УДК 622.83: 625.42

Е.М.Волохов
ОАО «Метрострой», Санкт-Петербург, Россия
С.П.Павлов
Санкт-Петербургский горный ин-т, Россия

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МУЛЬДЫ СДВИЖЕНИЯ ПРИ СООРУЖЕНИИ ТОННЕЛЕЙ В КЕМБРИЙСКИХ ГЛИНАХ

В статье предложена методика расчета прогнозных параметров мульды сдвижения на земной поверхности при сооружении тоннелей Санкт-Петербургского метрополитена, учитывающая анизотропию горных пород и влияние крепи, а также позволяющая учесть физическую нелинейность и фактор времени.

In the article the feasibility of idealized methods to calculation of deformations of a surface is considered at facility of tunnels in simple geological conditions. Among such methods the special attention is given to methods of a mathematical theory of elastic strength, which one will widely be used in mechanics of underground structures (close in the essence to a considered problematics). The applicability (feasibility) of the analytical approach is detected within the framework of the registration of the separate mining-and-geological factors.

Применение аналитических методов в расчетах сдвижений и деформаций породного массива при проходке в нем горных выработок различного назначения не получило широкого распространения из-за неоднородности массива пород, нарушения сплошности пород при проходке и т.д. Между тем рассмотрение геомеханических процессов при строительстве тоннелеобразных выработок с применением методов механики сплошной среды (МСС) показывает и целый ряд работ в этой области тому подтверждение, что такой подход вполне оправдан.

Среди факторов, серьезно осложняющих представление «сдвиженческих» процессов в аналитических функциях, можно особо выделить анизотропию горных пород, влияние объемных сил, влияние крепления выработки на напряженно-деформированное состояние (НДС) массива, влияние физической нелинейности, в том числе при учете временно́го фактора. Ни одному из этих факторов не нашлось места в существующих методах прогноза осадок земной поверхности.

Исследованием установлено, что применительно к условиям сооружения горизонтальных тоннелей в кембрийских глинах дельты Невы наиболее существенное влияние на деформационные процессы оказывают анизотропность глин, обладающих тонкой горизонтальной слоистостью, и работа сборной тюбинговой обделки после схватывания раствора первичного нагнетания. Оценка степени

влияния фактора производилась, преимущественно, сравнением пар известных аналитических решений. Так, сравнение «весомого» (учитывающего объемные силы) решения Г.Н.Савина [7] и «невесомого» (оперирующего понятием однородного поля природных напряжений) решения показывает, что разница в значениях перемещений не превышает 3 %. Кроме того, подобное «весомое» решение не исчерпывает точной постановки задачи для двусвязанной области (контур отверстия и внешний контур полуплоскости). Реализация строгого решения предложенного Д.И.Шерманом [10], сопряжена с серьезными математическими трудностями. Оценить влияние анизотропности позволило сравнение работы С.Г.Лехницкого [4] с достаточно известными изотропными решениями.

Все упомянутые решения оперируют «упругими» постановками задач, а значит, не способны смоделировать как физическую, так и геометрическую нелинейность деформационных процессов. Применительно к условиям строительства метрополитенов можно предложить рассмотрение упругой задачи о бесконечной плоскости (полуплоскости), ослабленной отверстием круглой (или эллиптической) формы, с вводом нелинейности (при ощутимом ее влиянии) методом упругих решений по А.А.Ильюшину [3], обладающим достаточно быстрой сходимостью.

Ввести в рассмотрение временно́й фактор можно, используя принцип Вольтерра теории наследственной ползучести, предложенный Ю.Н.Работновым (если среда хорошо вписывается в теорию линейной наследственной ползучести), с ядром ползучести, например, в виде степенной функции. Здесь было бы уместно воспользоваться разработками Ж.С.Ержаного [2], предложившего (на основании многолетних исследований поведения горных пород) феноменологическую постановку теории ползучести горных пород, которая зачастую сводится просто к применению метода переменных модулей.

Геологическое строение породной толщи над строящимися выработками Санкт-Петербургского метрополитена можно охарактеризовать как относительно простые. Подобно [5] всю вышележащую толщу разделим на обводненный, подвижный со слабым сцеплением четвертичный слой (Q) и сухой, устойчивый и пластичный протерозойский слой (P).

Протерозойские глины, как показали исследования [1], проявляют сильную анизотропию, что должно найти свое отражение в принятой модели сплошной среды. Руководствуясь целями приложения теории к условиям проходки тоннелей в кембрийских глинах Санкт-Петербурга, в качестве такой среды предлагается использовать трансверсально-изотропную среду с горизонтальной плоскостью изотропии.

Ввиду того, что протерозойская толща достаточно однородна на больших площадях, устойчива даже вблизи обнажений и имеет выдержанную слоистую текстуру, для расчета поля перемещений при сооружении в ней протяженной тоннельной выработки можно воспользоваться (подобно [5]) методами МСС. Рассчитав параметры мульды сдвижения по границе сред (протерозоя и четвертичных отложений), на основании гипотезы о равенстве объемов мульд в четвертичной толще можно определить все параметры мульды на земной поверхности, подкрепляя все прогнозы эмпирической основой.

За окончательную расчетную схему представляется целесообразным принять анизотропную (трансверсально-изотропную) невесомую полуплоскость, ослабленную круглым отверстием (достаточно удаленным от земной поверхности), на первой стадии неподкрепленным (свободным от внешних усилий), а на второй стадии подкрепленным упругим ядром, аппроксимирующим влияние крепи на НДС породного массива.

К такой расчетной схеме применим решение С.Г.Лехницкого для анизотропной (ортотропной) пластинки с эллиптическим упругим ядром [4]. Надо заметить, что аппроксимация крепи тоннеля упругим (сплошным) ядром а не, скажем, кольцом, как в работе М.П.Шереметьева, достаточно условна по своей сути. Однако, как представляется, она значительно достовернее тех многих решений, которые учитывают только радиальные или только касательные усилия на границе отверстия в анизотропной полуплоскости. Влияние крепи на массив гораздо рельефнее подобных абстрактных постановок и, кстати говоря, не исчерпывается достаточно громоздким решением М.П.Шереметьева [9], где основная условность состоит в рассмотрении тонкого кольца (гипотеза «кольцо – тонкая нить»). Точное решение С.Г.Лехницкого выглядит значительно компактнее даже некоторых «изотропных» решений (при подкреплении кольцами) [9], учитывает анизотропию среды и применимо даже в случае неоднородного внешнего поля напряжений.

При подборе упругих характеристик ядра можно рекомендовать метод математической прогонки с использованием натурных данных о деформации обделки тоннеля, полученных в условиях крепления, аналогичных рассматриваемым.

Очевидно, что данное решение С.Г.Лехницкого справедливо для обеих стадий, упомянутых выше, и как замечено [4], при отсутствии упругого ядра (выработка не закреплена) это частное решение получается из общего путем предельного перехода. Здесь же стоит заметить, что задачу можно вообще не разделять на стадии и подбирать динамические характеристики ядра ($E_{ядр}$, $\mu_{ядр}$) с учетом некоторых природных и технологических факторов (в том числе и фактора времени). Однако осуществить такой подбор пока не удалось (ввиду недостатка эмпирических данных), а потому будем рассматривать две стадии отдельно. Окончательную форму мульды сдвижения получим путем геометрического суммирования мульд двух стадий.

Предлагаемая методика. Мульду сдвижения определяют в следующей последовательности:

1) выбор расчетной схемы и модели среды (рис.1);

2) аналитическое решение в перемещениях методами МСС:

$$u = u(x, y)\ ,\ \upsilon = \upsilon(x, y)\ ;$$

3) нахождение смещений характерных точек на контуре отверстия:

$$u_A\ ,\ u_C\ ,\ u_E\ ,\upsilon_A\ ,\ \upsilon_C\ ,\ \upsilon_E\ ;$$

4) определение смещений на поверхности контакта двух сред:

$$u_1 = u_1(x)\ ,\ \upsilon_1 = \upsilon_1(x);$$

5) нахождение основных параметров мульды сдвижения на поверхности контакта двух сред:

$$\upsilon_{max}\ ,\ x_г\ ,\ S\ ;$$

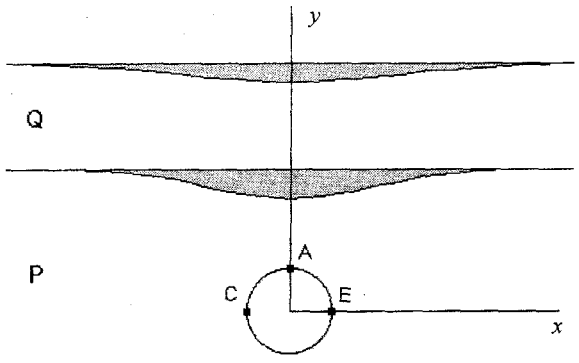


Рис.1. Расчетная схема
Q – четвертичная толща; P – протерозойская толща

6) расчет основных параметров мульды сдвижения на земной поверхности:

$$\eta_{max}, L;$$

7) построение мульды сдвижения (с использованием типовой кривой).

Аналитическое решение. Рассмотрим частный случай распределения усилий по внешнему краю, при котором напряжения в однородной полуплоскости без эллиптического ядра (с полуосями a и b) будут одинаковыми во всех ее точках:

$$\sigma_y = P; \quad \sigma_x = \lambda P; \quad \tau_{xy} = 0,$$

где P – вес столба вышележащих пород; λ – коэффициент бокового давления, для изотропных пород, согласно гипотезе А.Н.Динника, $\lambda = \nu/(1-\nu)$.

Выражения для перемещений, соответствующих только добавочным напряжениям (возникающим в нашем случае при проходке выработки), согласно [4], следующие:

$$u = 2\mathrm{Re}[(\beta_{12} - \beta_{11}\beta^2)A_1\frac{1}{\zeta_1} + (\beta_{12} - \beta_{11}\delta^2)B_1\frac{1}{\zeta_2}];$$

$$\upsilon = 2\mathrm{Re}[(\beta_{12} - \frac{\beta_{22}}{\beta})A_1\frac{1}{\zeta_1} + i(\beta_{12}\delta - \frac{\beta_{22}}{\delta})B_1\frac{1}{\zeta_2}], \quad (1)$$

где

$$\zeta_k = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}}{a - i\mu_k b};$$

$$k = 1, 2.$$

Найдем коэффициенты A_1 и B_1 [4]:

$$A_1 = \frac{1}{2(\beta+\delta)}[(A - \lambda P)b - (B - P)a\delta];$$

$$B_1 = -\frac{1}{2(\beta+\delta)}[(A - \lambda P)b - (B - P)a\beta].$$

Из двух систем уравнений [4] остается лишь первая ($t = 0 \Rightarrow C = 0$):

$$A[\beta_{11}(\beta+\delta) + \beta'_{11}] - B[\beta_{11}\beta\delta + \beta_{12} - \beta'_{12}] = \lambda P\beta_{11}[(\beta+\delta)+1] - P\beta_{11}\beta\delta;$$

$$A[\beta_{12}\beta\delta + \beta_{22} - \beta'_{12}\beta\delta] - B[\beta_{22}(\beta+\delta) + \beta'_{22}\beta\delta] = -\lambda P\beta_{22} - P\beta_{22}[(\beta+\delta)+\beta\delta].$$

Для определения A и B можно воспользоваться формулами Крамера:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \qquad B = \frac{\Delta_B}{\Delta},$$

где

$$\Delta_A = P\{[\beta_{11}\beta\delta + \beta_{12} - \beta'_{12}] \times [-\lambda\beta_{22} - \beta_{22}(\beta+\delta+\beta\delta)] - \beta_{11} \times [\lambda(\beta+\delta+1) - \beta\delta] \times [\beta_{22}(\beta+\delta) + \beta'_{22}\beta\delta]\};$$

$$\Delta_B = P\{\beta_{11}[\lambda(\beta+\delta+1) - \beta\delta] \times [\beta_{12}\beta\delta + \beta_{22} - \beta'_{12}\beta\delta] - [\beta_{11}(\beta+\delta) + \beta'_{11}] \times [-\lambda\beta_{22} - \beta_{22}(\beta+\delta+\beta\delta)]\};$$

$$\Delta = [\beta_{11}\beta\delta + \beta_{12} - \beta'_{12}] \times [\beta_{12}\beta\delta + \beta_{22} - \beta'_{12}\beta\delta] - [\beta_{11}(\beta+\delta) + \beta'_{11}] \times [\beta_{22}(\beta+\delta) + \beta'_{22}\beta\delta].$$

Нетрудно заметить, что при реализации предельного перехода $E_{ядр} \to 0$ получим $A = B = 0$.

Комплексные параметры μ [4] являются корнями характеристического уравнения $\mu^4 + m\mu^2 + k^2 = 0$ и имеют вид

$$\mu_1 = i\beta;\ \mu_2 = i\delta\ (\beta > 0, \delta > 0).$$

Для условий плоской деформации коэффициенты характеристического уравнения вычисляются по формулам:

$$k^2 = \frac{(E_1 / E_2) - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2};$$

$$m = \frac{(E_1 / G_2) - 2\nu_2(1 + \nu_1)}{1 - \nu_1^2}.$$

где E_1, E_2 – модули упругости для главных направлений, ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона.

Показатели анизотропии среды:

$$k = \sqrt{k^2}; \qquad n = \sqrt{2k + m}.$$

Постоянные β выражаются через упругие константы:

$$\beta_{11} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1};\ \beta_{22} = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2};$$

$$\beta_{12} = \frac{-\nu_2(1 + \nu_1)}{E_1}.$$

Пусть

$$R_1 = \sqrt{[(x^2 - a^2) + \beta^2(b^2 - y^2)]^2 + 4\beta^2 x^2 y^2};$$

$$R_2 = \sqrt{[(x^2 - a^2) + \delta^2(b^2 - y^2)]^2 + 4\delta^2 x^2 y^2};$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{x^2 - a^2 + \beta^2(b^2 - y^2)}{R_1};$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{x^2 - a^2 + \delta^2(b^2 - y^2)}{R_2};$$

$$D_{11} = 2\,\frac{\beta_{12} - \beta_{11}\beta^2}{a - b\beta} A_1;$$

$$D_{12} = \frac{\beta_{12} - \beta_{11}\delta^2}{a - b\delta} B_1;$$

$$D_{21} = 2\,\frac{\beta_{12}\beta^2 - \beta_{22}}{a - b\beta} A_1;$$

$$D_{22} = 2\,\frac{\beta_{12}\delta^2 - \beta_{22}}{\delta(a - b\delta)} B_1;$$

$$C_1 = x^2 - a^2 + \beta^2(b^2 - y^2);$$

$$C_2 = x^2 - a^2 + \delta^2(b^2 - y^2).$$

Окончательно после отделения вещественной части и некоторых преобразований с учетом симметрии имеем

$$\begin{aligned} u &= D_{11}\left(x - \sqrt{\frac{R_1 + C_1}{2}}\right) + \\ &+ D_{12}\left(x - \sqrt{\frac{R_2 + C_2}{2}}\right); \\ \upsilon &= D_{21}\left(\beta y - \sqrt{\frac{R_1 - C_1}{2}}\right) + \\ &+ D_{22}\left(\delta y - \sqrt{\frac{R_2 - C_2}{2}}\right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Выразим упругие смещения наиболее характерных точек на внутреннем контуре – контуре отверстия (рис.1). В точке A ($x = 0$, $y = b$)

$$\upsilon_A = -\left[D_{21}(\beta b - a) + D_{22}(\delta b - a)\right];$$

$$u_A = 0.$$

В точках C и E ($x = a$, $y = 0$)

$$\upsilon_A = 0;$$

$$u_A = D_{11}\, a + D_{12}\, a.$$

Упругие смещения на контакте двух сред (внешний контур $y = h$)

$$\begin{aligned} u &= D_{11}\left(x - \sqrt{\frac{R_1 + C_1}{2}}\right) + \\ &+ D_{12}\left(x - \sqrt{\frac{R_2 + C_2}{2}}\right); \\ \upsilon &= D_{21}\left(\beta h - \sqrt{\frac{R_1 - C_1}{2}}\right) + \\ &+ D_{22}\left(\delta h - \sqrt{\frac{R_2 - C_2}{2}}\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

Итак, теперь мы можем определить основные параметры мульды сдвижения на поверхности контакта.

Максимальное упругое смещение контура контакта ($y = h$, $x = 0$)

$$u = 0;$$

$$\upsilon = D_{21}\,[\beta h - \sqrt{a^2 - \beta^2 (b^2 - h^2)}\,] + $$
$$+ D_{22}\,[\delta h - \sqrt{a^2 - \delta^2 (b^2 - h^2)}\,].$$

Найдем площадь полумульды на верхней границе полуплоскости (на контакте двух сред):

$$S = \int_0^{x_\Gamma} \upsilon (1 - u'_x) dx$$

или $S = - D_{21} I_1 - D_{22} I_2$,

где

$$I_1 = \int_0^{x_\Gamma} (\beta y - \sqrt{\frac{R_1 - C_1}{2}})(1 - u'_x x) dx\ );$$

$$I_2 = \int_0^{x_\Gamma} (\delta y - \sqrt{\frac{R_2 - C_2}{2}})(1 - u'_x x) dx\ ).$$

Дифференцируя первое из уравнений (2), получим

$$u'_x = D_{11} (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \times$$
$$\times \frac{2x(x^2 - a^2) + \beta^2 (b^2 + y^2) + R_1}{R_1 \sqrt{R_1 + C_1}}) +$$
$$+ D_{12} (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \times$$
$$\times \frac{2x(x^2 - a^2) + \delta^2 (b^2 + y^2) + R_2}{R_2 \sqrt{R_2 + C_2}}).$$

Теперь определим основные параметры мульды оседания земной поверхности:

$$L = x_\Gamma + h_1 \operatorname{ctg}(\theta);$$

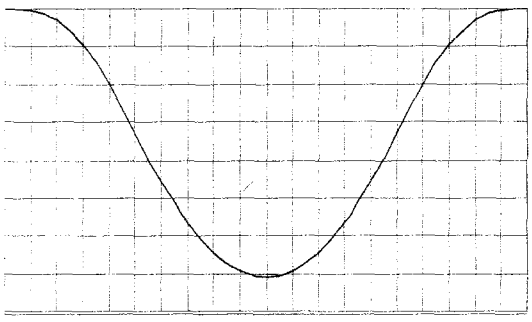
(4)

$$\eta_{max} = \frac{S}{L k_{т.к}}.$$

где $k_{т.к}$ – коэффициент за типовую кривую.

Имея основные параметры мульды сдвижения, остается лишь выяснить распределение осадок по длине мульды, для чего воспользуемся уже упомянутым методом типовых кривых (МТК). Применительно к горно-геологическим условиям Санкт-Петербурга известны две типовые кривые: из [5] и из [6] (рис.2). По-видимому, форму первой из них определяет проходка горизонтальных выработок станционных комплексов пилонного и колонного типов, о которых идет речь в работе Ю.А.Лиманова. Форма второй определяется проходкой как горизонтальных, так наклонных выработок метрополитена, о чем свидетельствуют работы авторов [6]. Анализ формы кривых указывает на наличие дополнительной просадки центральной части мульды у второй кривой. Это

а



б

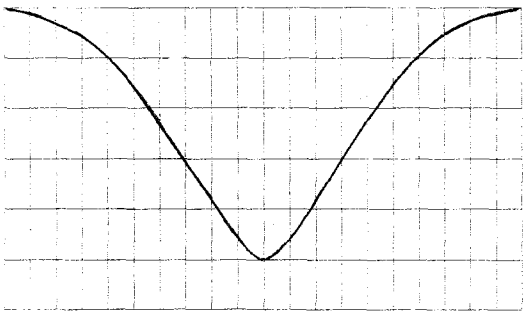


Рис.2. Типовые кривые: по Лиманову [5] (*а*) и по Подакову [6] (*б*)

можно объяснить присутствием в выборке измеренных сдвижений над эскалаторными ходами, с их увеличенным вертикальным сечением (из-за наклона) и неблагоприятным геометрическим расположением в толще пород (выход выработки в ослабленные четвертичные отложения).

На основании вышеизложенного можно заключить, что для наших расчетов приемлемой является первая типовая кривая из [5].

Построение мульды оседания земной поверхности на основе МТК не представляет сколько-нибудь значимой трудности, а потому останавливаться на этом мы не будем. Заметим лишь, что в работе Ю.А.Лиманова [5] типовая кривая выражена в нетрадиционом аналитическом виде:

$$\eta = \eta_{max}\left(1-\frac{x}{L}\right)^4 e^{4\frac{x}{L}} .$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Безродный К.П.* Особенности деформирования протерозойских глин / К.П.Безродный, С.Н.Сильвестров, Ю.М.Карташов / / Метрострой. 1982. № 6.

2. *Ержанов Ж.С.* Ползучесть осадочных горных пород. Теория и эксперимент / Ж.С.Ержанов, А.С.Сачинов, Г.Н.Гуменюк, Ю.А.Векслер, Г.А.Нестеров. Алма-Ата: Наука, 1970.

3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.

4. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.

5. *Лиманов Ю.А.* Осадки земной поверхности при сооружении тоннелей в кембрийских глинах / ЛИИЖТ. Л., 1957.

6. *Подаков В.Ф.* Пособие по проектированию мероприятий для защиты эксплуатируемых зданий и сооружений от влияния горнопроходческих работ при строительстве метрополитена / В.Ф.Подаков, Ю.Ф.Соловьев, В.Н.Каустин и др. Л.: Стройиздат, 1973.

7. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. М.: Наука, 1968.

8. *Савин Г.Н.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками / Г.Н.Савин, В.И.Тульчий. Киев: Наукова думка, 1971.

9. *Шереметьев М.П.* Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием // Инженерный сборник. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 14.

10. *Шерман Д.И.* Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961.