УДК 528.31

А.В.Астапович, М.Я.Брынь
Санкт-Петербургский филиал Военно-инженерного ун-та, Россия

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЕСОВ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В статье последовательно обосновывается алгоритм оптимизации весов, приводятся необходимые для практической реализации формулы.

The algoritm of weight optimization is based in consecutive order. The necessary formulas are given for its practical realization.

Геодезическое обеспечение поисковых работ в горно-рудной промышленности, строительства, монтажа и эксплуатации инженерных сооружений и технологического оборудования, кадастр городских земель, землеустроительные работы, а также решение других научно-технических задач требуют развития многоступенчатых сетей. В этой связи важен вопрос о соотношении точности измерений в многоступенчатых построениях. Решая эту задачу, необходимо по допустимой погрешности определения параметров последней ступени геодезического построения установить точность каждого этапа измерений. Оптимизация весов является первым шагом в управлении точностью измерений. В работе [1] отмечается, что строгой теории решения вопроса оптимизации измерений в многоступенчатых построениях не разработано. Целью настоящей статьи является изложение возможного подхода к решению данной проблемы.

Положим для упрощения, что геодезическое построение состоит из двух уровней. Тогда математические модели измерений в каждой ступени можно представить в виде двухгрупповых моделей

$$l_A = A_1 e_{\text{исх}} + A_2 \tau_A + \theta_A; \qquad (1)$$

$$l_B = B_1 e_A + B_2 \tau_B + \theta_B, \qquad (2)$$

где A и B – матрицы коэффициентов параметрических уравнений; $e_{\text{исх}}, e_A$ – стохастические параметры (векторы ошибок координат пунктов вышестоящих ступеней геодезического построения); θ_A, θ_B – погрешности измерений; τ_A, τ_B – функциональные параметры (поправки к приближенным значениям координат пунктов и приближенным значениям ориентирующих углов, систематические ошибки измерений длин сторон сети и другие).

В уравнениях (1), (2) произведения $A_1 e_{\text{исх}} = \delta_A$, $B_1 e_A = \delta_B$ выражают влияния ошибок координат исходных пунктов на невязки моделей. Эти уравнения представим в виде

$$l_A = A_2 \tau_A + \omega_A; \quad l_B = B_2 \tau_B + \omega_B,$$

где $\omega_A = A_1 e_{\text{исх}} + \theta_A$; $\omega_B = B_1 e_A + \theta_B$ – невязки моделей измерений, автоковариационные матрицы которых [3]

ISSN 0135-3500. Записки Горного института. Т.146

$$K_{\omega\omega_A}=K_{\theta\theta_A}+A_1K_{ee_{\text{исх}}}A_1^{\text{т}};$$

$$K_{\omega\omega_B}=K_{\theta\theta_B}+B_1K_{ee_A}B_1^{\text{т}},$$

где $K_{\theta\theta_A}, K_{\theta\theta_B}$ – автоковариационные матрицы ошибок измеряемых величин; $K_{ee_{\text{исх}}}, K_{ee_A}$ – автоковариационные матрицы ошибок координат исходных пунктов и пунктов сети первой ступени.

Принцип минимизации квадратичной формы $\omega_A^{\text{т}}K_{\omega\omega_A}^{-1}\omega_A+\omega_B^{\text{т}}K_{\omega\omega_B}^{-1}\omega_B$ позволяет получить для многоступенчатой сети автоковариационные матрицы ошибок функциональных параметров сети

$$K_{ee_A}=[A_2^{\text{т}}(K_{\theta\theta_A}+A_1K_{ee_{\text{исх}}}A_1^{\text{т}})^{-1}A_2]^{-1};$$

$$K_{ee_B}=[B_2^{\text{т}}(K_{\theta\theta_B}+B_1K_{ee_A}B_1^{\text{т}})^{-1}B_2]^{-1}.$$

Автоковариационные матрицы погрешностей измерений представим через весовые матрицы и среднюю квадратическую ошибку единицы веса. Тогда

$$K_{ee_A}=[A_2^{\text{т}}(\mu^2P_A^{-1}+A_1K_{ee_{\text{исх}}}A_1^{\text{т}})^{-1}A_2]^{-1};$$

$$K_{ee_B}=[B_2^{\text{т}}(\mu^2P_B^{-1}+B_1K_{ee_A}B_1^{\text{т}})^{-1}B_2]^{-1},$$

где P_A, P_B – весовые матрицы; μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Планирование точности измерений угловых и линейных величин следует основывать на принципе минимальности затрат $\wp$ на развитие геодезической сети с требуемой точностью координат пунктов $m_{\text{доп}}$, с учетом равноточности направлений на отдельных пунктах сети и независимости измерений.

Поскольку между затратами и точностью существует тесная связь, будем считать, что затраты $\wp$ пропорциональны сумме весов измеряемых в сети величин. Введение дополнительных факторов, от которых может зависеть функция потерь $\wp$ (существенное усложнение ее вида), делает аппарат планирования значительно более громоздким и лишь в крайне редких случаях может заметно улучшить описание действительности [4].

Если ввести обозначения: p_i^A, p_i^B – вес направлений на i-м пункте; $p_{d_j}^A, p_{d_j}^B$ – вес измерения j-й стороны; n_A, n_B – число пунктов в каждой ступени развиваемой сети; n_A^d, n_B^d – число измеряемых сторон в каждой ступени развиваемой сети; E_i^A, E_i^B – единичные матрицы, размеры которых соответствуют числу направлений на пунктах сети, – то в качестве целевой функции можно принять

$$\Phi_{\text{ц}}=\min\left(\sum_{i=1}^{n_A}p_i^A+\sum_{i=1}^{n_B}p_i^B+\sum_{j=1}^{n_A^d}p_{d_j}^A+\sum_{j=1}^{n_B^d}p_{d_j}^B\right), \quad (3)$$

при ограничениях

$$P_A=\begin{bmatrix} p_1^AE_1^A & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & p_{n_A}^AE_{n_A}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{diag}\{p_{d_j}^A\} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$P_B=\begin{bmatrix} p_1^BE_1^B & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & p_{n_B}^BE_{n_B}^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{diag}\{p_{d_j}^B\} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$K_{ee_A}=[A_2^{\text{т}}(\mu^2P_A^{-1}+A_1K_{ee_{\text{исх}}}A_1^{\text{т}})^{-1}A_2]^{-1}; \quad (6)$$

$$\max[B_2^{\text{т}}(\mu^2P_B^{-1}+B_1K_{ee_A}B_1^{\text{т}})^{-1}B_2]^{-1}\le m_{\text{доп}}^2. \quad (7)$$

Таким образом, задача оптимизации свелась к определению условного экстремума функции многих переменных, которую будем решать численным методом.

Введем следующие обозначения: D – область определения функции

$$\wp = \sum_{u=1}^{n} p_u = \sum_{i=1}^{n_A} p_i^A + \sum_{i=1}^{n_B} p_i^B + \sum_{j=1}^{n_A^d} p_{d_j}^A + \sum_{j=1}^{n_B^d} p_{d_j}^B ,$$

где p_u – диагональные элементы матрицы

$$P = \mathrm{diag}\{P_A, P_B\};$$

U – допустимое множество значений матрицы P, удовлетворяющих условиям (4)-(7).

Последовательность $P(k) \in D$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ будет являться обобщенно минимизирующей последовательностью для функции $\wp$ на множестве U, если выполняются условия [2]

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{u=1}^{n} p_u(k) = \min_{p_u \in U} \sum_{u=1}^{n} p_u ;$$

$$\lim_{k\to\infty} \min_{P\in U} \|P(k) - P\| = 0 .$$

Сформулированная задача является задачей нелинейного программирования. Для ее решения численным методом выберем начальный план измерений

$$P(0) = E$$

и определим предполагаемые затраты

$$\wp(0) = \sum_{u=1}^{n} p_u(0) .$$

Методом приближений решим матричное уравнение

$$\max[B_2^{\tau}(\mu^2 P_B^{-1} + B_1 K_{ee_A} B_1^{\tau})^{-1} B_2]^{-1} = m_{\text{доп}}^2$$

относительно неизвестного масштабного множителя μ:

$$\mu_{i+1}^2 = \frac{m_{\text{доп}}^2}{\max[B_2^{\tau}(\mu_i^2 P_B^{-1} + B_1 (K_{ee_A})_i B_1^{\tau})^{-1} B_2]^{-1}},$$

где $(K_{ee_A})_i = [A_2^{\tau}(\mu_i^2 P_A^{-1} + A_1 K_{ee_{\text{исх}}} A_1^{\tau})^{-1} A_2]^{-1}$.

Затем, поочередно изменяя веса, определим измерение l_s, уменьшение веса которого на множестве U приводит к наибольшему изменению функции потерь $\wp(s)$. Определив, таким образом, вес измерения, добавим новое ограничение

$$p_s = p_s(1) , \qquad (8)$$

которое зафиксирует вес измерения данной величины. Тем самым получим новое множество весов $P(1)$. Повторяя указанную операцию, получим последовательность множеств

$$E \supset P(1) \supset P(2) \supset \ldots \supset P .$$

Таким образом, на каждом шаге итерации решается задача нелинейного программирования, т.е. определяется минимум потерь при основных (4)-(7) и дополнительных (8) ограничениях.

Изложенный подход может быть использован при проектировании геодезических сетей, когда по заданной точности параметров последней ступени геодезического построения, создаваемого исходя из принципа от общего к частному, требуется определить оптимальную точность измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Большаков В.Д.* К вопросу проектирования геодезических сетей в несколько стадий / В.Д.Большаков, Ю.И.Маркузе // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. № 5. С.3-7.

2. *Вергасов В.А.* Вычислительная математика / В.А.Вергасов, И.Г.Журкин, М.В.Красикова и др. М.: Недра, 1976. 230 с.

3. *Коугия В.А.* Влияние ошибок исходных данных на результаты уравновешивания // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1967. № 6. С.67-75.

4. *Тамутис З.П.* Проектирование инженерных геодезических сетей. М.: Недра, 1990. 138 с.