

УДК 55:51

С.С.ШАКИН

ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ГЕОЛОГИИ

Дается описание детерминированных, случайных и случайно-детерминированных фрактальных математических моделей. Приводятся примеры геологических объектов и процессов, которые могут быть описаны такими моделями. Указываются способы замеров фрактальных параметров.

Фрактальная геометрия – раздел геометрии, изучающий свойства особых геометрических объектов – фракталов. Термин "фрактал" сравнительно поздний, он введен в конце 70-х годов Б.Мандельбротом, однако изучение объектов, названных позднее фракталами, началось, по меньшей мере, на 100 лет ранее. В начальный период фракталы рассматривались как некоторые математические "монстры", используемые в математических доказательствах и не имеющие отношения к естественно-научным исследованиям. Однако после выхода работы Б.Мандельброта [9] ситуация резко изменилась, поскольку выяснилось, что геометрия чуть ли не каждого природного объекта допускает, кроме описания традиционными геометрическими понятиями (плоскость, линия, фигура), еще и описание фракталами. Работа породила лавинообразный процесс исследований по описанию природных объектов фрактальными моделями.

Строгого определения фрактала сейчас нет, и, кроме того, для широкого круга естествоиспытателей оно было бы бесполезным из-за своей сложности и абстрактности. В данной статье принят другой путь: вначале знакомство с классическими фрактальными объектами, а затем описание теста, с помощью которого можно отличить фрактал от нефрактала.

Первый классический фрактальный объект – кривая Кох (рис.1,а). Она строится бесконечным количеством шагов, причем на первом шаге отрезок прямой делится на три равные части и центральная часть заменяется двумя равными боковыми в виде сторон угла. На втором шаге эта операция производится над каждой прямолинейной секцией и так далее до бесконечности. Полученная кривая обладает совершенно удивительными свойствами. Имея начало и конец, она, тем не менее, обладает бесконечной длиной. Кроме того, ни в одной точке она не имеет производной, так как при бесконечном продолжении процесс каждая ее точка в какой-то момент становится угловой, а в точке углового соединения прямых производной не существует. Рассматривая эту кривую в какой-то угодно сильный "микроскоп" и меняя увеличение, мы всегда будем видеть одну и ту же линию, т.е. кривая инвариантна относительно масштаба. Последнее свойство называется с а м о п о д о б и е м и является основным

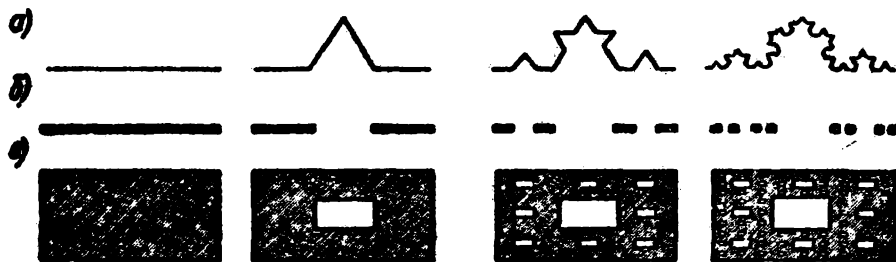


Рис.1. Первые четыре шага построения классических фракталов: а - кривая Коха; б - множество Кантора; в - ковер Серпинского

свойством классических самоподобных фракталов. Если измерять длину этой кривой линейкой с делениями конечной длины, то она будет "чувствовать" только излом определенного размера, и общая длина линии будет конечна, но зависела от цены деления линейки.

Длина измеренной кривой пропорциональна величине δ^{1-D} (где δ - цена деления линейки; D - отношение логарифмов длин конечной и начальной сторон ша, $D = \ln 4 / \ln 3$). Величина D называется фрактальной размерностью. Фрактальная размерность не зависит от масштаба измерения, что и является тестом на фрактал. Фрактальная размерность для фракталов является дробным числом и выражает степень "толщины" линии. Само понятие фрактальной размерности связано с геометрическим понятием размерности, которая для точки равна нулю, для кривой (прямой) - единице, для плоскости - двойке и так далее. Интуитивно понятно, почему фрактальная размерность является дробной: кривая так извивается, что заполняет часть плоскости, т.е. уже не может рассматриваться как линия без толщины. Поэтому ее размерность промежуточная, между размерностью плоскости и кривой, т.е. между единицей и двойкой.

Вторым классическим объектом является множество Кантора (рис.1,б). Восьмью отрезком, разделим его на три части и среднюю часть выбросим. Аналогично поступим с каждой из полученных частей и так далее до бесконечности. Ясно, что вид множества будет зависеть от цены деления линейки, которым оно измеряется: какого размера "дырки" линейка "чувствует". Наличие самоподобия здесь также очевидно: отношение суммарной длины отрезков будет постоянно в силу постоянства коэффициента деления и выбрасывания. Фрактальная размерность будет составлять масштаб подобия $\ln 2 / \ln 3$. Она находится между нулем и единицей, т.е. полученное множество можно воспринимать или как плотно расположенные точки, или как очень "дырявую" прямую.

Классическим двумерным фрактальным объектом является ковер Серпинского (рис.1,в). Берет я прямоугольник, делится на девять равных частей, после чего из него выбрасывается центральная часть, составляющая $1/9$ площади. Далее из каждого из оставшихся восьми прямоугольников снова выбрасывается центральная часть ($1/9$ площади) и так далее. Картина очевидно самоподобна,

фрактальная размерность итогового множества равна $\ln \delta / \ln 3$ и является постоянной для всех масштабов в силу единого способа деления и выбрасывания. Одновременно рис.1, в положительно отвечает на обычный вопрос геологов: может ли самоподобное множество иметь анизотропию?

Рассмотренные фракталы являются детерминированными, в них преобразование для получения следующего шага определено однозначно. Однако ничто не мешает ввести в это преобразование элемент случайности. Так, в кривой Кох не обязательно надстраивать центральную секцию, это можно сделать с любой секцией, случайно выбираемой на каждом шаге из трех; в множестве Кантора, в ковре Серпинского можно выбрасывать случайно выбираемый на каждом шаге элемент. Получаются несимметричные объекты, похожие на природные [6,9], в которых, однако, сохраняется значение фрактальной размерности. Фракталы, в построение которых вводятся случайные операции, называются случайными.

У самоподобных фракталов есть еще одно ценное с точки зрения геолога свойство: основной характеристический параметр - фрактальная размерность сечения фрактала - может быть вычислена чрезвычайно просто: вычитанием целых чисел из фрактальной размерности первичного фрактала. Например, сечением трехмерного самоподобного фрактала плоскостью является фрактал с размерностью на единицу меньшей, прямой - на две единицы меньшей.

Геолог в силу специфики своей деятельности не столько конструирует необходимые модели, сколько оценивает степень соответствия имеющихся моделей реальным объектам. В этом смысле тестом на применимость модели самоподобного фрактала является наличие постоянных отношений между элементами изучаемого образования на разных масштабных уровнях с постоянным коэффициентом перехода между ними. Традиционно этот тест формулируется как пропорциональная зависимость между логарифмом количества n -мерных кубов со стороной δ , покрывающих n -мерный фрактал, и размером стороны δ . Естественно, нельзя считать, что природный объект при увеличении или уменьшении имеет бесконечное самоподобие, такая реальность была бы весьма скучна. Поэтому применяя модель самоподобного фрактала, мы оцениваем на соответствие модели некоторый интервал масштабов и определяем фрактальную размерность множества, которое получилось бы, если бы закон самоподобия был применен бесконечно. Какой именно интервал масштабов изучать на конкретном объекте - каждый исследователь решает сам, исходя из характера объекта.

Тест на самоподобие имеет нюансы при применении к множествам разного типа. Для кривых наиболее распространенным способом оценки размерности является измерение некоторой постоянной единицей (раствором ширкуля) длины между двумя точками. В случае самоподобия кривой имеет место формула

$$L(\delta) = K\delta^{(1-D)}, \quad (1)$$

где $L(\delta)$ - измеренная длина; K - коэффициент пропорциональности; δ - единица длины; D - фрактальная размерность (рис.2,а).

Часто применяют другой способ замера размерности кривой или сетки кривых (например, сетки разломов в [4]). Фигуру "мостят" сферами радиуса δ

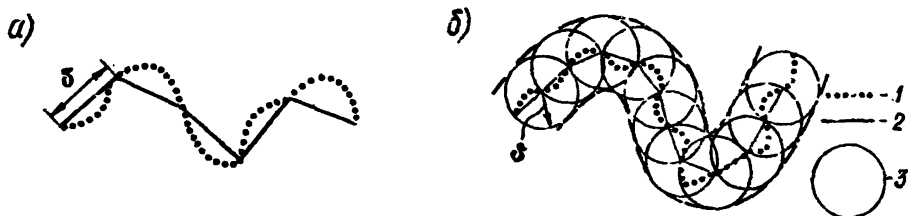


Рис.2. Методы измерения фрактальной размерности линий: кривой (1), ломаной (2), огибающей окружности (3)

(рис.2,б) и либо опять формируют ломаную и измеряют ее длину, либо строят огибающую сфер, измеряют площадь полосы, делят на 2δ и опять получают длину, входящую в формулу (1). Обычно соответствие реального объекта формуле (1) проверяют по графику зависимости $\log(L(\delta))$ от $\log(\delta)$, на котором точки для разных δ должны лечь на прямую (можно использовать логарифмы по любому основанию, но одинаковому для обеих осей). В геологических работах замеряемыми кривыми могут быть изображения границ слоев на разрезах складчатых толщ [1], контакт интрузива, извилистая трещина и т.п.

Вторым распространенным способом замер размерности является так называемая "клеточная размерность", когда фигуру, предназначенную для измерения (например, зарисовку стенки штрека с трещинами в [7]) делят на клетки со стороной r . Тогда, если ввести $b = 1/r$ и $N(b)$ - число клеток решетки, в которых имеется исследуемый объект (в [7] - наблюдаемая трещина), то в случае модели самоподобного фрактала указанные величины должны подчиняться зависимости $N(b) = Kb^D$

Если определено отношение периметра плоской фигуры к ее площади и оба элемента измерены одинаковой единицей (последнее обязательно), то можно рассчитать размерность по формуле [5]

$$F = KU^{2/(D-1)}, \quad (2)$$

где F - площадь фигуры; U - ее периметр.

Этот способ удобен, в частности, для исследования фрактальности формы зерен в шлифах.

Точечный фрактал - множество, состоящее из бесконечного числа точек в многомерном пространстве. Классическим точечным фракталом является множество Кантора, где после бесконечного числа выкидываний отрезков остается бесконечное количество точек. Такие фракталы могут встретиться в геологических науках, например, при изучении минерального агрегата, если распределение зерен в породе описывать их центрами. Характерная черта точечного фрактала - увеличение количества точек при увеличении масштаба рассмотрения. Если в рассмотрении участвуют малые расстояния r , то можно различить больше точек, чем при больших r . Когда фрактал рассматривается в более "сильный микроскоп", то точки как бы "разлипаются" и там, где была видна одна точка,

становятся видимыми несколько. Это похоже на наблюдение порфировой породы при разных увеличениях. Для оценки фрактальной размерности точечного фрактала пользуются этим эффектом, оценивая количество "видимых" точек при разных значениях r . Для этого обычно используют точечную размерность, численно [2]

$$B_i(r) = Kr^D / (N - 1), \quad (3)$$

где $B_i(r)$ - объем (или площадь) шара (или круга) радиуса r с центром в точке i ; N - общее число точек.

Подсчитав $B_i(r)$ по всем точкам множества, усреднив его флуктуации от точки к точке, произведя измерения при разных r и для разных масштабных уровней, строят график $\lg B(r)$ от $\lg(r)$ и по наклону графика определяют фрактальную размерность.

Сложные проблемы возникают при замере фрактальной размерности геохимического поля. Трехмерное геохимическое поле содержаний одного элемента представляет собой четырехмерный точечный фрактал, в котором проба изображается на четвертой координатной оси содержаний точкой, удаленной от предыдущей точки на расстояние, равное содержанию в пробе. Наблюдаемый фрактал является выборкой из полного фрактала. Если общее поле представляет собой статистическое подобие совокупности проб, т.е. при бесконечном увеличении числа проб параметры их гистограммы не меняются, то фрактальную размерность поля можно оценить как "лагуарную" [5] размерность содержаний по наклону графика накопленных частностей - накопленной гистограмме в билогарифмическом масштабе по формуле

$$(N > C) = KC^D, \quad (4)$$

где $(N > C)$ - число проб с содержанием более C .

Однако этот метод груб и может быть чреват ошибками, так как не учитывает распределение проб в пространстве. Поэтому на практике применяется другой метод [3]: рассчитывается разность содержаний

$$V(\delta) = C(x + \delta) - C(x),$$

где δ - расстояние между пробами; $C(x)$ - содержание в пробе в точке профиля с расстоянием x от начала координат; $C(x + \delta)$ - содержание в пробе, отстоящей от данной на расстояние δ .

Далее по формуле

$$(V(\delta))^2 = K |\delta|^{4-2D} \quad (5)$$

рассчитывается фрактальная размерность D по замерам для разных δ , разных проб и осреднения результатов. Кроме того, разработаны методы, использующие преобразование Фурье [10] и различные способы осреднения [8].

Кроме самоподобных фрактальных моделей существуют также самоаффинные фрактальные модели и модели мультифракталов. В модели самоаффинного фрактала есть фрактальная анизотропия, когда фрактальная размерность по разным направлениям различна. Это приводит к разной геологической анизотропии на

разных масштабных уровнях. В модели мультифрактала исследуемое множество объединяет несколько фракталов, каждый из которых имеет свою фрактальную размерность. Размерности фракталов в этой модели связаны по определенному закону. Подробно с моделями самоподобных фракталов и мультифракталов можно ознакомиться по монографии [3]. В геологии эти модели пока практически не применяются, кроме случаев исследования сейсмических рядов и структуры порового пространства коллекторов нефти.

Перспективность использования фрактальных моделей в геологических исследованиях основывается на соответствии аппарата самоподобных фракталов основной задаче практической геологии. Эта задача в общей постановке сводится к восстановлению строения более крупного объекта (месторождения) по более мелким объектам (пробам) либо, наоборот, строение более мелкого объекта (месторождения) реконструируется по изображению крупного (аэрофотоснимок). Важное значение имеет простота способа перехода от объекта к его сечению, так как в геологии объект всегда изучается в сечении (горная выработка, скважина, земная поверхность). Важна также возможность измерить единым показателем распределение компонентов в пробах, структуру и текстуру горных пород, форму геологических тел. Единый способ описания поможет установить новые виды связей между морфологией геологических тел, их структурой, с одной стороны, и химическим составом, с другой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кулик Д.А., Черновский М.И. Фрактальная модель многопорядковой складчатости железистых кварцитов // Изв. вузов. Геология и разведка. 1990. № 5. С. 77-85.
2. Мухамедов В.А. Вероятностные аспекты фрактального анализа сейсмических рядов - корреляционный интеграл и устойчивые распределения // Изв. АН СССР. Физ.-техн., хим. и геол. науки. 1990. № 4. С. 27-32.
3. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
4. Фрактальность тектонических нарушений осевой зоны Восточно-Тихоокеанского поднятия в связи с глубоководными сульфидами / И.Н.Горяинов, И.С.Грамберг и др. // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 446-449.
5. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 610 с.
6. Barnsley M.F., Demco R.L. et al. The science of fractal images. New York: Springer, 1986. 312 p.
7. Childs J.P. Fractal and geostatistical method for modeling of fracture networks. // Mathematical geology. 1988. V.20. No. 6. P. 631-654.
8. Jones J.G., Gosses R.W. et al. Fractal properties of computer-generated and natural geophysical data // Computer and geosciences. V.15. No. 2. 1989. P. 227-236.
9. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco, 1982. 460 p.
10. Wong P., Lin J. Studying fractal geometry on submicron length scales by small angle scattering // Mathematical geology. 1988. V.20. No. 6. P. 655-666.