Записки Санкт-Петербургского горного института им.Г.В.Плеханова.
Т. 138. СПб, 1993

УДК 621.758.1

А.П.БАТАЛОВ

МЕТОД РАСЧЕТА ВЕКТОРНЫХ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

Погрешности изготовления деталей и сборки узлов: отклонения от соосности цилиндрических и конических поверхностей, отклонения от перпендикулярности торцев, произвольное, случайное распределение зазора в сопряжении и связанное с ним смещение детали и другие подобные,- характеризуются не только величиной, но и направлением. Эти погрешности входят в размерные цепи как векторные, и их расчет имеет некоторую специфику. Рассмотрим сборку втулки 1 с корпусом 2 (рис.1). По поверхностям D детали соединены с гарантированным натягом. По условиям работы узла требуется ограничить допуск соосности T_Δ, который зависит от допусков соосности втулки T_A и корпуса T_B. При предельном суммировании погрешностей (метод максимума-минимума) задача решается довольно просто: смещения осей в расчете принимаются предельными (максимальными по величине) и совпадающими по направлению, т.е. их сумму $T_\Delta = T_A + T_B$ получают как в скалярных размерных линейных цепях. Минимальное значение суммарного сборочного отклонения от соосности будет равно нулю, так как отклонения от соосности отверстия втулки и отверстия корпуса при противоположных направлениях полностью компенсируют друг друга, если эти размеры по величине случайны и могут быть равны нулю.

Исследования А.С.Шевелева [5] показывают, что при изготовлении цилиндрических поверхностей отклонение от соосности $\bar{\Delta}$ может иметь систематическую составляющую $\bar{a}$, постоянную по величине и случайную по нап-

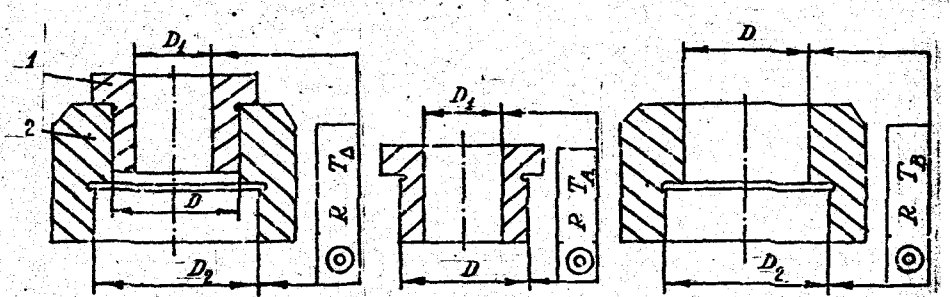


Рис 1. Сборка втулки с корпусом

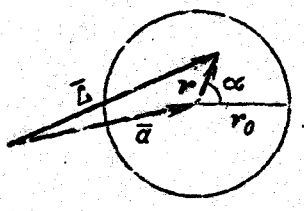


Рис.2. Вектор отклонения от соосности $\bar{L}$ как векторная сумма систематической ($\bar{a}$) и случайной ($\bar{r}$) составляющих

равлению, и случайную $\bar{r}$ со случайными величиной и направлением (рис.2). Величина r_0 определяет радиус зоны рассеивания случайной величины $\bar{r}$ с центром группирования a_i. Соотношения между модулями a и r_0 могут быть различными: $a > r_0$; $a < r_0$; $a = r_0$.

Предположим, что $a = 0$, тогда распределение $\bar{r} = \bar{\Delta}$ центральное, симметричное, независимое от направления вектора. Если считать его также нормальным, то $X \in N(x;0;\sigma)$; $Y \in N(y;0;\sigma)$ [1], а плотность вектора (X,Y) по величине и направлению

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right]}, \qquad (1)$$

где x и y – проекции $\bar{r}$ на координатные оси.

Уравнение (1) с переходом к полярным координатам соответствует плотности распределения вектора на плоскости по закону распределения Рэлея:

$$\Phi(r_0) = \int_0^{r_0} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{r_0} = 1 - e^{-r_0^2/2\sigma^2} = P(x < r_0) = 1 - R_v, \qquad (2)$$

где R_v – риск получить $x > r_0$.

Из функции (2) получим $R_v = e^{-r_0^2/2\sigma^2}$; $\ln R_v = -r_0^2/2\sigma^2$.

Введя обозначения $r_0 = T_\Delta$; $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2 = \Sigma\left(\frac{1}{3}T_i\right)^2$, установим функциональную связь при вероятностном суммировании случайных векторов T_i, т.е. суммы T_i^2 с величиной замыкающего звена T_Δ:

$$T_\Delta^2 = -\frac{2}{9} T_\Sigma^2 \ln R_v \cong -0{,}222 \Sigma T_i^2 \ln R_v . \qquad (3)$$

Предположим, что в примере (см. рис.1) заданы следующие значения допусков: T_A = 0,03 мм; T_B = 0,02 мм. По методу максимума–минимума T_Δ = = 0,05 мм. При расчете по формуле (3), принимая риск получения брака при сборке равным 0,0027 и 0,01, получим соответственно T_Δ = 0,041 мм и T_Δ = 0,037 мм, что на 20-25 % меньше допуска замыкающего звена, полученного методом максимума–минимума. При трех и более векторных звеньях выгода такого метода расчета становится еще очевиднее.

Суммирование систематических векторных отклонений вызывает большие затруднения. При обычном сложении векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ мы используем теорему косинусов для определения величины суммарного вектора (рис.3):

$$a_{\Delta 1}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\alpha_1 . \qquad (4)$$

Необходимо учитывать, что угол α_1 равновероятен в интервале от 0 до 2π. При последовательном многократном суммировании $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ со случайной величиной углов α_i, полученных от генератора случайных чисел ЭВМ

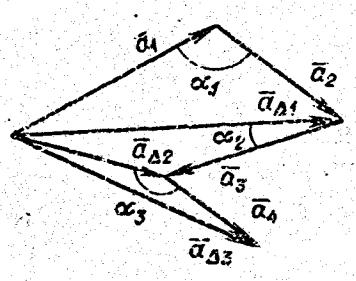


Рис.3. Геометрическое суммирование векторов

"NEC" (всего 80 тысяч значений), т.е. используя метод Монте-Карло, было выведено приближенное уравнение для суммы трех и более систематических векторных отклонений:

$$a_\Delta^2 = \frac{(\Sigma a_i)^2}{(n+1)(4-\pi)} \cdot (-\ln R_v) \cong \frac{1{,}16 \cdot (\Sigma a_i)^2}{n+1} (-\ln R_v),$$

где n – число отклонений.

Вектор a_Δ является случайным уже не только по направлению, но и по величине, поэтому при сложении с другими случайными векторами общий результат

$$r_\Sigma^2 \cong -0{,}222 \left(\Sigma r_i^2 + \frac{1{,}16 \cdot (\Sigma a_i)^2}{n+1} \ln R_v\right). \qquad (5)$$

Если суммируются только два вектора, постоянных по величине и случайных по направлению, то более точный расчет модуля скалярной суммы будет получен модификацией формулы (4):

$$a_\Delta^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot \cos\left[\pi(1-R_v)\right].$$

Расчет модуля суммарного вектора одной систематической и одной случайной составляющей здесь не рассматривается, так как это подробно описано в работе [5].

Рассмотрим более сложный пример расчета возможных пределов изменения рабочего зазора между ротором и статором в электрической машине (рис.4). Если рабочие поверхности статора и ротора номинально соосны, то величина зазора постоянна по всему периметру и определяется сочетанием диаметров ротора и статора. Из-за наличия неизбежных погрешностей изготовления и сборки деталей машины в целом (отклонения соосности вала, ротора, статора, корпуса, подшипниковых щитов, зазоров в некоторых соединениях, погрешностей формы поверхностей деталей и пр.) зазор становится неодинаковым по периметру при неподвижном роторе, а при его вращении еще дополнительно изменяется за счет биения поверхности ротора в эксцентричном отверстии статора. Пренебрежем отклонениями формы поверхностей и зазорами в некоторых соединениях (считая их беззазорными), а также радиальными биениями подшипников из-за разностенности колец и погрешностей изготовления тел качения подшипников. Для того, чтобы изобразить размерную цепь, куда входят и векторные звенья, введем для них условные обозначения, одноименные со скалярными составляющими этой цепи, но с индексом v для случайных векторных составляющих и индексом s – для систематических. Следует отметить, что фактическая величина (радиус) зоны рассеивания случайной составляющей может интерпретироваться как радиальный допуск T_{vi}; номинальное значение такого звена цепи всегда равно нулю. Характер систе-

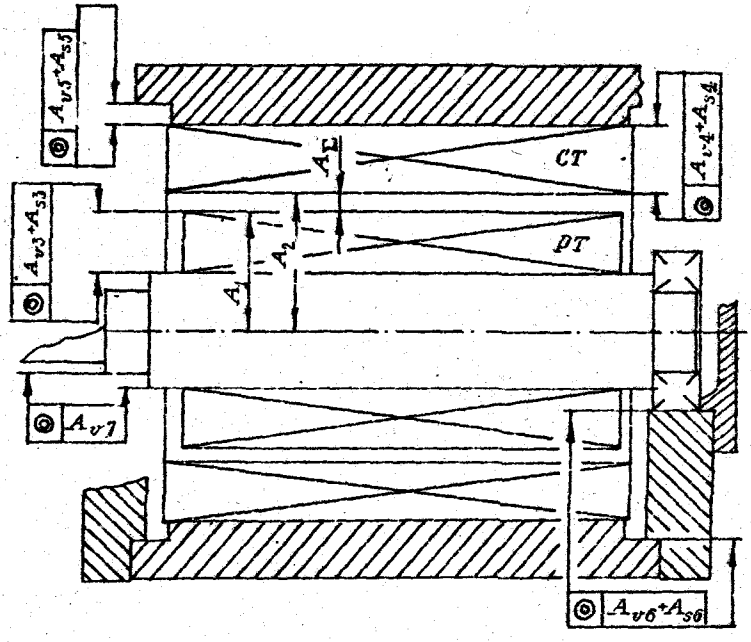


Рис.4. Расчетная схема сборки электромашины

матической составляющей - иной: она имеет номинальный размер и не имеет допуска.

В примере (рис.4) в качестве составных примем векторы, определяющие соосность посадочных и рабочих поверхностей стали ротора (A_{v3}, A_{s3}), статора (A_{v4}, A_{s4}), соосность посадочных поверхностей корпуса под сталь статора и подшипниковые щиты (A_{v5}, A_{s5}), соосность посадочных поверхностей в корпус и под подшипники в щитах (A_{v6}, A_{s6}). В качестве простого вектора, имеющего только случайную составляющую, примем соосность посадочных поверхностей вала ротора A_{v7}. Учитываем также в качестве простых векторов зазоры в соединениях подшипниковых щитов и корпуса (A_{v8}), наружных колец подшипников и расточек отверстий для посадки подшипников в щиты (A_{v9}). Предположим, что все простые векторы имеют нормальное распределение по величине и все векторы равновероятно распределены по направлению. Сборку деталей производят без их подгонки и выверки положения, т.е. векторы суммируются со случайными углами их относительного положения. Суммарный (замыкающий) вектор T_Δ соответствует отклонению соосности рабочих поверхностей ротора и статора после сборки всех узлов машины.

Скалярных составляющих звеньев цепи всего два: радиусы рабочих поверхностей ротора ($A_1 = 150_{-0,1}$) и статора ($A_2 = 151^{+0,2}$ мм). Остальные исходные данные для расчета размерной цепи примем также в радиальном выражении: $A_{v3} = A_{v4} = 20$ мкм; $A_{v5} = A_{v6} = 30$ мкм; $A_{v7} = 10$ мкм; $A_{v8} = 40$ мкм;

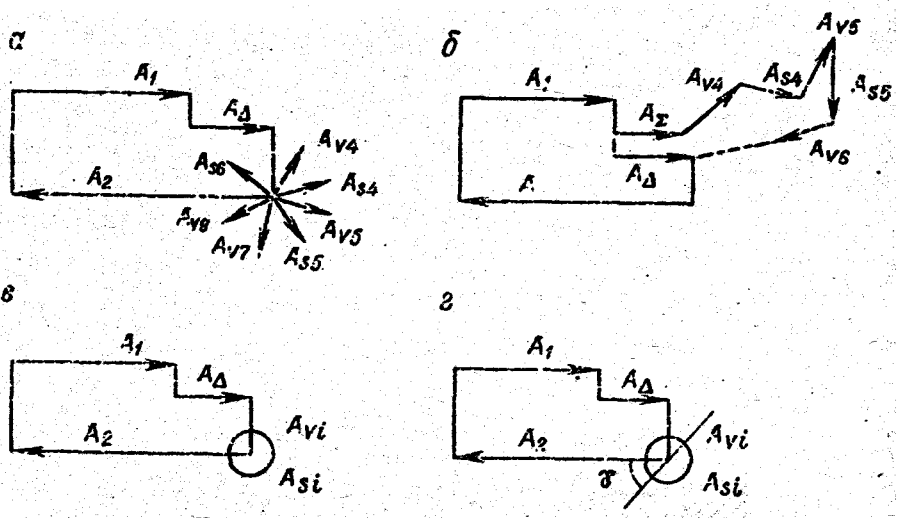


Рис.5. Условные размерные схемы с векторными и скалярными звеньями

$A_{v9} = 20$ мкм; $A_{s3} = 5$ мкм; $A_{s4} = A_{s5} = A_{s6} = 10$ мкм. Уровень риска $R_v = 0{,}01$, а соответствующий ему коэффициент риска $t = 2{,}56$.

Принятые в технической литературе способы изображения векторов комбинированных размерных цепей (рис.5) не всегда удачны.

Наглядность изображения векторной части размерной цепи, например, на схемах (рис.5,а и б) весьма спорна.

Комбинированные размерные цепи включают в себя скалярные и векторные звенья. В цепях I типа замыкающий вектор совпадает по направлению (параллелен) со скалярным замыкающим размером, в цепях II типа векторный и скалярный замыкающие размеры располагаются под углом γ друг к другу. На предполагаемых вариантах схем комбинированной размерной цепи типа I (рис.5,в), II (рис.5,г) кружок указывает на наличие в цепи векторных звеньев. Эти варианты не выигрывают в наглядности, но проще в оформлении.

По методу максимума-минимума для вычисления допуска замыкающего звена – радиального зазора – складываются допуски всех составляющих звеньев ($T_i, A_{vi} = T_{vi}$) и систематические векторные составляющие A_{si}:

$$T_\Delta = \Sigma T_i = T_1 + T_2 + \sum_{i=3}^{9} T_{vi} + \sum_{i=3}^{6} A_{si} = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 40 + 5 + 100 + 200 = 505,$$

где T_1 и T_2 – радиальные допуски скалярных звеньев, $T_1 = 100$ мкм, $T_2 = 200$ мкм.

По формуле (5) векторная часть допуска зазора при $A_{vi} = T_{vi}$ и $a_i = A_{si}$

$$T_\Sigma^2 = -0{,}222 \left[\sum_{i=3}^{9} T_{vi}^2 + \frac{1{,}16 \left(\sum_{i=3}^{6} A_{si} \right)^2}{4+1} \right] \ln R_v = 5100; \; T_\Sigma = 71{,}5.$$

Общий допуск T_Δ на радиальный зазор включает в себя допуски скалярных звеньев $A_1(T_1), A_2(T_2)$ и векторных – T_Σ; рассчитываем его по известной формуле вероятностного суммирования допусков [2]

$$T_\Delta = 0{,}33 \cdot t\sqrt{\Sigma T_i^2} = 0{,}33 \cdot 2{,}56\sqrt{100^2 + 200^2 + 71{,}5^2} \approx 200 \text{ мкм}.$$

Итак, ожидаемые колебания рабочего зазора в электромашине при расчете по предлагаемой методике в 2,5 раза меньше, чем при расчете по методу максимума–минимума. Если принять уровень риска $R_y = 0{,}0027$ ($t = 3$), то общий допуск $T_\Delta = 238$ мкм. Расчетный зазор равен $1 \pm 0{,}5$ мм по методу максимума–минимума, $1 \pm 0{,}2$ и $1 \pm 0{,}24$ мм по вероятностному методу и при допускаемом уровне сборочного брака 1 и 0,27 % соответственно.

Методики вероятностного расчета векторных размерных цепей, предложенные ранее [3–5], намного более трудоемки, широкой экспериментальной проверки их не проводилось и их можно рассматривать как равноправные математические гипотезы. Предлагаемый метод прост и позволяет проводить оценку допусков для проектных решений, что трудно сделать при использовании методик других авторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 720 с.

2. Дунин-Барковский И.В. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения. М.: Машиностроение, 1976. 551 с.

3. Методические указания. Цепи размерные. Основные понятия, методы расчета. РД-50-426-83 / ВНИИНМаш. М., 1986. 45 с.

4. Уразаев З.Ф. Теоретико-вероятностное суммирование допусков на векторные погрешности // Взаимозаменяемость и технические измерения в машиностроении / Ред. К.И.Абаджи и Б.П.Тимофеев. Л.: Машиностроение, 1972. С. 28–32.

5. Шевелев А.С. Теоретико-вероятностный метод расчета векторных размерных цепей // Взаимозаменяемость и технические измерения в машиностроении / Ред. К.И.Абаджи и Б.П.Тимофеев. Л.: Машиностроение, 1972. Вып. 6. С. 12–22.