А.П.Господариков, В.В.Карпенко, Г.А.Колтон

УДК 624.042

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

Предложены конечно-разностные и численно-аналитические методы решения динамических и упруго-пластических задач геомеханики.

С помощью метода конечных разностей и на основе методических принципов математического моделирования физических процессов определены эпюры компонент тензора, характеризующего динамические поля напряжений в горных породах вокруг выработки сводчатого типа при косом воздействии на нее волны напряжений. С помощью численно-аналитического метода сконструирован итерационный процесс, позволяющий рассчитывать компоненты тензора напряжений и скоростей пластического течения горных пород вокруг выработок на больших глубинах. Достоверность и обоснованность метода подтверждена сопоставлением полученных расчетов с результатами решений, найденных другими авторами, и экспериментальными данными.

Finite-difference and numerically-analytical principles of solution of dynamic and elasto-plastic tasks of geomechanics have been suggested. Using finite-difference method and principles of mathematical modelling of physical processes, epures of tensor components, that characterise dynamic stress fields in rocks, surrounding arched drifts under oblique stress wave influence, have been determined. Applying numerically-analytical method, an iterative process has been developed, that enables calculation of stress tensor components and rocks afterflow rate around deep excavations. Reliability and validity of the principles have been confirmed by comparison of the received results with the results obtained by other researchers and experimental data.

* * *

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ С ГОРНЫМИ ВЫРАБОТКАМИ

Модель объекта исследования. Примем, что горная порода вокруг выработки является идеально упругой средой, а генерируемая взрывом цилиндрического заряда ВВ волна напряжений – плоской упругой продольной волной. Параметры эпюры такой волны находим по приведенным в работе [1] аналитическим зависимостям. После соприкосновения фронта прямой волны с выработкой кривизной ее фронта и изменением параметров эпюры волны пренебрегаем. Выработку в горной породе аппроксимируем бесконечной цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения с образующей, параллельной фронту волны. Типовая форма поперечного сечения одной из горных выработок и схема натекания прямой волны напряжений на них показана на рис.1.

Примем касательную компоненту тензора напряжений в возмущенной области за фронтом волны $\sigma_{nl}^{(0)}$ равной нулю, а компоненты нормальной и тангенциальной составляющих тензора напряжений соответственно

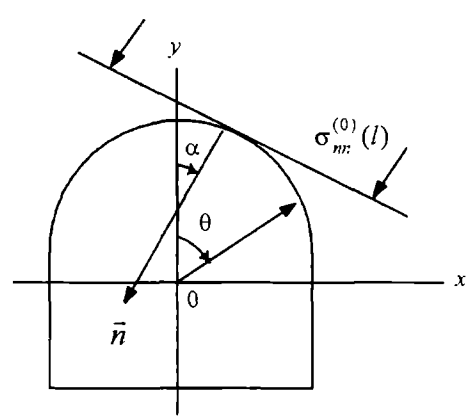


Рис.1. Схема натекания волны

$$\sigma_{nn}^{(0)} = -\sigma_0(l)H_0(l);\ \sigma_{tt}^{(0)} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_0(l)H_0(l);$$

$$l = c_1 t + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha,$$

где ν – коэффициент Пуассона; l уравнение фронта волны; $H_0(z)$ – функция Хевисайда; $\sigma_0(z)$ – эпюра натекающей на полость продольной волны [1].

Математическая модель процесса взаимодействия волны напряжений с горной выработкой. В результате взаимодействия прямой волны с полостью в упругой среде формируются отраженная и дифракционная волны, компоненты $\sigma_{xx}^{(1)}, \sigma_{yy}^{(1)}, \sigma_{xy}^{(1)}$ тензора напряжений которых удовлетворяют уравнениям динамического равновесия [6]:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial y} = \rho\ddot{U}_x,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial y} = \rho\ddot{U}_y, \quad (1)$$

где ρ – плотность среды.

На контуре Γ полости нормальная и касательная компоненты суммарного тензора напряжений равны нулю:

$$(\sigma_{nn}^{(0)} + \sigma_{nn}^{(1)})\,|_{\Gamma} = 0,\ (\sigma_{nt}^{(0)} + \sigma_{nt}^{(1)})\,|_{\Gamma} = 0$$

На бесконечности при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ компоненты тензора отраженной и дифракционной волн удовлетворяют условиям

$$\sigma_{xx}^{(1)} \to 0,\ \sigma_{yy}^{(1)} \to 0,\ \sigma_{xy}^{(1)} \to 0,$$

а начальные условия для них и параметров движения среды в невозмущенной области примем нулевыми.

Компоненты тензора напряжений отраженной и дифракционной волн связаны с компонентами тензора плоской деформации законом Гука [6].

Алгоритм численного решения задачи. Алгоритм задачи основан на ее редукции к разностному аналогу. Для его построения перейдем к безразмерным переменным и отнесем все величины с размерностью длины к радиусу круга, эквивалентного площади поперечного сечения цилиндрической полости S, $R_1 = \sqrt{S/\pi}$ Тогда время – R_1/c_1, напряжения – ρc_1^2 где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ скорость продольных волн в упругой среде; λ и μ параметры Ламе упругой среды.

В безразмерных переменных уравнения динамического равновесия (1) и продифференцированный по времени закон Гука образуют полную систему пяти уравнений для определения динамических параметров, характеризующих возмущенное движение упругой среды. В координатах [4] эта система в матричной форме имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B\frac{\partial U}{\partial x} + qC\frac{\partial U}{\partial\theta} + pDU = 0,$$

где $U = (V_n, V_t, \sigma_{nn}, \sigma_{tt}, \sigma_{nt})^{\mathrm{T}}$ – вектор возмущенного состояния среды; B, C и D – квадратные матрицы пятого порядка, элементы которых, отличные от нуля,

$$b_{13} = b_{25} = b_{31} = c_{15} = c_{24} = c_{42} = -d_{14} =$$
$$= d_{44} = -1,\ b_{41} = c_{32} = d_{31} = -(1 - 2/\gamma^2);$$
$$b_{52} = c_{51} = -d_{52} = -1/\gamma^2,\ d_{25} = -2,$$
$$\gamma = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\mu}$$

Величины p и q определяются равенствами

$$p = 1/(R + x),\ q = pR/L,\ L = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}$$

в которых R и $r(\theta)$ радиус кривизны и уравнение контура Γ поперечного сечения полости соответственно.

Разностная схема численного решения задачи основывается на методе расщепления С.К.Годунова [2]. Для рассматриваемого случая она может быть записана в виде:

$$U^{jn} = (E - \frac{\tau}{h_x}\Phi_x - \frac{\tau}{h_\theta}q_{jn}\Phi_\theta - \tau p_{jn}D)U +$$
$$+ \frac{\tau}{h_x}(\Phi_x^+ U_{j-1,n} + \Phi_x^- U_{j+1,n}) + \quad (2)$$
$$+ \frac{\tau}{h_\theta}q_{jn}(\Phi_\theta^+ U_{j,n-1} + \Phi_\theta^- U_{j,n+1}),$$

где τ, h_x и h_θ – шаги интегрирования по t, x и θ; индексами j и n отмечены значения соответствующих величин в точке $M_{jn}((j - 1/2)h_x,\ (n - 1/2)h_\theta)$, причем нижние индексы соответствуют моменту времени t, а верхние моменту $t + \tau$; Φ_x, Φ_θ, Φ_x^+

Φ_x^- Φ_0^+, Φ_θ^- постоянные матрицы, зависящие только от γ.

Соотношение (2) позволяет найти вектор U только во внутренних ячейках расчетной схемы, отвечающих значениям индексов $1 \le j \le J$, $1 \le n \le N$. Для определения искомых величин в граничных ячейках необходимо воспользоваться граничными условиями. Введя в точках контура Γ фиктивные ячейки $(0; k)$, положим

$$U_{0n} = F_U U_{1n} + F_G U_n^0,$$

где U_n^0 вектор состояния среды за фронтом натекающей волны, а постоянные матрицы F_U, F_G выбраны так, чтобы при использовании (2) граничные условия на контуре Γ выполнялись автоматически.

Начальное условие имеет вид

$$U_{jn} \mid_{t=0} = 0.$$

Условия на бесконечности будут выполняться, если размеры области интегрирования выбрать так, чтобы за расчетное время T отраженные волны не успели дойти до контура Γ_1, ограничивающего эту область.

Анализ результатов расчета. Анализ динамических полей напряжений горных пород около цилиндрической выработки сводчатой формы (рис.1) выполнялся для случаев натекания на нее упругих продольных волн под углами $\alpha = 0°$ и $\alpha = 45°$

Расчеты напряженного состояния горной породы вокруг выработки сводчатой формы с закругленными углами у подошвы (ширина выработки 4,6 м, радиус купола 2,3 м, максимальная высота выработки 4,5 м, радиус закругления r ~0,4 м) выполнялись для волны напряжений с амплитудой $\sigma_0 = 11{,}5$ МПа и длительностью 1,2 мс и показали, что при $\alpha = 0°$ суммарные тангенциальные напряжения σ_{tt} достигают своих наибольших значений в угловых областях $90° < \theta < 120°$ (рис.2)и $240° < \theta < 270°$, причем в этих областях эпюры σ_{tt} практически не изменяются при увеличении взятого по нормали к поверхности полости расстояния x от 0 до $1{,}8R_1$. Максимальные амплитуды наибольших значений напряжений σ_{tt} примерно в 1,26 раза превышают максимальные амплитуды натекающей на выработку прямой волны. Можно предположить, что в этих областях будет наблюдаться разрушение горных пород, обусловленное их сжатием.

Суммарные нормальные напряжения $\sigma_{nn} = \sigma_{nn}^{(0)} + \sigma_{nn}^{(1)}$ на поверхности выработки имеют нулевые значения, так как поверхность выработки свободна от нормальных напряжений. Своих максимальных значений амплитуды σ_{nn} достигают внутри породного массива в угловой области $-30° < \theta < 30°$ на расстоянии $x \sim (0{,}8 \div 1{,}2)R_1$ от полости (рис.3), взятом по нормали к ее поверхности. Можно предположить, что в этих областях будет формироваться зона разгрузки и обрушение кровли. В угловых областях $150° < \theta < 210°$ на расстояниях $x \cong 1{,}8R_1$,

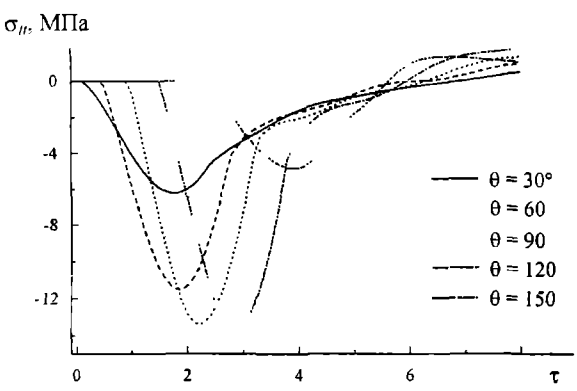


Рис.2. Суммарные тангенциальные напряжения на контуре выработки ($x = 0$)

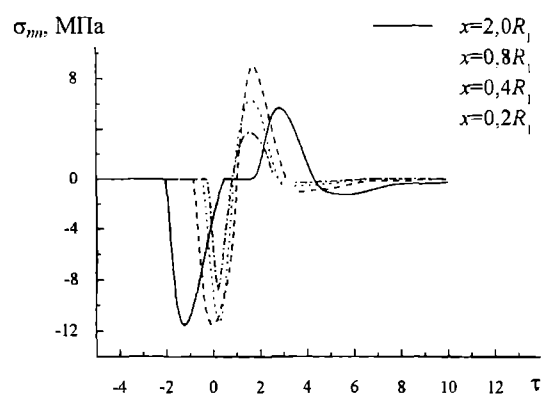


Рис.3. Суммарные нормальные напряжения в породе

взятых по нормали к поверхности выработки, максимальные значения амплитуд нормальных напряжений оказались примерно в 2 раза меньше максимальных значений амплитуд в прямой волне.

Суммарные касательные напряжения $\sigma_{nt} = \sigma_{nt}^{(0)} + \sigma_{nt}^{(1)}$ на поверхности полости имеют нулевые (или близкие к ним) значения. Их максимальные абсолютные значения в 3-4 раза меньше максимальных значений σ_{nn} и σ_{tt} и локализуются в угловых областях, близких к θ, равном 30; 150; 210 и 330° на расстояниях $x \cong R_1$ взятом по нормали к поверхности выработки.

При натекании прямой волны на выработку сводчатой формы под углом $\alpha = 45°$ качественное и количественное распределение динамических полей напряжений практически совпадает с тем, которое формируется около такой же выработки при натекании на нее упругой волны под углом $\alpha = 0°$ Основное отличие двух расчетных случаев состоит лишь в том, что все характерные угловые области сдвинуты относительно луча $\theta = 0°$ примерно на 45° Кроме того, максимальные значения амплитуд тангенциальных значений σ_{tt} на контуре выработки в угловых областях, близких к лучам $\theta \cong 135°$ и $\theta \cong 315°$, примерно в 1,35 раза превышают максимальные значения амплитуды в прямой волне. Именно на луче $\theta = 45°$ на расстоянии $x \sim (0{,}8\text{-}1{,}2)R_1$ от полости возможно разрушение породы и обрушение кровли. Другие максимальные значения динамических параметров полей напряжений и компонентов массовых скоростей около двух выработок при $\alpha = 45°$ и $\alpha = 0°$ аналогичны (различия несущественны).

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОНВЕРГЕНЦИИ КОНТУРА ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

Упругопластические задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) возмущенного массива горных пород представляют весьма обширный раздел современной горной геомеханики. Тенденция разработки полезных ископаемых на больших глубинах предопределяет важность как теоретических исследований в этом направлении, так и необходимость получения решения различных прикладных задач геомеханики.

В рамках разработанного метода решения задач горной геомеханики, базирующемся на известном вариационном методе В.З.Власова, в рамках теории малых упругопластических деформаций Генки – Ильюшина предлагается следующий алгоритм численного решения нелинейных задач горной геомеханики [3].

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений совместно с граничными условиями, описывающая НДС горного массива и удовлетворяющая известным гипотезам упрочнения теории малых упругопластических деформаций [4], представляется в виде общего нелинейного операторного уравнения в вещественном банаховом пространстве E [5]

$$T(v) = 0, \qquad (3)$$

где под элементом v понимается вектор-функция решения, компоненты которой суть кусочно-непрерывные вместе со вторыми производными ограниченные функции, определенные на промежутке $[0, h]$ (здесь h – толщина горного массива).

Дифференциальный оператор T, символизирующий левую часть исходной системы уравнений, является дифференцируемым по Фреше [5] нелинейным оператором и действующим в том же банаховом пространстве E.

Далее в операторное уравнение (3) вводится искусственно некоторый числовой параметр λ, изменяющийся непрерывно. Начиная с некоторого значения $\lambda = \lambda_0$,

$$T(v,\lambda) = 0;\ \lambda_0 \le \lambda \le \lambda^*, \qquad (4)$$

причем выполняются следующие равенства:

$$T(v_0,\lambda_0) = 0;\ T(v,\lambda^*) \equiv T(v).$$

Предлагается следующий способ нахождения однопараметрического семейства $v(\lambda)$ элементов из E: решение $v(\lambda)$ строится с помощью итерационного процесса дискретного продолжения по параметру λ, начиная

с известной точки (v_0, λ_0). Затем в уравнении (4) осуществляется переход к эквивалентной задаче

$$v = A(v,\lambda),$$

для которой простейший одношаговый итерационный процесс имеет вид:

$$\begin{cases} v_k^0 = v_{k-1},\ v_k^n = A(v_k^{n-1}, \lambda_k),\ n = 1, 2,... \\ v_k^n = \lim\limits_{n\to\infty} v_k^n,\ k = 1, 2,... \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что для нелинейно деформируемых упругих систем переход от (3) к (4) не требует специальных приемов, так как при нагрузках, равных нулю, решение тоже будет нулевым. В этом случае нет затруднений в нахождении начальной точки для организации итерационного процесса (5).

Конструирование итерационного процесса (5) осуществляется здесь на основе известного метода линеаризации Ньютона – Канторовича [6].

После введения индексов итерации n, n-1 в полученное уравнение линеаризации, окончательно получим

$$T_v'(v_k^{n-1}, \lambda_k)v_k^n + T(v_k^{n-1}, \lambda_k) - T_v'(v_k^{n-1}, \lambda_k)v_k^{n-1} = 0.$$

Последовательность v_k^n определяется здесь путем решения при каждом n соответствующего линейного операторного уравнения (в нашем случае – линейная краевая задача), а с учетом дискретности задачи – из решения системы алгебраических уравнений.

Предложенный алгоритм успешно апробирован на ряде важных задач горной геомеханики. Сопоставление полученных результатов решения задач с результатами других авторов, а также с экспериментальными данными, подтверждает достаточную обоснованность полученных решений [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровиков В.А.* Волны напряжений в обводненном трещиноватом массиве / В.А.Боровиков, И.Ф.Ванягин, М.Г.Менжулин, С.В.Цирель / СПГГИ. СПб, 1989.

2. *Годунов С.К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К.Годунов, А.В.Забродин и др. М.: Наука, 1976.

3. *Господариков А.П.* Численно-аналитический метод моделирования напряженного состояния нелинейно-упругого неоднородного массива при разработке пологих пластовых месторождений // Наука в Санкт-Петербургском государственном горном институте (техническом университете): Научные сообщения / СПГГИ. СПб, 1999.

4. *Кочин Н.Е.* Теоретическая гидромеханика / Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч.1, 2.

5. *Красносельский М.А.* Приближенное решение операторных уравнений / М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко и др. М.. Наука, 1969.

6. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.. Судпромгиз, 1958.