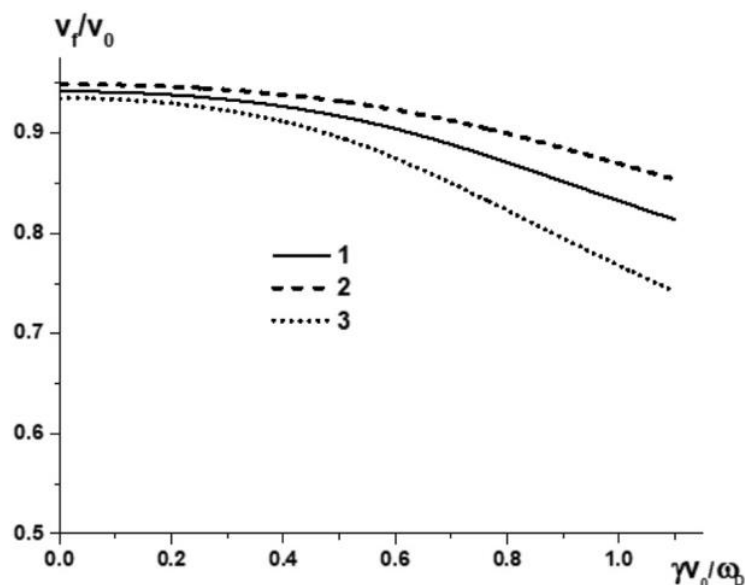


Рис. 3. Зависимость относительных фазовых скоростей $\frac{v_f}{v_0}$ от относительного числа волн гармонического возмущения для задачи с начальными условиями, рассчитанных по формулам (4) и (16) при $K_i = 0.01$; $K_b = 0.06$; $K_E = 0.05$; $v_{ea} = 0$;
(1) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0.2$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0.2$

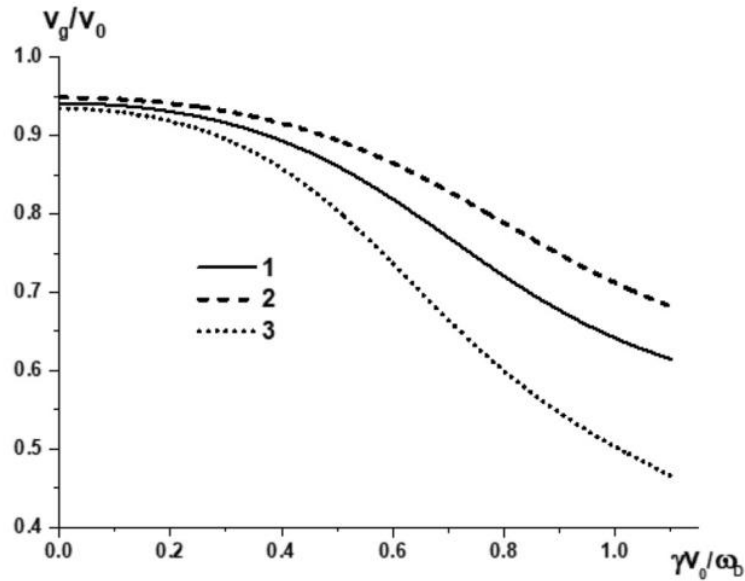


Рис. 4. Зависимость относительных групповых скоростей $\frac{v_g}{v_0}$ от относительного числа волн гармонического возмущения для задачи с начальными условиями, рассчитанными по формулам (4) и (16) при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,06$; $\kappa_E = 0,05$; $v_{ea} = 0$;
(1) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0,2$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,2$

На рисунке 5 представлены результаты расчета зависимостей относительной скорости роста $\frac{\text{Im}(\gamma v_0)}{\omega_D}$ в задаче с граничными условиями для случая анизотропной плазмы, когда анизотропия обусловлена электрическим полем (например, плазма с положительным столбом). Расчеты проводились для различных значений величин $\frac{u_d}{v_t} = 0$; 0,05; -0,05 и частот упругих электрон-атомных столкновений $\frac{v_{ea}}{\omega_D}$.

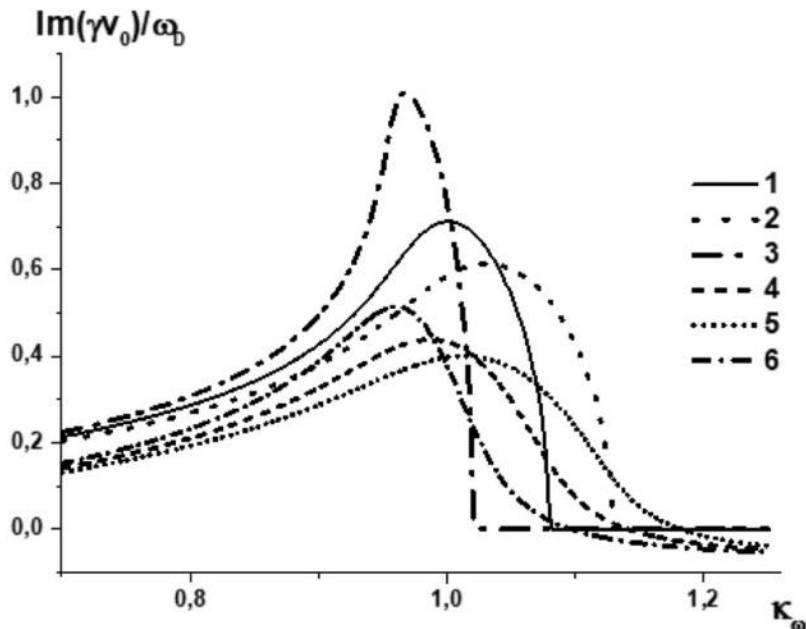


Рис. 5. Зависимость относительной скорости роста $\frac{\text{Im}(\gamma v_0)}{\omega_D}$ от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями, рассчитанными по формулам (7) и (16) для различных параметров $\frac{u_d}{v_t}$, при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,05$; $\kappa_E = 0,03$;
(1) $-\frac{u_d}{v_t} = \frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0,05$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,05$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0$; (4) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,07$;
(5) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,05$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,07$; (6) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,05$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,07$

Из данных рисунка 5 можно сделать вывод, что увеличение частоты упругих электрон-атомных столкновений приводит к уменьшению скорости роста независимо от направления дрейфовой скорости, аналогично ситуации с изотропной ФРЭ в плазме [7, 8]. Это, очевидно, связано с тем, что упругие столкновения приводят к уменьшению потока энергии электронов пучка в направлении распространения возмущения (направлении начальной скорости электронов пучка).

Видно также, что независимо от значения скорости дрейфа скорость роста имеет ярко выраженный максимум на частоте, близкой к плазменной частоте. При увеличении частоты выше частоты Ленгмюра скорость роста быстро уменьшается независимо от знака дрейфовой скорости.

Напомним, что при выводе дисперсионного уравнения для задачи с граничными условиями мы пренебрегли затуханием Ландау. В нашем случае это можно сделать по двум причинам. Во-первых, потому что фазовая скорость распространения возмущений в рассматриваемой системе на всех частотах имеет порядок v_0 и значительно превышает среднюю тепловую скорость электронов плазмы. В связи с этим, например, для максвелловской ФРЭ и рассматриваемой системы электронный пучок-плазма поправка на затухание Ландау пропорциональна коэффициенту $\exp[-\kappa_E^{-1}(1 + \varepsilon)^2]$, который экспоненциально мал для параметра κ_E . Во-вторых, мы учитываем затухание из-за упругих электрон-атомных столкновений, которое в наших условиях значительно превышает затухание Ландау.

Как видно из данных на рисунке 5, значения частот, при которых скорости роста имеют максимумы, различны для разных значений параметра $\frac{u_d}{v_t} = 0; 0.05; -0.05$. При $\frac{u_d}{v_t} = 0.05$ максимум скорости роста смещен вправо, а при $\frac{u_d}{v_t} = -0.05$ – влево относительно кривой для $\frac{u_d}{v_t} = 0$.

Рассмотрим причины этого явления. Колебания параметров пучка, порождая колебания электрического поля, вызывают колебания в плазме. При $\frac{u_d}{v_t} \neq 0$ частота определяется в системе координат, движущейся вместе с плазмой. Обозначим частоту максимума скорости роста при $\frac{u_d}{v_t} = 0$ как ω_{0D} . При положительном значении скорости дрейфа, вследствие эффекта Доплера, частота вынужденных колебаний плазмы в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа в направлении пучка, становится меньше, чем частота для случая $\frac{u_d}{v_t} = 0$. Поэтому экстремум достигается при определенной частоте колебаний параметров пучка в лабораторной системе координат $\omega_{+D} > \omega_{0D}$, такой, что частота в системе координат, движущейся вместе с плазмой, равна ω_{0D} . Аналогичная ситуация возникает при изменении знака скорости дрейфа, но частота в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа в сторону пучка, становится выше. Поэтому частота колебаний параметров пучка в лабораторной системе координат ω_{-D} , при которой достигается экстремум, составляет $\omega_{-D} < \omega_{0D}$. Таким образом, физической причиной сдвига частоты максимума скорости роста при изменении знака скорости дрейфа является эффект Доплера. Вполне понятно, что дрейфовая скорость, направленная по нормали к скорости электронов пучка, не влияет на параметры возмущений, распространяющихся в системе электронный пучок-плазма. Это прямо следует из формулы (19).

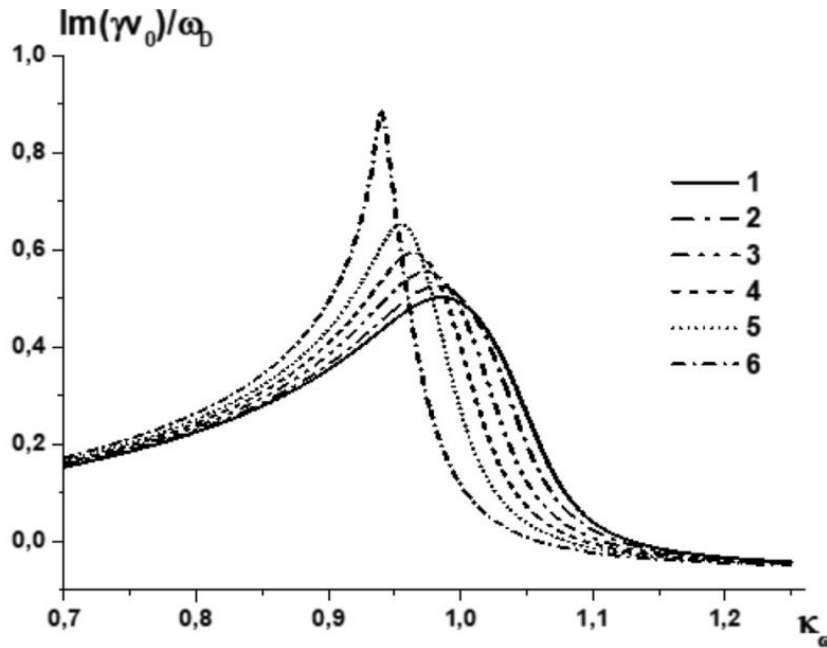


Рис. 6. Зависимость относительной скорости роста $\frac{\text{Im}(\gamma_0)}{\omega_D}$ от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями, рассчитанная по формулам (7) и (16) для различных отрицательных параметров $\frac{u_d}{v_t}$ при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,05$; $\kappa_E = 0,02$; $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,06$;
 (1) $-\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) $-\frac{u_d}{v_t} = 0,01$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0$; (3) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,05$; (4) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,05$; (5) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,07$; (6) $-\frac{u_d}{v_t} = -0,1$

На рисунке 5 можно увидеть еще одну интересную особенность кривых. А именно, скорость роста для случая $\frac{u_d}{v_t} < 0$ значительно превышает значение для $\frac{u_d}{v_t} > 0$. При этом, как видно из рисунка 6, по мере увеличения отрицательного значения модуля отрицательного значения модуля u_d скорость роста увеличивается. Рассмотрим этот эффект более подробно.

Для простоты предположим, что ФРЭ максвелловская с температурой T . Пусть ω – частота волны, распространяющейся вдоль пучка с фазовой скоростью v_f в лабораторной системе координат. Эта волна возбуждает возмущение с волновым числом γ_p в плазме с проекцией скорости дрейфа u_d на ось z . В соответствии с эффектом Доплера частота этого возмущения ω_p равна:

$$\omega_p = \omega \left(1 - \frac{u_d}{v_f} \right). \quad (26)$$

Предположим, что колебания, возбуждаемые в плазме, подчиняются известному закону дисперсии [24]:

$$\omega_p = \omega_D \sqrt{1 + \frac{3}{2} \gamma_p^2 r_D^2}. \quad (27)$$

Это соотношение лишь качественно характеризует колебания плазмы в рассматриваемой системе в области плазменных частот, поскольку не учитывает взаимодействие этих волн с электронным пучком.

Используя известную связь между радиусом Дебая и частотой Ленгмюра, из соотношений (26) и (27) получаем:

$$\gamma_p = \left[\left(\frac{\omega}{\omega_D} \right)^2 \left(1 - \frac{u_d}{v_f} \right)^2 - 1 \right]^{0.5} \frac{\omega_D}{\sqrt{\frac{3kT}{2m}}}. \quad (28)$$

В этом случае фазовая скорость v_{pf} распространения возмущения в системе координат, связанной с плазмой, равна:

$$v_{pf} = \frac{\frac{\omega}{\omega_D} \left(1 - \frac{u_d}{v_f}\right)}{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2 \left(1 - \frac{u_d}{v_f}\right)^2 - 1\right]^{0.5}} \sqrt{\frac{3kT}{2m}}. \quad (29)$$

Для того чтобы волна, возбуждаемая возмущением пучка, усилилась в плазме, необходимо, чтобы их волновые числа и скорости в лабораторной системе координат совпадали. Легко показать, что если волновые числа совпадают, то совпадают и скорости распространения возмущений в пучке и плазме в лабораторной системе координат. То есть, если равенство

$$\gamma = \frac{\omega}{v_f} = \frac{\omega_p}{v_{pf}} = \gamma_p$$

удовлетворяется (где v_{pf} – фазовая скорость распространения возмущения в плазме в системе координат, связанной с плазмой), то также удовлетворяется равенство

$$v_f = v_{pf} + u_d.$$

Используя соотношение (28), при равенстве волновых чисел ($\gamma = \gamma_p$) можно получить:

$$\frac{\omega_p - \omega_D}{\omega_D} = \frac{\kappa_E}{4} \left(\frac{v_0}{v_f}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{u_d}{v_f}\right)^2} + O(\kappa_E^2); \quad (30)$$

$$\frac{\omega - \omega_D}{\omega_D} = \frac{u_d}{v_f \left(1 - \frac{u_d}{v_f}\right)} + \frac{\kappa_E}{4} \left(\frac{v_0}{v_f}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{u_d}{v_f}\right)^3} + O(\kappa_E^2). \quad (31)$$

Из равенства (30) следует, что для $u_d < 0$ увеличение модуля этой величины приводит к уменьшению разности между частотой возбужденных колебаний в плазме и ленгмюровской частотой.

Кроме того, $\omega_p > \omega_D$, как следует из (27). Если $u_d > 0$, то увеличение проекции дрейфовой скорости в плазме приводит к увеличению разности $\omega_p - \omega_D$. Эти закономерности объясняют увеличение скорости роста с увеличением модуля проекции дрейфовой скорости при движении плазмы к пучку. Таким образом, установлено, что наличие в плазме дрейфовой скорости с ненулевой отрицательной проекцией на направление движения пучка приводит к увеличению неустойчивости системы быстрый электронный пучок-плазма, а положительная проекция, наоборот, к увеличению устойчивости.

В рассматриваемых условиях, когда средняя энергия электронов в плазме существенно меньше энергии электронного пучка, анизотропия ФРЭ в плазме приводит к существенному изменению частотной зависимости параметров гармонических возмущений. Меняется и значение скорости роста в максимуме. Как видно из данных на рисунках 5 и 6, при отрицательной проекции дрейфовой скорости скорость роста увеличивается, при положительной – уменьшается. Это приводит к тому, что предельная частота электронно-атомных столкновений, при которой система теряет устойчивость, уменьшается с уменьшением скорости дрейфа, то есть система становится более устойчивой в области отрицательных скоростей дрейфа.

На рисунке 7 приведены зависимости относительной фазовой скорости $\frac{v_{bf}}{v_0}$ от относительной частоты $\frac{\omega}{\omega_0}$ при $\frac{u_d}{v_t} = 0; \pm 0.05$ для задачи с граничными условиями. Здесь же показаны относительные скорости роста. На рисунке видно, что фазовая скорость для всех параметров $\frac{u_d}{v_t}$ имеет минимум в области вблизи ленгмюровской частоты плазмы.

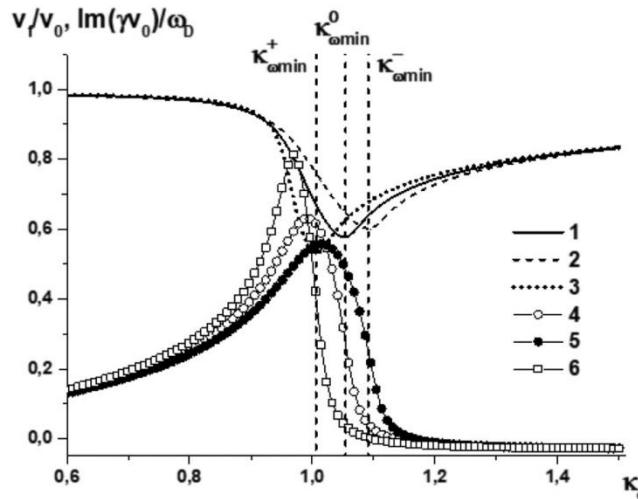


Рис. 7. Зависимость относительной фазовой скорости распространения возмущения $\frac{v_{bf}}{v_0}$ (кривые 1-3) и скорости роста (кривые 4-6) от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,05$; $\kappa_E = 0,02$; $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,03$ для случая $\frac{u_d}{v_t} = 0$ (кривые 1 и 4); $\frac{u_d}{v_t} = 0,05$ (кривые 2 и 5); $\frac{u_d}{v_t} = -0,05$ (кривые 3 и 6)

Как уже отмечалось, на частотах, значительно меньших ω_D , колебания в плазме не распространяются, поэтому они передаются за счет пучка со скоростью v_0 . При приближении к плазменной частоте, вследствие возбуждения плазмы, скорость распространения колебаний уменьшается. При дальнейшем увеличении частоты (уменьшении длины волны) колебания в плазме также затухают (см. зависимость скорости роста от частоты) и их передача вдоль оси z также возможна только за счет пучка со скоростью v_0 . Эти предположения подтверждаются тем, что, как видно из данных, представленных на рисунке 7, рост фазовой скорости после прохождения минимума начинается на частотах, соответствующих резкому уменьшению скорости роста. При дальнейшем увеличении частоты фазовая скорость стремится к v_0 .

Таким образом, для любого значения проекции дрейфовой скорости в плазме $\frac{u_d}{v_t}$ на ось z в системе быстрый электронный пучок-плазма существует область аномальной дисперсии, которая расположена для $\frac{u_d}{v_t} = 0$ при $\kappa_\omega > \kappa_{\omega \min}^0$, для $\frac{u_d}{v_t} = 0,05$ при $\kappa_\omega > \kappa_{\omega \min}^+$ мин и для $\frac{u_d}{v_t} = -0,05$ при $\kappa_\omega > \kappa_{\omega \min}^-$ (см. рисунок 7). Относительные частоты $\kappa_{\omega \min}^0$, $\kappa_{\omega \min}^+$, $\kappa_{\omega \min}^-$ соответствуют минимуму фазовой скорости при $\frac{u_d}{v_t} = 0$; $0,05$; $-0,05$, соответственно.

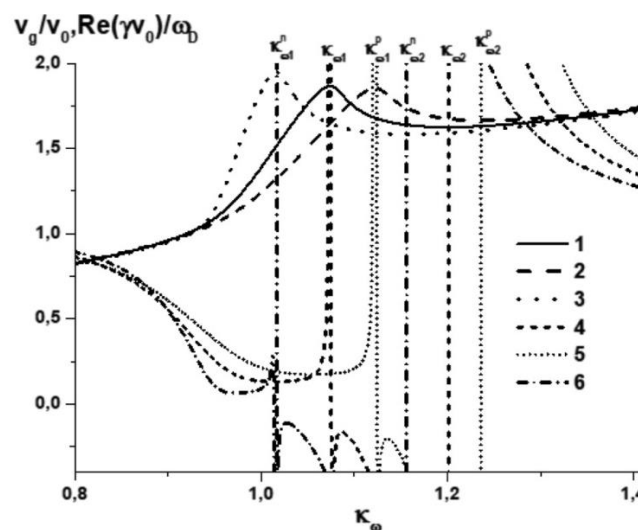


Рис. 8. Зависимость относительного волнового числа $\frac{v_{bg}}{\omega_D}$ (кривые 1-3) и относительной групповой скорости $\frac{v_{bg}}{v_0}$ (кривые 4-6) при распространения возмущения от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,05$; $\kappa_E = 0,03$; $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,02$ для случаев (1) и (4) — $\frac{u_d}{v_t} = 0$; (2) и (5) — $\frac{u_d}{v_t} = 0,05$; (3) и (6) — $\frac{u_d}{v_t} = -0,05$; значения относительных частот $\kappa_{\omega 1}$, $\kappa_{\omega 2}$; $\kappa_{\omega 1}^p$, $\kappa_{\omega 2}^p$; $\kappa_{\omega 1}^n$, $\kappa_{\omega 2}^n$ указывают границы области аномальной дисперсии для случаев $\frac{u_d}{v_t} = 0$; $\frac{u_d}{v_t} = 0,05$; $\frac{u_d}{v_t} = -0,05$, соответственно

Приведенные выше соображения объясняют и особенности поведения величины $\frac{Re(\gamma v_0)}{\omega_D}$ (см. рис. 8). Причины различия частот, соответствующих минимуму фазовой скорости при разных направлениях дрейфовой скорости в плазме, аналогичны причинам максимума скорости роста (см. выше пояснения к рисункам 5 и 6). В этом случае относительное волновое число $\frac{Re(\gamma v_0)}{\omega_D}$ для любого знака величины $\frac{u_d}{v_t}$ имеет два экстремума, максимум и минимум. Видно, что на достаточно большом расстоянии от плазменной частоты функции $\frac{Re(\gamma v_0)}{\omega_D}(\kappa_\omega)$ близки к линейным, в области вблизи частоты Ленгмюра все зависимости имеют максимум, а на частотах, несколько превышающих плазменную частоту, – минимум. Кроме того, в зависимости от знака параметра $\frac{u_d}{v_t}$ наблюдается сдвиг кривых в разные стороны относительно кривой, рассчитанной для $\frac{u_d}{v_t} = 0$. Это связано с особенностями поведения фазовой скорости из-за эффекта Доплера (см. рисунок 7) и соответствующим поведением длины волны.

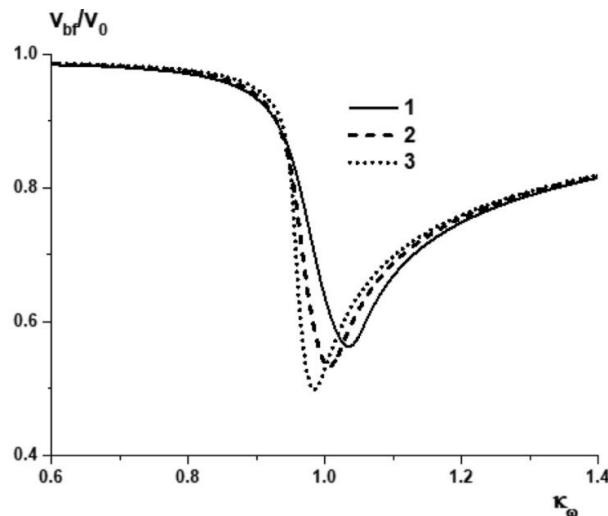


Рис. 9. Зависимости относительной фазовой скорости $\frac{v_{br}}{v_0}$ распространения возмущения от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями при $\kappa_i = 0,01$; $\kappa_b = 0,05$; $\kappa_E = 0,02$; $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,03$ и различными значениями параметра $\frac{u_d}{v_t}$: (1) – $\frac{u_d}{v_t} = -0,02$; (2) – $\frac{u_d}{v_t} = -0,005$, $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0$; (3) – $\frac{u_d}{v_t} = -0,07$

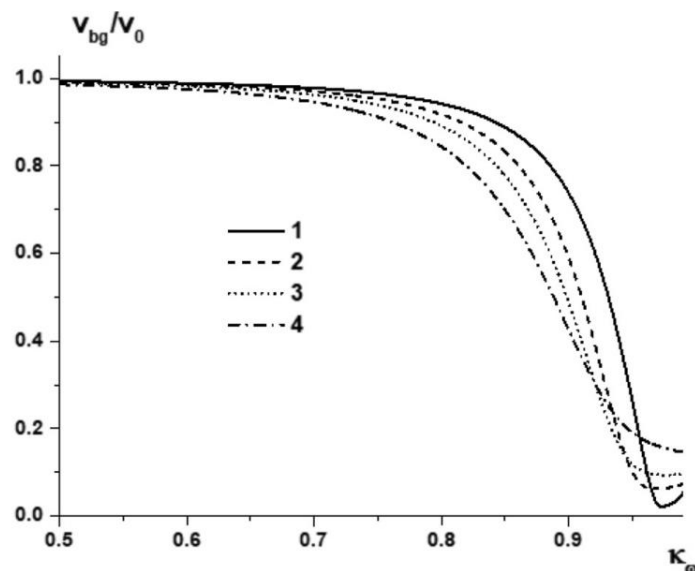


Рис. 10. Зависимости относительной групповой скорости $\frac{v_{bg}}{v_0}$ распространения возмущения от параметра κ_ω для задачи с граничными условиями при $\kappa_E = 0,02$; $\kappa_i = 0,01 - 4$; $\kappa_b = 0,05$; $\frac{v_{ea}}{\omega_D} = 0,02$; $\frac{u_d}{v_t} = -0,05$ и различными значениями параметра κ_E : (1) – $\kappa_E = 0,02$; (2) – $\kappa_E = 0,03$; (3) – $\kappa_E = 0,02$; (4) – $\kappa_E = 0,05$

На рис. 8 представлены интересные, на наш взгляд, данные по частотной зависимости относительных групповых скоростей при различных значениях $\frac{u_d}{v_t} = 0$. Расчеты проводились для $\frac{u_d}{v_t} = 0,5$. Как уже отмечалось, для каждого из заданных значений относительной дрейфовой скорости электронов в плазме существуют два значения относительной частоты, при которых относительное волновое число имеет экстремум, а групповая скорость является скачкообразной: при $\frac{u_d}{v_t}$, $-\kappa_{\omega 1}$, $\kappa_{\omega 1}^p$, $\kappa_{\omega 1}^n$ относительные частоты, соответствующие максимуму, и $\kappa_{\omega 2}$, $\kappa_{\omega 2}^p$, $\kappa_{\omega 2}^n$, соответствующие минимуму функции 5, соответственно. В этом случае все относительные частоты $\kappa_{\omega 1} = \kappa_{\omega \min}^0$, $\kappa_{\omega 1}^p = \kappa_{\omega \min}^+$, $\kappa_{\omega 1}^n = \kappa_{\omega \min}^-$ и $\kappa_{\omega 2}$, $\kappa_{\omega 2}^p$, $\kappa_{\omega 2}^n$ лежат в областях роста фазовой скорости с возрастающей частотой для соответствующих значений относительной проекции $\frac{u_d}{v_t}$ скорости дрейфа.

Видно, что, как и фазовая скорость, групповая скорость на частотах, меньших плазменной, также близка к значению v_0 , но начинает уменьшаться значительно раньше и также достигает минимума на частотах, близких к плазменной. Причем в минимуме она имеет порядок κ_E . Так, например, при параметрах системы «электронный пучок – плазма», указанных на рисунке 8, и $\kappa_E = 0,01$ относительная групповая скорость в минимуме равна 0,2, а в максимуме – 14. Это согласуется с известным законом дисперсии для продольных электростатических колебаний в плазме [13, 22].

Заметим, что для $\kappa_{\omega} = \kappa_{\omega \min}$ (где $\kappa_{\omega \min}$ – относительная частота, на которой фазовая скорость минимальна) $\frac{v_{bg}}{v_0}$ в соответствии с первым из равенств (25). В области аномальной дисперсии групповая скорость превышает фазовую. Известны случаи «нефизического» поведения групповой скорости в области аномальной дисперсии. Так, в работе [23] было сообщено об отрицательной групповой скорости коротких электромагнитных импульсов в среде с аномальной дисперсией. Таким образом, мы качественно объяснили наличие двух разрывов в групповой скорости на частотах, превышающих плазменную (в области аномальной дисперсии).

На рис. 9 приведены результаты зависимости фазовой скорости от частоты при различных отрицательных скоростях дрейфа электронов плазмы. Видно, что с увеличением модуля отрицательной величины u_d частота $\kappa_{\omega \min}$ уменьшается. Расчеты показывают, что для положительного значения u_d , наоборот, с увеличением модуля дрейфовой скорости эта частота возрастает. Такое поведение кривых согласуется с высказанными ранее соображениями о влиянии эффекта Доплера.

На рис. 10 приведены данные зависимости для различных соотношений энергий плазмы и пучка κ_E и отрицательной дрейфовой скорости в плазме. Видно, что, как и ожидалось, с уменьшением средней энергии электронов плазмы их влияние на групповую скорость распространения возмущения на фиксированной частоте становится все менее и менее выраженным. При этом, в соответствии с вышесказанным, значение групповой скорости в минимуме (на частоте, близкой к плазменной) уменьшается пропорционально κ_E .

3. Резюме

В заключение отметим, что нами решена задача устойчивости системы «быстрый электронный пучок – плазма» для произвольной, в том числе анизотропной, ФРЭ плазмы с учетом упруго рассеянных электронов, обладающих слабой анизотропией ФРЭ в направлениях движения и имеющих ту же энергию, что и пучок.

Впервые изучено влияние скорости дрейфа на устойчивость такой системы. Исследование показало, что эффект Доплера оказывает существенное влияние на частотную зависимость скорости роста и других параметров распространяющихся возмущений, обусловленных ненулевой скоростью дрейфа, в зависимости от ее направления относительно скорости электронного пучка. Кроме того, форма энергетической зависимости ФРЭ влияет на параметры распространяющихся возмущений только через энергетические моменты (средняя скорость, энергия, поток энергии и т.д.).

Увеличение скорости дрейфа, направленного антипараллельно пучку, приводит к росту скорости роста его возмущений. Это означает увеличение неустойчивости системы. Напротив, увеличение дрейфовой скорости, направленной параллельно направлению пучка, приводит к повышению устойчивости системы электронный пучок-плазма.

Обнаружена область аномальной дисперсии электронно-пучково-плазменной системы. В этой области (помимо естественного разрыва групповой скорости на границе областей нормальной

и аномальной дисперсий) имеется еще один разрыв групповой скорости, связанный с наличием минимума в зависимости числа волны от частоты. Кроме того, групповая скорость может принимать отрицательные значения, что, на наш взгляд, в данном случае не имеет физического смысла (в отличие, например, от случая, описанного в [23]).

В данной работе мы рассмотрели случай нерелятивистского пучка, когда возмущения электрического поля являются электростатическими. Для релятивистских пучков требуется отдельное рассмотрение, основанное на развитом кинетическом подходе в пространственно-ограниченной плазме. Дело в том, что в этом случае необходимо рассматривать не электростатические колебания поля, а электромагнитные. Поэтому, несмотря на то, что электроны пучка поглощаются анодом, могут возникать возмущения, движущиеся навстречу пучку, за счет их отражения от границы плазмы. Это обстоятельство существенно изменит результаты исследования.

Аналогичная ситуация реализуется в задаче Пирса [26, 27], в которой также существует волна, движущаяся в сторону пучка. При значительном увеличении амплитуды этих возмущений возможно их взаимодействие. Однако принципиальное отличие рассматриваемой системы (в том числе в случае релятивистского пучка) от диода Пирса состоит в том, что в ней нет плотной плазмы и частота возмущений определяется плазменной частотой самого пучка, который движется на фоне неподвижных ионов. В нашем случае частота возмущения определяется плазменной частотой, которая как минимум на порядок выше, и волны распространяются вдоль пучка только за счет их дрейфа со скоростью электронов пучка.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант № 21-19-00139.

Заявление о доступности данных: Все данные, подтверждающие результаты данного исследования, включены в статью (и все дополнительные файлы).

Приложение А

Вывод дисперсионного уравнения

Для простоты мы рассматриваем однородную плазму и однородную группу электронов с энергией пучка, с изотропным угловым распределением, которые испытали несколько упругих столкновений.

Как указывалось, в отсутствие возмущений ФРЭ в НВПР в рассматриваемых условиях может быть представлена как сумма функций трех групп электронов: исходного пучка, изотропно распределенных электронов с энергией пучка и электронов плазмы, соответственно:

$$F_{0b}(z, \vec{v}) \approx \frac{n_{0b}}{2\pi v_0^2} \delta(\mu - 1) \delta(v - v_0) \exp\left[\frac{-z}{\lambda_{ea}(v)}\right]; \quad (A1)$$

$$F_{0b}^i(z, \vec{v}) = \frac{n_{0b}^i}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0);$$

где n_{0b}^i – концентрация изотропно распределенных электронов с энергией пучка, E_0 – энергия электронов пучка, v – скорость электронов и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. ФРЭ плазмы будет обозначаться как $F_{0t}(z, \vec{v})$.

Полная ФРЭ и электрическое поле в НВПР представляются как сумма невозмущенных (A1) и гармонических возмущений с амплитудами, зависящими от координаты:

$$F_b(z, t, \vec{v}) = F_{0b}(z, \vec{v}) + f_b(z, t, \vec{v}); \quad f_b(z, t, \vec{v}) = f_{0b}(\vec{v}, z) \exp[-\Sigma_{ea}(v)z] \cdot \exp[i(\omega t - \gamma z)];$$

$$F_b^i(z, t, \vec{v}) = F_{0b}^i(z, \vec{v}) + f_b^i(z, t, \vec{v}); \quad f_b^i(z, t, \vec{v}) = f_{0b}^i(\vec{v}, z) \cdot \exp[i(\omega t - \gamma z)]; \quad (A2)$$

$$F_t(z, t, \vec{v}) = F_{0t}(z, \vec{v}) + f_t(z, t, \vec{v}); \quad f_t(z, t, \vec{v}) = f_{0t}(\vec{v}, z) \cdot \exp[i(\omega t - \gamma z)],$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{0p}(z) + \vec{E}; \quad \vec{E} = \vec{E}^0 \cdot \exp[i(\omega t - \gamma z)];$$

где $\Sigma_{ea}(v) = \frac{1}{\lambda_{ea}(v)}$.

Для амплитуд возмущений мы имеем систему [1]:

$$\begin{aligned} f_{0t} + \frac{v_z}{i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)} \frac{\partial f_{0t}}{\partial z} &= \frac{a_t(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0t}(v, \mu', z) d\mu' + b_t(\mu, z); \\ f_{0b}^i + \frac{v_z}{i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)} \frac{\partial f_{0b}^i}{\partial z} &= \frac{a_b^i(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0b}^i(v, \mu', z) d\mu' + b_b^i(\mu, z); \\ f_{0b} &= b_t(\mu, z); \\ \frac{\partial E^0}{\partial z} - i\gamma E^0 &= 4\pi e \left\{ \int f_{0t} d^3v + \int f_{0b}^i d^3v + \int f_{0t} d^3v \right\}, \end{aligned} \quad (A3)$$

где

$$\begin{aligned} a_t &= a_b^i = \frac{\bar{\nu}_{ea}(v)}{i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)}; & b_t &= -\frac{eE^0(z)}{m[i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)]} \frac{\partial F_{0t}}{\partial v_z} \\ b_b^i &= -\frac{eE^0(z)}{m[i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)]} \frac{\partial F_{0b}^i}{\partial v_z}; \\ b_b &= -\frac{eE^0(z)}{m[i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v)]} \frac{\partial F_{0b}}{\partial v_z}; \end{aligned}$$

$\bar{\nu}_{ea}(v) = \nu_{ea}(v) [1 - \mu_0(v)]$; $\nu_{ea}(v)$ – частота упругих электрон-атомных столкновений; $\bar{\mu}_0(v)$ – средний косинус угла рассеяния упругих электрон-Не-атомных столкновений. Поскольку их частота $\bar{\nu}_{ea}$ слабо зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц, то зависимость эффективной частоты $\bar{\nu}_{ea}(v)$ от скорости v обусловлена только зависимостью от этой величины среднего косинуса угла рассеяния. Тогда в уравнениях для f_{0b}^i и f_{0b} необходимо, очевидно, положить $\bar{\nu}_{ea}(v) = \bar{\nu}_{ea}(v_0)$, а в уравнении для f_{0t} , $\bar{\nu}_{ea}(v) \approx \bar{\nu}_{ea}(v_T)$, где v_T – средняя скорость тепловых электронов плазмы. При этом в первом приближении можно считать, что $\bar{\mu}_0(v) = 0$ [10] и, следовательно, $\bar{\nu}_{ea}(v_T) = \bar{\nu}_{ea}$.

Поскольку мы рассматриваем условия, когда $\lambda_{ea} \sim d$, это позволяет искать решение для амплитуд возмущений ФРЭ и поля в виде рядов по степеням z , которые должны, до определенного уровня, быстро сходиться. Разлагая также в аналогичные ряды плотности $n_{0b}^i(z)$ и $n_{0t}(z)$, получаем:

$$\begin{aligned} f_{0t}(z) &= \sum_{n=0}^N f_{0t}^n z^n; \\ f_{0b}(z) &= \sum_{n=0}^N f_{0b}^n z^n; & f_{0b}^i(z) &= \sum_{n=0}^N f_{0b}^{in} z^n; \\ E^0(z) &= \sum_{n=0}^N E^{0n} z^n; & n_{0b}^i(z) &= \sum_{n=0}^N n_{0b}^{in} z^n; & n_{0t}(z) &= \sum_{n=0}^N n_{0t}^n z^n. \end{aligned} \quad (A4)$$

Подставляя (A4) и (3) в (A3) и приравнявая коэффициенты при тех же степенях z к нулю, получим для коэффициентов при $n = j \leq (N-1)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} f_{0t}^j + \frac{v_z(j+1)f_{0t}^{j+1}}{i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_t)} &= \frac{a_t(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0t}^j(v, \mu', z) d\mu' + b_t^j(\mu); \\ f_{0b}^{ij} + \frac{v_z(j+1)f_{0t}^{ij+1}}{i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_0)} &= \frac{a_b^i(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0t}^{ij}(v, \mu', z) d\mu' + b_b^{ij}(\mu); \\ f_{0b}^j &= b_b^j(\mu); \\ (j+1)E^{0j+1} - i\gamma E^{0j} &= 4\pi e \left\{ \int f_{0t}^j d^3v + \int f_{0b}^{ij} d^3v + \int f_{0b}^j d^3v \right\}. \end{aligned} \quad (A5)$$

Для $j = N$ имеем:

$$\begin{aligned} f_{0t}^N &= \frac{a_t(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0t}^N(v, \mu', z) d\mu' + b_t^N(\mu); \\ f_{0b}^{iN} &= \frac{a_b^i(v, \mu)}{2} \int_{-1}^1 f_{0b}^{iN}(v, \mu', z) d\mu' + b_b^{iN}(\mu); \\ f_{0b}^N &= b_b^N; \\ -i\gamma E^{0N} &= 4\pi e \left\{ \int f_{0t}^N d^3v + \int f_{0b}^{iN} d^3v + \int f_{0b}^N d^3v \right\}, \end{aligned} \quad (A6)$$

Кроме того, для любого $j \leq N$

$$\begin{aligned} b_t^j &= -\frac{e \frac{\partial F_{0t}}{\partial v_z}}{m [i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_t)]} \sum_{k=0}^j E^{0k} \frac{n_{0t}^{j-k}}{n_{0t}^0}; \\ b_b^{ij} &= -\frac{e \frac{\partial F_{0b}^i}{\partial v_z}}{m [i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_0)]} \sum_{k=0}^j E^{0k} \frac{n_{0b}^{ij-k}}{n_{0t}^0}; \\ b_b^j &= -\frac{e B_b^{ij}}{m [i(\omega - \gamma v_z) + \bar{\nu}_{ea}(v_0)]}; \\ B_b^{ij} &= \left(\frac{\partial F_{0b}}{\partial v_z} \right)_{z=0} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k \bar{\nu}_{ea}(v_0)^k}{k! v_0^k} E^{0j-k}. \end{aligned}$$

Таким образом, при расширении до z^N получается система из $l = 4 \cdot (N + 1)$ уравнений, из которых $l_t = 3 \cdot (N + 1)$ – кинетические уравнения Больцмана для коэффициентов расширения амплитуд возмущений ФРЭ, а $l_E = (N + 1)$ – уравнения Пуассона для коэффициентов расширения амплитуд возмущений электрического поля. Используя кинетические уравнения l_t , вычисляем правые части уравнений Пуассона l_E и получаем линейную однородную систему уравнений l_E для коэффициентов разложения l_E амплитуды возмущения электрического поля. Система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее матрицы равен нулю. Это условие является уравнением для нахождения скорости роста затухания (или усиления) возмущений в плазме.

Приложение В

Вычисление интеграла $I_t(\varepsilon)$

Вычислим выражение I_t , определяемое формулой (3). Учитывая, что

$$\frac{d}{dv_z} = \mu \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1 - \mu^2}{v} \frac{\partial}{\partial \mu},$$

мы можем переписать его как:

$$\begin{aligned} I_t(\varepsilon) &= i \frac{8\pi^2 e}{m\gamma v_0(1 + \varepsilon)} \int_0^\infty v^2 [I_1(v, \varepsilon) + I_2(v, \varepsilon)] dv; \\ I_1(v, \varepsilon) &= \int_{-1}^1 \frac{\mu \frac{\partial F_{0t}}{\partial v}}{\left[1 - \mu \frac{v}{v_0(1 + \varepsilon)}\right]} d\mu; \quad I_2(v, \varepsilon) = \frac{1}{v} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \mu^2)}{\left[1 - \mu \frac{v}{v_0(1 + \varepsilon)}\right]} \frac{\partial F_{0t}}{\partial \mu} d\mu, \end{aligned} \quad (B1)$$

где $\varepsilon = \frac{\omega - \gamma v_0 - i\bar{\nu}_{ea}(v_t)}{\gamma v_0}$.

Поскольку в нашем случае фазовая скорость возмущений имеет порядок v_0 , что в несколько раз больше средней тепловой скорости электронов в плазме v_t , затуханием Ландау можно пренебречь на частотах $\omega \sim \omega_D$ или меньше [22]. Действительно, в случае, например, максвелловской

ФРЭ в плазме, поправка на затухание Ландау для рассматриваемой системы электронный пучок-плазма имеет порядок $\exp[-\kappa_E^{-1}(1+\varepsilon)^2]$. Тогда интегралы $I_1(v, \varepsilon)$ и $I_2(v, \varepsilon)$ и могут быть вычислены в смысле главного значения (см., например, [24]).

Учитывая сказанное выше о затухании Ландау, рассмотрим величину $I_1(v, \varepsilon)$. Как показано в [7], справедливы неравенства $1 > \operatorname{Re}(\varepsilon) > -1$. Радиус сходимости ряда $(1-x)^{-1}$ равен 1, то есть $|x| < 1$ [25]. Тогда легко показать, что ряд

$$\frac{\mu}{\left[1 - \mu \frac{v}{v_0(1+\varepsilon)}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{v_0}\right)^n \frac{\mu^{n+1}}{(1+\varepsilon)^n}. \quad (\text{B2})$$

сходится к

$$\left| \frac{\mu}{(1+\varepsilon)} \frac{v}{v_0} \right| < 1,$$

или

$$\frac{v}{v_0} < \sqrt{[1 + \operatorname{Re}(\varepsilon)]^2 + [\operatorname{Im}(\varepsilon)]^2} \sim 1. \quad (\text{B3})$$

Мы рассматриваем ситуацию, когда $\frac{E_t}{E_0} \ll 1$, то есть $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{0.5} \approx \frac{v_t}{v_0} < 3$, где v_t средняя тепловая скорость электронов в плазме. Отсюда можно сделать вывод, что для, до определенного уровня, быстро убывающей ФРЭ ряд (B2) сходится для большинства электронов. Например, в случае максвелловского распределения со средней энергией E_t это выполняется для скоростей $v < 3v_t$ (почти 100% электронов).

Подставляя (B2) в выражения для $I_1(v, \varepsilon)$ и $I_2(v, \varepsilon)$ и интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} I_1(v, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^n \right] \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \int_{-1}^1 \mu^{n+1} F_{0t}(v, \mu) d\mu. \\ I_2(v, \varepsilon) &= \frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{v_0}\right)^n \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left[(n+2) \int_{-1}^1 \mu^{n+1} F_{0t}(v, \mu) d\mu - \right]. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

В случае плоского катода, когда электроны плазмы отражаются от катода в соответствии с законом зеркала зеркальному закону, то $F_{0t}(v, \mu)$ в месте расположения катода (где происходит первичная потеря устойчивости НВПР) является четной функцией μ . Тогда формулы (B4) изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(v, \varepsilon) &= - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{2j+1} \right] \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2j+1}} \int_{-1}^1 \mu^{2(j+1)} F_{0t}(v, \mu) d\mu. \\ I_2(v, \varepsilon) &= \frac{1}{v} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{2j+1} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2j+1}} \left\{ (2j+3) \int_{-1}^1 \mu^{2(j+1)} F_{0t}(v, \mu) d\mu \right. \\ &\quad \left. - (2j+1) \int_{-1}^1 \mu^{2j} F_{0t}(v, \mu) d\mu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Предположим, что ФРЭ плазмы можно представить в виде:

$$F_{0t}(v, \mu) = \frac{n_{0t}}{2\pi} \Phi_{0t}(v) M_{0t}(\mu), \quad (\text{B6})$$

$$\int_{-1}^1 M_{0t}(\mu) d\mu = \int_0^{\infty} v^2 \Phi_{0t}(v) dv = 1.$$

В этом случае, используя (B5), можно получить:

$$\int_0^\infty v^2 I_1(v, \varepsilon) dv = -\frac{1}{v_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1) \overline{\mu^{2j}}}{(1+\varepsilon)^{2j-1}} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1}; \quad (\text{B7})$$

$$\int_0^\infty v^2 I_2(v, \varepsilon) dv = \frac{1}{v_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1) \overline{\mu^{2j}}}{(1+\varepsilon)^{2j-1}} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{j-1} - \frac{1}{v_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1) \overline{\mu^{2j-2}}}{(1+\varepsilon)^{2j-1}} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1},$$

где $\overline{\mu^{2j}}$ и $\left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1}$ средние значения μ^{2j} и $\left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1}$, рассчитанные для ФРЭ плазмы $F_{0t}(v, \mu)$.

Отсюда из (B1) следует, что для $I_t(\varepsilon)$:

$$I_t(\varepsilon) = -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1) \overline{\mu^{2j-2}}}{(1+\varepsilon)^{2j}} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1}. \quad (\text{B8})$$

В случае, когда $F_{0t}(v, \mu)$ не является четным, с учетом (B4) удовлетворяется выражение

$$I_t(\varepsilon) = -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \overline{\mu^{n-1}}}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (\text{B9})$$

Для изотропной ФРЭ, когда $M_{0t}(\mu) = 0,5$, легко получить:

$$I_t(\varepsilon) = -i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2j}} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{j-1}. \quad (\text{B10})$$

Вычислим значение $\overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)^{k-1}}$ для максвелловской функции

$$F_{0t}^m(v, \mu) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_t}\right); \quad A = \left(\frac{m}{2\pi kT_t}\right)^{3/2}, \quad (\text{B11})$$

где T_t и k – температура электронов в плазме и постоянная Больцмана, соответственно.

Опуская промежуточные вычисления, получаем:

$$\overline{\left(\frac{E}{E_0}\right)^j} = \left(\frac{2}{3}\right)^j \frac{\Gamma(j+3/2)}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^j; \quad E_t = \frac{3}{2}kT_t, \quad (\text{B12})$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция аргумента x [25].

Используя известное выражение для $\Gamma(n + 1/2)$ (где n – целое положительное число), через n [25] в случае максвелловской ФРЭ в плазме, мы имеем формальное равенство

$$I_t(\varepsilon) = i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right); \quad a_j \left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right) = \frac{(2j-1)!!}{3^{j-1}(1+\varepsilon)^{2j}} \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{j-1}. \quad (\text{B13})$$

Следует отметить, что, строго говоря, этот ряд расходится при любом значении параметра $\frac{E_t}{E_0}$ и $|\varepsilon| > 1$. Действительно, используя формулу Стирлинга для величины $j!$ при $j \rightarrow \infty$ и отмечая, что

$$(2j-1)!! = \frac{(2j-1)!}{2^{j-1} \cdot (j-1)!},$$

получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[(2j-1)!! \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^{j-1} \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\text{const} \left(\frac{2}{3e} \frac{E_t}{E_0} j\right)^j \right] = \infty$$

для любых, произвольно малых значений $\frac{E_t}{E_0}$. Однако можно показать, что ряд (B13) для $\frac{E_t}{E_0} \ll 1$ является асимптотическим разложением для величины $I_t(\varepsilon)$ и, следовательно, описывает ее достаточно

точно. Действительно, согласно определению, асимптотический ряд функции $f(x)$ – это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ если выполняется [25]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n(x) + o(b_N(x)); b_{n+1}(x) = o(b_n(x)), \quad (\text{B14})$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{o(x)}{x} = 0$.

Легко показать, что оба эти соотношения справедливы для

$$x = \frac{E_t}{E_0}; \quad f\left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right) = I_t(\varepsilon); \quad b_n\left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right) = i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} a_n\left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right).$$

Таким образом, для максвелловской ФРЭ можно записать:

$$I_t(\varepsilon) \cong i \frac{\omega_D}{\gamma v_0^2} \sum_{j=1}^{N_E} a_j\left(\frac{E_t}{E_0}, \varepsilon\right), \quad (\text{B15})$$

где $N_E > 0$ – некоторое целое число.

Точность формулы (B15) зависит от числа N_E , которое, в свою очередь, определяется параметром $\frac{E_t}{E_0}$. Более подробно этот факт обсуждается в основной части текста.

Физическая причина расходимости ряда (B13) заключается в том, что, строго говоря, для произвольно малого параметра $\frac{E_t}{E_0}$ в плазме существуют электроны со скоростями, для которых условие сходимости (B3) не выполняется. Однако, когда выполняется неравенство $\frac{E_t}{E_0} \ll 1$, число этих электронов пренебрежимо мало. Количественным выражением этого факта является существование асимптотического ряда (B15) для выражения $I_t(\varepsilon)$.

Совершенно очевидно, что для любой другой физически обоснованной ФРЭ плазмы (а не только для максвелловской) существуют асимптотические ряды типа (B15). Понятно, что чем быстрее ФРЭ спадает в области больших скоростей, тем шире область применимости этих рядов, которые могут быть получены по описанному выше алгоритму. Следует также иметь в виду, что при расчетах необходимо отдельно исследовать точность аппроксимации функции $I_t(\varepsilon)$ такими рядами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Akhiezer A. and Feineberg Y. 1949 *DAN* 64 555
2. Bohm D. and Gross E.P. 1949 *Phys. Rev.* 75 1851 <https://doi.org/10.1103/physrev.75.1851>
3. Ivanov I. 1977 *Physics of Highly Unbalanced Plasma* (Moscow: Atomizdat) p 352
4. Briggs R.J. 1971 *Advances in Plasma Physics* ed A Simon and WB Thompson vol 4 (New York: Interscience) p 43
5. Krall N. and Trivelpiece A. 1973 *Principles of Plasma Physics* (New York: McGraw-Hill) p 674
6. Mikhaylovskii A. 1975 *Theory of Plasma Instabilities* vol 1 (Moscow: Atomizdat) p 272
7. Sukhomlinov V., Matveev J., Mustafaev A. and Timofeev N. 2020 *Phys. Plasmas* 27 062106 <https://doi.org/10.1063/5.0001822>
8. Sukhomlinov V., Matveev J., Mustafaev A., Timofeev N. and Solihov D.Q. 2020 *Phys. Plasmas* 27 083504 <https://doi.org/10.1063/5.0011584>
9. Sukhomlinov V.S., Matveev R.J., Mustafaev A.S., Pavlov V.A. and Gordeev S.V. 2021 *Tech. Phys.* 66 561
10. Adibzadeh Mand Theodosiou C.E. 2005 *At. Data Nucl. Data Tables* 91 8 <https://doi.org/10.1016/j.adt.2005.07.004>
11. Fon W.C., Berrington K.A. and Hibbert A. 1981 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* 14 307 <https://doi.org/10.1088/0022-3700/14/2/014>
12. McDaniel EW 1967 *Collision Phenomena in Ionized Gases* (New York: Wiley) p 832
13. Raizer P. 1991 *Gas Discharge Physics* (Berlin: Springer) p 536
14. Baksht F.G., Lapshin V.F. and Mustafaev A.S. 1995 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 28 694 <https://doi.org/10.1088/0022-3727/28/4/012>
15. Sydorenko D., Kaganovich I., Ventzek P. and Chen L. 2016 *Phys. Plasmas* 23 122119 <https://doi.org/10.1063/1.4972543>
16. Self S.A., Shoucri M.M. and Crawford F.W. 1971 *J. Appl. Phys.* 42 704 <https://doi.org/10.1063/1.1660084>
17. Drummond W.E. 1964 *Phys. Fluids* 7 816 <https://doi.org/10.1063/1.1711291>
18. Gerasimov N.A., Kanygin A.V. and Soukhomlinov V.S. 2012 *Tech. Phys.* 57 88 <https://doi.org/10.1134/s1063784212010100>
19. Singhaus H.E. 1964 *Phys. Fluids* 7 1534 <https://doi.org/10.1063/1.1711408>
20. Akhiezer A. and Feineberg Y. 1951 *Usp. Fiz. Nauk.* 44 321 <https://doi.org/10.3367/ufnr.0044.195107a.0321>
21. Mustafaev A. 2001 *Tech. Phys.* 46 472 <https://doi.org/10.1134/1.1365475>

22. Artsimovich L.A. and Sagdeev R.Z. 1979 *Plasma Physics for Physicists* (Moscow: Atomizdat) p 313
23. Dolling G., Enkrich C., Wegener M., Soukoulis C. and Linden S. 2006 *Science* 312 892 <https://doi.org/10.1126/science.1126021>
24. Chen F. 2016 *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion (Plasma Physics vol 1)* 3rd edn (Berlin: Springer) p 497
25. Korn G.A. and Korn T.M. 1968 *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill) p 832
26. Pramanik S. and Ghosh S. 2019 *Phys. Plasma* 26 113503 <https://doi.org/10.1063/1.5124900>
27. Pramanik S., Kuznetsov V.I., Bakaleinikov L.A. and Chakrabarti N. 2016 *Phys. Plasmas* 23 082110 <https://doi.org/10.1063/1.4960679>