К.В.ХАЛКЕЧЕВ
Карачаево-Черкесский государственный технологический институт,
Черкесск, Россия

ДИНАМИКА СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА ТРЕЩИН

Длительное время развитию наших представлений о процессе разрушения мешала неполнота математического описания условий вблизи конца трещины. В последние годы этот предмет привлек значительное внимание исследователей, что привело к некоторым важным результатам. Однако эти теории также не способны с достаточной полнотой описать закономерность роста трещин.

В данной работе внимание сосредоточено на исследовании условий равновесного и неравновесного распространения трещины в данном месте и предсказании закономерности ее дальнейшего продвижения, а также на механико-математическом обосновании фрактальности поверхности разрушения.

Макроразрушение, как правило, проявляется в виде разрывов первоначально сплошного тела, т.е. в образовании новых поверхностей (изломов). Случайный характер всех без исключения опытных данных по разрушению указывает на то, что в основе процесса лежат случайные механизмы. Проявляются они как в том, что значения разрушающих нагрузок являются случайными величинами, так и в случайном характере поверхностей изломов, образующихся при разрушении.

Опыт показывает, что сколь бы ни было велико число испытываемых образцов в серии, тождественные изломы не наблюдаются. Это означает, что при сколь угодно малом изменении управляющего параметра происходит перестройка «портрета» излома. Поверхность трещины в таких поликристаллических агрегатах, как минералы, горные породы и конструкционные материалы, а также поверхности разломов в земной коре весьма неровны и иррегулярны. Мальдельбратом и другими авторами [2, 3, 6-9] было установлено, что структура этих поверхностей превосходно моделируется фрактальными поверхностями.

Экспериментальные методы наблюдения дислокаций при исследовании распространения трещин [4] указывают на то, что за закономерность распространения последних ответственно взаимодействие дефектов с концом трещин. Так, замечена связь между скоростью трещины с концентрацией дислокаций. В местах поверхности скола, где рост трещины скола резко замедлялся или прекращался, травление обнаружило высокую концентрацию дислокаций. В свою очередь, существуют экспериментальные данные [5], указывающие на то, что имеется соответствие между структурой поверхности разрушения и стадиями разрушения, на каждом из которых скорость распространения трещины разная. Таким образом, анализ исследуемого объекта позволяет построить модель распространения трещины.

Распространение трещины в поликристаллическом агрегате, в частности в горных породах, обусловлено взаимодействием ансамбля микродефектов с концом трещины. Под дейст-

вием всевозрастающих внешних нагрузок и самодиффузии происходит дрейф микродефектов. Поскольку скорости микродефектов распределены хаотически, можно сказать, что число микродефектов, движущихся в одном направлении, примерно равно числу микродефектов, движущихся в обратном направлении. Это означает, что конец трещины будет поглощать больше те микродефекты, скорость которых направлена навстречу трещине, так как она встречает их чаще. С увеличением размеров трещины число поглощаемых микродефектов, скорость которых направлена от трещины, очевидно, будет расти.

Усталостное разрушение больше будет обусловлено дрейфом микродефектов за счет самодиффузии. При хрупком разрушении относительно большую роль играют микродефекты в виде дырок (вакансии в решетке кристалла, различные поры и пустоты), при пластическом – дислокации. Формально математическая теория этих двух видов разрушения оказывается одинаковой.

Пусть ℓ – первоначальная длина трещины; S – расстояние между движущимися в направлении конца трещины микродефектами. Предполагается, что длина трещины намного больше, чем расстояние между микродефектами.

Через $y(t)$ обозначим координату периодически появляющихся микродефектов перед концом трещины, отсчитываемую навстречу трещине, в момент t. Введем «фазу» при n-м поглощении в виде

$$x_n = \{t_n / T\}, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

где t_n – момент времени поглощения трещины n-го микродефекта; T – период между поглощениями микродефектов.

Не нарушая общности, $y(t)$ представим в виде параболического закона

$$y(t) = v_0 T x (1 - x), \tag{2}$$

где v_0 – параметр, имеющийся размерность скорости.

Поскольку

$$y(t) = y(0) = y(T) = 0, \quad y(0{,}5T) = S,$$

из (1) и (2) следует соотношение

$$T = 4S/v_0 \tag{3}$$

и закон изменения скорости микродефектов

$$v(t) = v_0 (1\text{-}2x). \tag{4}$$

Формулы (1)-(4) полностью определяют движение микродефектов.

Пусть теперь $V(t)$ – скорость трещины, а V_n – ее скорость перед поглощением n-го микродефекта. С учетом того, что $S/l << 1$ и $V >> v_0$, можно записать следующие уравнения в конечных разностях:

$$V_{n+1} = V_n + 2v_0(1-2x);$$

$$x_{n+1} \approx \left\{ x_n + \frac{\ell v_0}{2SV_n} - \frac{\ell v_0^2}{SV_n}(1-2x_n) \right\}, \tag{5}$$

отсюда преобразование растяжения имеет вид

$$\left|\frac{\delta x_{n+1}}{\delta x_n}\right| = \left|1 + \frac{2\ell v_0^2}{S V_n^2}\right|,$$

из которого следует, что существует условие

$$H = \frac{2\ell v_0^2}{S V_n^2} \geq 1, \qquad (6)$$

при котором появляется стохастичность, и, наоборот, условие $H < 1$ является условием устойчивости или квазипериодического движения.

Таким образом, условия стохастичности динамической системы «трещина – ансамбль микродефектов» обоснована как экспериментально, так и теоретически. Однако одномерность рассматриваемой задачи, обеспечивающая рассмотрение динамической системы с одной степенью свободы, делает невозможным хаотическое движение. Это противоречие, очевидно, дает повод усомниться в размерности изучаемой динамической системы в стохастическом режиме.

Понятие «размерность», или число измерений, не вызывает особых затруднений, пока речь идет об устойчивом режиме. Этой стадии соответствует гладкая «зеркальная зона» раскрытия трещины, структура поверхности которой имеет геометрический образ в виде линии, имеющей размерность 1.

При определении размерности совокупности микродефектов, если даже они расположены на одной линии, необходима точность. В этом случае совокупность микродефектов имеет геометрический образ в виде множества точек. Это множество точек может иметь различные размерности.

Любое конечное множество точек имеет нулевую размерность. Последнему условию, очевидно, соответствует случай, когда перед концом трещины на линии расположились и движутся к ней конечное число микродефектов. Одномерность задачи не нарушается, и трещина распространяется не стохастически, т.е. устойчиво.

Множество точек, образующих отрезок, имеют размерность 1. Этому условию соответствует случай, когда расстояние S между микродефектами равно нулю, т.е. микродефекты плотно прилегают друг к другу, что, к примеру, может соответствовать сплетению дислокаций. Одномерность также не нарушается, но трещина не распространяется, т.е. скорость ее становится равной нулю. Действительно, из критерия (6) вытекает ограничение на максимально возможную скорость трещины

$$V \leq \sqrt{2\ell v_0^2 / S}, \qquad (7)$$

из которого следует равенство нулю скорости распространения трещины при $v_0 = 0$, что имеет место при остановке микродефектов, которая наступает, прежде чем расстояние S между микродефектами станет равным нулю.

Геометрический образ микродефектов в виде точечных множеств – может быть, одно из наиболее известных множеств такого типа. Оно было построено Г.Кантором [1], его размерность $d = \ell_{n2} / \ell_{n3} = 0{,}63093$, т.е. является фракталом. А множества, обладающие фрактальной структурой, возникают при анализе систем, в которых существуют стохастические режимы, наблюдающиеся при определенных условиях.

Очевидно, фрактальность трещины наблюдается при условии $H \geq 1$, что соответствует стохастической модели продолжения трещины, в которой зона перед концом трещины покрыта микродефектами. Причем геометрический образ представляет собой систему множеств, расположенных на пучке линий, смыкающихся к концу трещины, каждая из которых является фракталом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гелбаум Б.* Контрпримеры в анализе / Б.Гелбаум, Д.Олмстед. М.: Мир, 1967. 229 с.

2. *Лунг Ч.* Фракталы и разрушение металлов с трещинами // Фракталы в физике. М.: Мир, 1995. С. 245-247.

3. *Луис Э.* Фрактальная природа трещин / Э.Луис, Ф.Гинса, Ф.Флорес // Фракталы в физике. М.: Мир, 1995. С. 260-265.

4. *Паттерсон Р.Л.*. Экспериментальные методы наблюдения дислокаций / Р.Л.Паттерсон, Х.Вильсдорф. Разрушение. М.: Мир, 1973. С. 204-264.

5. *Родионов В.Н.* Основы геомеханики / В.Н.Родионов, И.А.Сизов, В.М.Цветков. М.: Недра, 1986. 301 с.

6. *Стаховский И.Р.* Масштабные инварианты в сейсмотектонике / И.Р.Стаховский, Т.П.Белоусов // ДАН РФ. 1966. Т. 347, № 42. С. 252-255.

7. *Стаховский И.Р.* Моделирование агрегации трещин в неравновесной среде // Математическое моделирование. 1995. Т.7. № 6. С. 54-63.

8. *Шерман С.И.* Новые данные о фрактальной размерности разломов и сейсмичности в Байкальской рифтовой зоне / С.И.Шерман, А.С.Гладков // ДАН РФ. 1998. Т. 361, № 5. С. 685-688.

9. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. Freem. San-Fransisco. 1983. P. 25, 29, 469.