УДК 550.8:553.3/9:51

Ю.В.Лир, С.С.Шакин

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ. ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ*

На материале детально изученного Депутатского оловорудного месторождения (Якутия) выполнено исследование, направленное на выявление возможности описания строения месторождения моделью детерминированного фрактала. Суть исследования составляет поиск функции, отображающей крупную структуру на ее часть. Проверка свойств такого отображения осуществлена делением исследуемой области на M x N равновеликих элементов (ячеек), причем M и N принимались равными 8,16,32,64,128. В каждой ячейке вычислялись средние запасы олова в метропроцентах и выполнялась оценка подобия эталона (ячейка 8 x 8) и объекта в целом с учетом возможного поворота структур малых размеров относительно крупных. Установлено, что максимальное число ячеек, подобных эталону, выявляется при использовании сети 64 x 64, а сеть 64 x 128 выделяет как "эталоноподобные" самые сложные в морфологическом отношении узлы, которые в наибольшей степени обогащены оловом.

The well known Deputatsky tin ore deposit (Yakutia) has been studied with aim to estimate possibility of its modelling as the determined fractal. Investigation was based on the search of a function relating the large structures to their smaller parts. Testing of the such relation features has been realized by division of studied field (ore bodies and their parts) into M x N elements (cells) of equal size, M and N taken as 8,16, 32, 64, 128. For every cell the average meter-percent (m %) of tin has been calculated with estimation of similarity between the standard unit (8 x 8 cell) and the whole object (tin ore body), taking into consideration a possible turning of smaller parts relatively to larger structures. Thus, it has been revealed that the maximum quantity of cells similar to the standard is detected with 64 x 64 netting. The 64 x 128 net distinguishes as the most "standard-like" - the most morphologically complicated structure junctions which, respectively, are most enriched in tin.

Понятие о детерминированном фрактальном анализе

Детерминированный фрактальный анализ базируется на фрактальной геометрии - науке об особых геометрических объектах - фракталах, основным свойством которых является подобие объекта любой его части. Для большей ясности строения детерминированных фракталов рассмотрим процесс их искусственного конструирования.

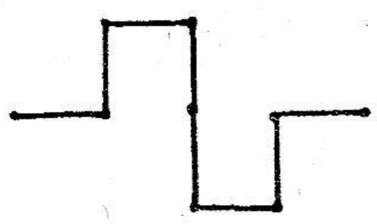
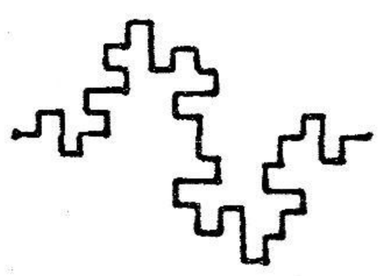
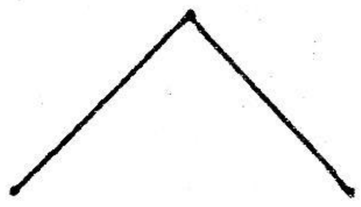
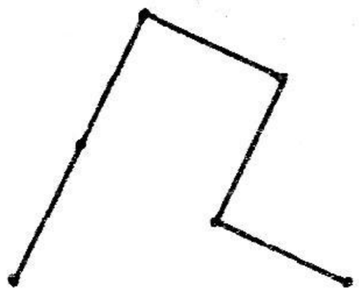
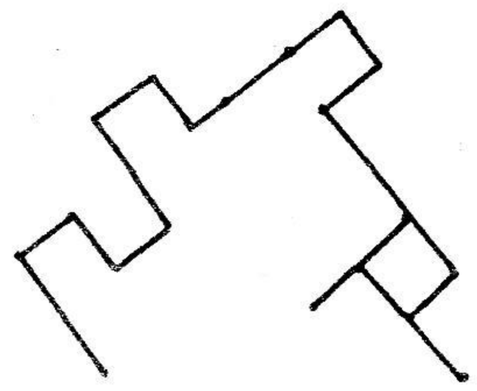
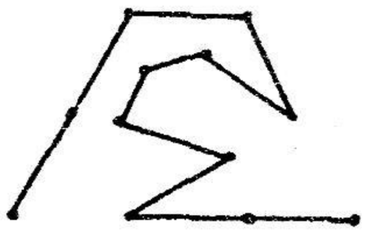
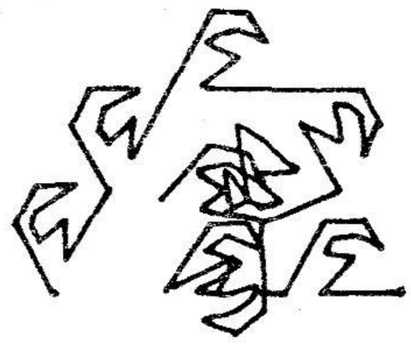
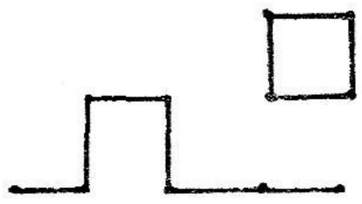
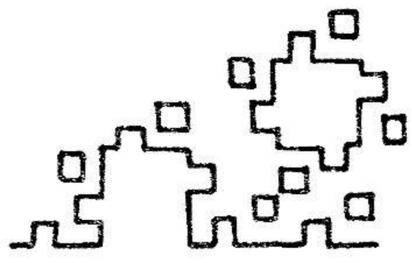
Первым из подобных объектов рассмотрим кривую Кох (табл.1, кривая 1). Она строится бесконечным числом шагов, причем на каждом шаге отрезок прямой делится на три равные части и центральная часть заменяется двумя равными боковыми в виде сторон угла. На следующем шаге эта операция повторяется над каждой прямолинейной секцией предыдущего шага и так далее. Полученная ломаная линия обладает совершенно удивительными свойствами. Имея начало и конец, она тем не менее, обладает бесконечной длиной. Кроме того, ни в одной точке она не имеет производной, так как при бесконечном продолжении процесса каждая ее точка в какой-то момент становится угловой, а в точке углового соединения прямых производной не существует. Рассматривая эту кривую в сколь угодно сильный "микроскоп" и меняя увеличение, мы всегда будем видеть одно и то же, т.е. кривая инвариантна относительно масштаба.

При построении кривой Кох все время производилось надстраивание центральной секции по единому правилу, поэтому эта кривая относится к *детерминированным* фракталам. Если на каждом шаге надстраивать одну из трех имеющихся секций некоторым случайным образом (как, например, при бросании кости с гранями только 1-3), то в связи с постоянным отношением начальной длины к конечной получим фрактал не детерминированный, а *случайный*, в котором часть подобна целому только по статистическому параметру - отношению

* Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, грант № 96-05-64212.

Таблица 1

Способы построения фрактальных кривых

№ п/п	Инициатор	Генератор	Первый шаг построения	*N*	*r*	*D*
1				4	1/3	1,26
2				8	1/4	1,50
3				2	$1/\sqrt{2}$	2
4				5	$1/\sqrt{5}$	2
5				10	1/3	2
6				10	1/4	1,66

Примечание. *N* - число секций, из которых формируется генератор; *r* - длина одной секции; $D = \lg N/\lg(l/r)$ - фрактальная размерность линии, которая может быть получена при бесконечном количестве шагов применения генератора.

конечной и начальной длин, а подобие формы отсутствует. В этом смысле можно выделить также *периодический* фрактал, когда на первом шаге надстраивается первая секция, на втором - вторая, на третьем - третья, а затем все повторяется сначала.

Детерминированные фракталы могут строится в одно-, двух-, ..., *n*-мерном пространстве из линий, точек, фигур и т.п. Они имеют постоянный способ перехода от шага к шагу и

соответственно на каждом шаге постоянное приращение длины, количества точек, объема. Это приращение является важнейшей характеристикой фракталов и называется фрактальной размерностью (подробнее см. работу [12]). Первичная фигура, с которой начинается построение фрактала (в кривой Кох это отрезок) называется ***инициатором***, а способ перехода от шага к шагу (в кривой Кох надстраивание центральной трети двумя третями) называется ***генератором***. Генераторы, применяемые в построении искусственных фракталов, показаны в табл.1.

На каждом шаге можно применять разные генераторы. Чтобы полученное множество было фракталом, необходимо использовать генераторы с одной и той же фрактальной размерностью (например, 3-5 табл.1). В периодическом фрактале подобными оказываются только некоторые масштабные уровни, а промежуточные не подобны.

Для геологов, целью которых является не конструирование объекта, а поиск описания природного объекта, детерминированные фракталы имеют модельную ценность. Их используют как модель, описывающую отдельные черты наблюдаемого в природе явления. Наиболее удобен метод поиска функции, отображающей объект на его часть [15]. Если такая функция неразрывна и достаточно подобна природному объекту, то какую-то часть изучаемой структуры можно описать моделью детерминированного самоподобного фрактала. Обоснование наличия и поиски такой функции являются задачей данного исследования.

Организовать отображение крупной структуры на ее часть и проверку свойств такого отображения легче всего на дискретизированных исходных данных, занесенных в двумерную матрицу. Нами дискретизация проводилась на определенном горизонте участка рудного поля.

Исследуемую область делили на M x N элементов (ячеек), причем N и M принимали равными 8, 16, 32, 64, 128. Значения средних запасов проб в метропроцентах, попавших в одну ячейку дискретизации, усредняли, полученное среднее относили к центру ячейки и заносили в соответствующую клетку матрицы.

Выберем некоторую эталонную матрицу. В наших исследованиях эталон имеет размер 8 x 8. Затем будем перемещать эталонную матрицу по испытываемой, имеющей бо́льшую размерность (например, 16 x 16 или 32 x 32). При движении центр эталонной матрицы помещается в разные клетки испытываемой. Это позволяет оценить, насколько тот или другой участок похож на эталон.

Однако здесь возникает вопрос, как и в каких единицах измерять эту "похожесть"? Без ответа на него невозможна компьютеризация огромного объема сравнений. Две одноразмерные матрицы из положительных чисел можно сопоставить по схеме сравнения удаленности двух поверхностей: либо по разности между соответственными элементами (цифрами в соответственных клетках), либо по разности разности (второй разности) между соседними элементами (аналогично разности кривизны поверхностей или первых производных от функции поверхности). Причем таких разностей будет две: по столбцам и по строкам. Далее можно сравнивать разности разностей разностей (третьи разности) и т.д.

Например, сравним две матрицы размером 2 x 2:

$$\begin{matrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 \\ 6 & 1, \end{matrix}$$

Разность соответственных элементов даст матрицу:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 0. \end{matrix}$$

Можно, кроме того, вычислить разности между элементами исходных матриц. По строкам для первой и второй матрицы соответственно

$$-1 \quad 1 \qquad -3 \quad 1.$$

Вычитая из первой вторую, получим строку 2 0, которая и является результатом сравнения. Аналогично по столбцам:

Для первой матрицы	Для второй	Итоговая разность
2	1	1
4	5	-1

Результаты по всем трем компонентам сравнения суммируют для получения единого коэффициента подобия. Без существенных искажений такое суммирование возможно тогда, когда информационая значимость суммируемых чисел примерно соответствует ее математической величине (числу). В.Б.Вяткин [2], специально занимавшийся этим вопросом, пришел к выводу, что суммировать лучше разности, умноженные на логарифм разности. Это произведение называется энтропией подобия (E).

При практической проверке этого приема на исследуемом массиве данных выяснилось , что установление для второй разности такого же веса, как и для разностей меньших степеней, значительно искажает картину подобия. При добавлении четвертого компонента суммы матрицы, которые человек воспринимает как непохожие, алгоритм считает подобными. Известно и теоретически доказано, что человек в силу особенностей своего мышления может различать бо́льшие степени подобия, чем алгоритмы, основанные на формальной логике, поэтому авторы не используют четвертые и следующие элементы суммы подобия и ограничиваются первыми тремя. В целом, по-видимому, количество признаков, используемых при анализе подобия, нужно выбирать экспериментально. В нашем же случае три первых используемых элемента следующие: разность между соответственными элементами матрицы, разность между разностями соседних столбцов, разность между разностями соседних строк.

Следующей проблемой при поиске функции отображения являются повороты и растяжения при отображении.

Появление поворотов при рассмотрении геологических структур в разных масштабах можно интерпретировать как косую ориентировку более мелких структур относительно более крупных, что общеизвестно, например, для структур оперения. Кроме того, встречаются повороты региональных сетей разломов разных масштабов (см.,например,[4]).

Испытываемые данные могут соответствовать эталону, расположенному в пространстве под некоторым углом к своему первоначальному положению или растянутому по какой-либо оси. С целью выявления подобия в таких случаях проводилась дискретизация с ориентировкой сети под углом от -80 до +80° по отношению к первоначальному положению с шагом 10° . Эталон накладывался на матрицу повернутой сетки с совпадением строк и столбцов и таким образом оказывался повернутым относительно первоначальной ориентировки на соответствующий угол. Для моделирования растяжения-сжатия эталона использовали дискретизационные сетки с неравным числом ячеек по горизонтали и вертикали ($M \neq N$). Для визуального обобщения результатов строили карты коэффициентов подобия для каждого варианта поворота.

Основные результаты исследований Депутатского рудного поля

На Западном участке Депутатского рудного поля для детерминированного фрактального анализа был выбран горизонт 711 м, как наиболее полно отвечающий модели самоподобного фрактала [7,8]. Допустима постановка следующих вопросов: 1) является ли данный фрактал случайным или случайно-детерминированным; 2) если есть детерминированная составляющая фрактала, то как она "устроена".

Эталонная матрица для горизонта 711 м была получена из плана этого горизонта, дискретизированного по сетке 8 х 8 (эталон 1) .Кроме того, использовали этот же эталон, но

перевернутый вокруг оси *Y* (эталон 2) и вокруг оси *X* (эталон 3). Следует отметить, что эталоны 2 и 3 выражают структуру, перевернутую деформацией относительно данной на 180°, и структуру деформации антисимметричной данной в какой-то плоскости (например, правые и левые сдвиги).

При выполнении расчетов для разных сетей дискретизации и разных углов их поворота был введен коэффициент подобия

$$cl=\sum_{i=1}^{n} 1/E_i$$

где E_i - энтропия подобия по В.Б.Вяткину [3]; $1/E_i$ - степень подобия; n - число ячеек сети, в которых $E_i < E_g$; E_g - задаваемое пороговое значение.

Нами выбрано значение порога подобия E_g = 90 как наиболее выразительное для имеющихся эмпирических данных.

Расчеты коэффициентов подобия для углов поворота от -80 до +80° для 10 вариантов сетей дискретизации и трех эталонов показали следующее:

1. Существует гораздо больше ячеек, подобных эталону 1, чем эталонам 2 и 3, что доказывается более низкими значениями коэффициентов подобия последних. Это говорит либо о сравнительно слабых антисимметричных деформациях и малом количестве участков, повернутых на 180° относительно первичного положения, либо о малом числе антисимметричных структур (что более вероятно).

2. Максимальная степень подобия (табл.2) отмечается в другой пространственной ориентации, чем ориентация эталона: наиболее часто под углами 20-40° к первичной ориентации (в табл.2 выделены жирной рамкой).

3. Углы поворота, для которых отмечается максимальное количество подобных ячеек, разные для разных сетей. Если для сети 16 x 16 угол поворота большинства подобных ячеек сравнительно небольшой (30°), то с дроблением сети он увеличивается до 80° , а затем опять падает до 20°. Этот эффект отмечается как в "прямой" (эталон 1), так и в обратных (эталоны 2 и 3) структурах, но с противоположным знаком угла.

4. Количество подобных ячеек одинакового уровня (степени) подобия не постоянно при разных сетях и не зависит от количества ячеек сети. Максимум подобия эталону 1 отмечается для сети 64 x 64. Вероятно, именно эта сеть знаменует переход на следующий уровень деформации, она отмечает некоторый шаг дискретизации. Таким образом, более интенсивное дробление не увеличивает автоматически число подобных ячеек, оно имеет собственную динамику и увеличивается на определенных резонансных уровнях дробления.

Объяснить особенности, отмеченные в пп. 2 и 3, можно на основе синергетической иерархической концепции, развитой В.И.Ивановым [5] в области механики разрушения. Привлечение механики для объяснения масштабных эффектов объясняется формированием рудных жил путем заполнения трещин, возникающих по законам механики твердого тела. В соответствии с синергетической концепцией любая деформация в твердом теле развивается поуровенно. Сначала включается в работу самый малый по размеру уровень, на нем деформация развивается до тех пор, пока материал не исчерпает свою деформационную способность, затем вступает "в работу" следующий по размеру и энергии уровень и т.д. Такой механизм мог бы объяснить особенности подобия структур для сетей от 8 x 8 до 16 x 128 (табл.2) как медленные повороты структуры каждого следующего уровня размеров относительно предыдущего. Подобный эффект слабого поворота меньшей структуры относительно большей известен в структурной геологии [10] и в механике разрушения [3]. Далее происходит резкое изменение ориентации максимально подобных эталону участков (сети 32 x 64; 32 x 128). Разрывы, перпендикулярные основной разрывной зоне, так называемые "антитетические", давно известны геологам. Отмечалось, что они всегда короче разрывов вдоль разрывной зоны, т.е. имеют свой уровень масштаба.

Наиболее интересный эффект наблюдается при дальнейшем дроблении сети: ориентировка подобных фрагментов довольно резко возвращается к ориентировке эталона. Такая

Таблица 2

Значения коэффициента подобия для эталона 1

Угол поворота	Сеть дискретизации / Количество ячеек сети									
	16 x 16 / 256	16 x 32 / 512	16 x 64 / 1024	32 x 32 / 1024	16 x 128 / 2048	32 x 64 / 2048	32 x 128 / 4096	64 x 64 / 4096	64 x 128 / 8192	128 x 128 / 16384
+80°	0,13	0,77		0,27	1,02	1,57	1,71	0,63	1,39	
+70	0,13	0	0,14	0,52	0,38	1,02	0,89	1,14	1,78	0,88
+60	1,32	0,39	0,41	0,89		0,63	0,25	2,41	0,75	1,12
+50	1,88	1,46	0,14	1,59	0,25	0,91		2,07		
+40	2,13	1,72	2,02	2,75	1,14	1,27	0,50	3,88	1,41	1,55
+30	2,41	1,79	1,41	1,62	0,13	1,16		3,02	1,04	2,04
+20	2,13	1,79	0,93	1,79	0,63	0,63	0,13	3,45	1,98	2,30
+10	1,84	0,77	0,50	1,20		1,26		2,16	0,91	1,50
0	2,02	1,31	0,52	2,04	0,38	0,38	0,38	1,54	1,50	1,52
-10	0,18	0,38		0,91				1,14		
-20	0,38			0,63				1,05	0,63	
-30	0,13		0,25	0,39				0		
-40	0,38	0,25		0				0,13		
-50	0,13			0						
-60	0,63			0						
-70		0,13		0				0		
-80				0		0,13	0,25		0,13	

закономерность, вероятно, носит общий характер, именно поэтому П.Н.Николаев [9] установил, что оси деформаций уровня района и уровня минерала ориентированы одинаково, а на промежуточных уровнях наблюдается иная ориентировка осей деформаций.

Авторы занимались также пространственным распределением участков с большой степенью подобия эталонам. Для горизонта 711 м было составлено 40 карт пространственного положения ячеек с высокой степенью подобия. Пример одной из них приведен на рисунке. Их анализ позволяет подметить следующие основные закономерности.

1. Области с разными углами поворотов эталонов (как, в частности, видно на рисунке) расположены в разных частях рудных тел, сменяя друг друга по простиранию.

2. Участки с подобием эталонам 1 и 3 чаще всего чередуются по простиранию в одних и тех же рудных телах.

3.Ячейки поперечной деформации с большими углами поворота (+80°) локализованы в виде трех субширотных участков. Впрочем, в этих же местах рудных тел локализуются иногда и участки с небольшими углами поворота.

4. Наиболее морфологически сложные участки на плане горизонта выделяет как подобные эталону 1 сеть 64 х 128 ячеек, повернутая на угол +20° относительно ориентировки эталона (см.рисунок).

Естественно поставить вопрос: какими свойствами обладают ячейки со структурой, подобной структуре рудного поля, кроме самого этого подобия? Необходимые качественные геологические свойства ясны: в таких ячейках должно присутствовать максимально большое число элементов (разновидностей горных пород, минералов, разрывов, складок), участвующих в строении рудного поля. Количественные же параметры не очевидны, поэтому для их выявления была выполнена специальная работа.

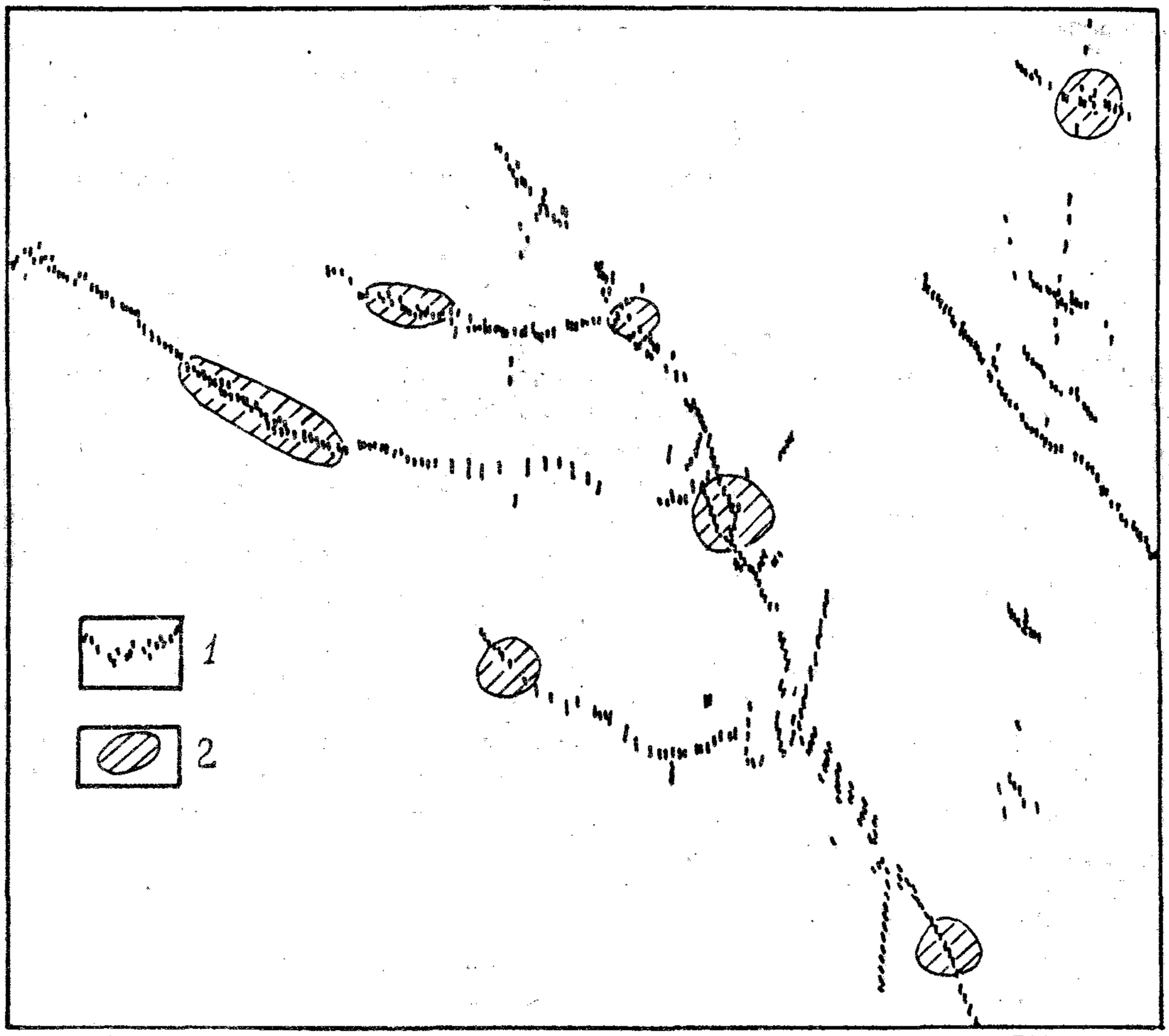


Схема расположения центров ячеек с высокой степенью подобия на горизонте 711 м
1 - положение бороздовых проб, включенных в обработку; 2 - области максимального подобия для сети 64 х 128, угол +20° , эталон 1

Прежде всего подсчитали средние запасы олова в подобных ячейках, которые затем сравнивали со средними запасами по всем сформированным при данной сети ячейкам (табл.3). Выяснено, что для эталона 1 ячейки с высокой степенью подобия всегда имеют более высокие запасы олова, чем усредненная ячейка, т.е. являются более богатыми. Особенно четко этот эффект появляется для сети с максимальным количеством "подобных" ячеек (64 x 64) и сети, уверенно выявляющей узлы сложной морфологии как подобные строению всего горизонта (64 x 128).

Вероятно, степень богатства ячеек, похожих на эталон, может характеризовать степень подобия структуры эталона структуре определенного иерархического уровня строения, когда существует ряд разномасштабных тел со структурой, подобной данному эталону.

Таблица 3

Средние запасы олова в ячейках. Горизонт 711. Эталон 1. Энтропия Вяткина менее 80

Параметр	Сеть дискретизации / Количество ячеек сети								
	16 x 16 / 256	16 x 32 / 512	16 x 64 / 1024	32 x 32 / 1024	32 x 64 / 2048	32 x 128 / 4096	64 x 64 / 4096	64 x 128 / 8192	128 x 128 / 16384
Интервал углов, град.	От -20 до +70	От 0 до +80	От -20 до +80	От -30 до +80	От -80 до +80	От -70 до +80	От -60 до +80	От -10 до +80	От -20 до +50
Средние запасы: по всем ячейкам	0,512	0,502	0,504	0,502	0,501	0,458	0,484	0,475	0,496
по "подобным" ячейкам	0,566	0,561	0,565	0,575	0,521	0,494	0,630	0,587	0,522
Разность	0,054	0,059	0,061	0,073	0,020	0,036	0,146	0,112	0,026

Однако такой ряд практически всегда дискретный, т. е. содержит некоторый набор масштабов. Коэффициент перехода между составляющими ряда в нашем случае можно определить для горизонтального сечения, пользуясь табл.2. Видно,что сети 64 x 128 и 64 x 64 занимают в них совершенно особое положение. Во-первых, сеть 64 x 64 имеет максимальное число ячеек, подобных эталону. Во-вторых, именно с этих сетей начинается возвращение угла максимального подобия к малым значениям. В-третьих, сеть 64 x 128 выделяет наиболее сложные в морфологическом отношении узлы как наиболее "эталоноподобные". В-четвертых, подобные эталону ячейки этих сетей наиболее богаты оловом. Учитывая вышеизложенное, можно считать, что ячейка сети 64 x 128 максимально подобна эталону. Отсюда легко определяется шаг дискретности. Эталон получен при делении плана горизонта сетью 8 x 8, что соответствует умножению стороны ячейки сети 64 x 128 на 8 и 16. Среднее геометрическое из двух последних чисел 11, что равно квадрату числа 3,36, которое и является коэффициентом масштабного перехода. Следует отметить, что ранее, анализируя фрактальность запасов олова в вертикальных сечениях, авторы независимыми методами и по независимым данным получили коэффициент перехода 3,5 [7, 8].

Коэффициент масштабного перехода около 3 - чрезвычайно частое явление для самых разных процессов. В этом смысле интересны работы [1, 13, 14] , не только приводящие множество примеров такого значения этого коэффициента, но и дающие его физическое обоснование. По мнению авторов этих работ, данное значение коэффициента связано с трехмерностью физического пространства. Этому было найдено экспериментальное подтверждение - пластина при разрушении дает обломки, имеющие коэффициент масштабного перехода 2, а не 3, что связано с ее двумерностью [1].

Выводы и рекомендации

Таким образом, поиск функции отображения крупной структуры на ее часть с учетом возможных поворотов и растяжений при отображении позволил установить, что максимальная степень подобия отмечается в ячейках, повернутых относительно эталона на 20-40°, при этом она обнаруживает сложную зависимость от размера ячеек сети. Ячейки со структурой, максимально подобной структуре рудного поля, отличаются наиболее высокими концентрациями металла и в то же время они уверенно квалифицируются как наиболее сложные в морфологическом отношении.

Шаг дискретности (коэффициент масштабного перехода), выявляемый при сопоставлении разномасштабных тел со структурой, подобной эталону, составляет 3,36, что близко значению этого коэффициента (3,50), полученному ранее авторами и другими исследователями при описании фрактальными моделями самых разных процессов и явлений.

Использование полученных результатов возможно по двум направлениям:

1. Поиски участка, структура которого была бы максимально подобна структуре рудного тела, месторождения, рудного поля.

2. Поиски рудных объектов, максимально подобных по строению своему окружению. По нашим данным, именно они должны быть рудными телами-лидерами [6], месторождениями-лидерами и т.д.

Если второй путь нами только намечен, то в ходе исследований по первому направлению получены важные результаты. По нашим данным, эталонный участок для применения выявленных закономерностей самоподобия обладает следующими свойствами:

а) содержит максимально возможное число минералов, разновидностей горных пород, различных структурных элементов, имеющихся на изучаемом объекте [6];

б) является наиболее богатым из ряда одномасштабных участков;

в) ориентацией существенно не отличается от изучаемого крупного объекта.

Выбрав участок с такими свойствами, можно предположить,что при увеличении его структуры в некоторое число раз, мы можем получить структуру большего изучаемого объекта, например рудного поля. Поскольку исследователи обычно имеют некоторые сведения о большом объекте (например, карту геофизического поля), это позволяет правильно сориентировать полученную на малом объекте "картинку". При этом необходимо помнить, во-первых, что ориентация большего объекта не обязательно должна строго совпадать с ориентацией меньшего и, во-вторых, что необходимо определить коэффициент масштабного перехода. Возможны два способа определения этого коэффициента: составлением таблицы характерных размеров всех видимых неоднородностей объектов (пример см. в [11]) и поиском масштабов, в которых части максимально подобны целому при дроблении объекта на мелкие части. Кроме того, ранее авторы [8] показали возможность определения этого коэффициента как соотношения между квантами запасов разных иерархических уровней.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Асатрян Х.О.* Динамика развития иерархии структур в образцах горных пород и искусственных материалов: Автореф. ... д-ра техн. наук / Ин-т физики Земли. М., 1993. 43 с.

2. *Вяткин В.Б.* Информационный вес отражения и его возможности при прогнозно-геологических исследованиях // Количественный прогноз твердых полезных ископаемых / Каз. ин-т минер. сырья. Алма-Ата, 1990. С.25-26.

3. *Гольштейн Р.В., Капцов А.В.* Взаимодействие удаленных трещин и формирование структур разрушения. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981. № 179. 65 с.

4. *Долицкий А.В.* Реконструкция тектонических структур. М.: Недра, 1978. 150 с.

5. *Иванов В.Н.* Связанное физико-механическое исследование и имитационное моделирование на ЭВМ многоуровневых процессов деформирования-разрушения твердых тел // Исследования по механике материалов и конструкций. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С.7-27.

6. *Лир Ю.В., Карякин И.А.* Рудные тела-"лидеры" оловорудных месторождений // Зап. Ленингр. горн. ин-та. 1983. Т. 95. С. 96-104.

7. *Лир Ю.В., Шакин С.С., Карякин И.А.* Исследование иерархии структур рудоносных объектов на основе принципов и методов фрактальной геометрии // Реф. сб.избр. работ по грантам в области фундаментального естествознания. Гос.ком. Российской.Федерации по высшему образ. СПб, 1994. С.153-154.

8. *Лир Ю.В., Шакин С.С.* О законах распределения запасов металлов в недрах // Руды и металлы. 1994. № 2. С.16-23.

9. *Николаев П.Н.* Методика тектоно-динамического анализа. М.: Недра, 1992. 262 с.

10. *Стоянов С.С.* Механизм формирования разрывных зон. М.: Недра, 1977. 144 с.

11. *Шакин С.С.* Изучение иерархического строения участка Узловой. Рук. деп. во ВИНИТИ 23.01.92 № 238-В92.

12. *Шакин С.С.* Фрактальные модели и перспективы их использования в геологии // Зап. Санкт-Петерб. горн. ин-та, 1993. Т. 137. С.84-90.

13. *Шемякин Е.И.* О свободном разрушении твердых тел: Часть 1 // ДАН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С.1090-1094.

14. *Шемякин Е.И.* О свободном разрушении твердых тел: Часть 2 // ДАН СССР. 1991. № 6. С.1371-1373.

15. *Barnsley M.F.* Fraktal everywhere. Academic press Inc. Boston. 1989. 396 p.