



УДК 528.236.2:51-71

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА СФЕРЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОДЕЗИИ И НАВИГАЦИИ

Г.И.ХУДЯКОВ

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

Развиты положения и формулы аналитической геометрии на сферической поверхности Земли применительно к основным задачам глобальной геодезии и навигации. Для этого рассмотрены особенности внутренней геометрии сферы и свойства некоторых кривых первого, второго и высших порядков на ней. Доказано, что сферическая гипербола и парабола являются сферическими эллипсами с определенными параметрами. Введены декартовы координаты на сфере и установлена их связь со сферическими полярными координатами. Путем центрального проецирования точек сферы на касательную плоскость введена соответствующая этой сфере эллиптическая плоскость с бельтрамиевыми координатами на ней. Приведены основные формулы аналитической геометрии на эллиптической плоскости, соответствующие геометрии на спроецированной сфере. Выведены некоторые формулы для кривых первого, второго и высших порядков на сфере.

Ключевые слова: сфера, аналитическая геометрия, внутренняя геометрия, эллиптическая плоскость, геометрия Римана, декартовы координаты, полярные координаты, тангенциальные координаты

Как цитировать эту статью: Худяков Г.И. Развитие методов аналитической геометрии на сфере для решения задач геодезии и навигации // Записки Горного института. 2017. Т. 223. С. 70-81. DOI: 10.18454/PMI.2017.1.70

Введение. В геодезии и картографии, в радионавигации и радиолокации, в судовождении и в авиации решение геометрических задач на поверхности Земли обычно выполняется на определенном референц-эллипсоиде, на котором введены геодезические координаты (B, L, H) . Основным методом решения такого рода задач является проведение соответствующих построений на эквивалентной сфере с последующим введением поправок за отличие референц-эллипсоида от сферы [4, 15]. В свою очередь, геометрические задачи на сфере решаются с помощью сферической тригонометрии [1, 2, 8, 16]. В этих задачах зачастую уравнения являются трансцендентными и не имеют решений в квадратурах.

Для евклидовой плоскости с помощью системы декартовых координат построен весьма эффективный математический аппарат – аналитическая геометрия, которая позволяет приводить задачи планиметрии к задачам математического анализа и существенно упрощает их решение. На сфере также можно ввести такие системы координат, при которых различные геометрические задачи можно свести к задачам математического анализа, – бельтрамиевы координаты [6, 7, 17], что существенно ослабит проблему трансцендентности соответствующих уравнений.

В фундаментальной математике такие построения сводят аналитическую геометрию на сфере к геометрии Римана на эллиптической плоскости, т.е. на двумерном многообразии постоянной положительной кривизны. Однако для технических приложений аппарат неевклидовой геометрии на эллиптической плоскости представляется слишком абстрактным и применяется редко.

Целью настоящей статьи является изложение основных положений и вывод формул аналитической геометрии на сфере на достаточном для решения практических задач уровне с помощью элементарных построений, доступных для инженеров с обычной математической подготовкой.

Особенности внутренней геометрии сферы. Как известно, для любой гладкой поверхности ее внутренней геометрией являются геометрические построения, которые могут быть выражены с помощью геометрических элементов, принадлежащих самой этой поверхности [5, 7, 17].

Исходным понятием внутренней геометрии является длина, а в основе всех других построений внутренней геометрии лежит возможность рассмотрения малых фигур поверхности на евклидовой плоскости, касательной к данной поверхности. Например, углом между двумя кривыми на поверхности является угол между их проекциями на касательную плоскость, проведенную через точку пересечения данных кривых.

На сфере роль прямых евклидовой плоскости играют геодезические линии, которые являются результатом пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр C сферы радиуса R_0 . Такие линии называются большими окружностями или сферическими прямыми.

Если все точки сферы спроецировать из центра C на плоскость, касательную к южному полюсу P' сферы, и задать расстояния между спроецированными точками равными сферическим



расстояниям между соответствующими точками сферы, то полученная плоскость W будет являться двумерным многообразием Римана постоянной положительной кривизны, а внутренняя геометрия такой плоскости – геометрией Римана на эллиптической плоскости [6, 17].

Все большие окружности сферы проецируются на эллиптическую плоскость в виде прямых. Принципиальное отличие внутренних геометрий сферы и эллиптической плоскости состоит в том, что противоположные точки сферы соответствуют единственной точке эллиптической плоскости.

Рассмотрим основные особенности внутренней геометрии сферы [3, 5]:

- 1) две прямые, проходящие через антиподы, образуют два двуугольника с углами при вершинах γ и $\gamma' = 2\pi - \gamma$;
- 2) точка, отстоящая от всех точек данной прямой на сферическом расстоянии $l_0 = \pi R_0/2$, называется полюсом P данной прямой; таких точек две, они являются антиподами;
- 3) угол между двумя сферическими прямыми измеряется расстоянием между их полюсами, деленным на радиус сферы;
- 4) геометрическое место точек, отстоящих от данной точки на сферическом расстоянии $l = \pi R_0/2$, есть сферическая прямая, называемая полярной данной точки; всякая прямая, проведенная через данную точку, образует с полярной этой точки прямой угол: такая прямая называется нормалью к данной прямой;
- 5) все нормали к любой прямой пересекаются в двух точках: полюсах данной прямой;
- 6) всякие две прямые на сфере обладают общей нормалью, полюсом которой является точка пересечения данных прямых.

Если через три точки сферы, которые не являются попарно противоположными, провести геодезические (сферические прямые), то образуется сферический треугольник. При этом на основе трех точек можно построить восемь сферических треугольников, состоящих из попарно противоположных точек. В геометрии Римана (на эллиптической плоскости) таких треугольников – четыре, поскольку противоположные точки соответствующей сферы отождествляются.

Если длины всех сторон треугольника меньше длины половины большой окружности, а углы при вершинах – менее π , то такой треугольник называется эйлеровым.

В связи с отсутствием для внутренней геометрии сферы понятия параллельности, отсутствует также понятие подобия. Поэтому два эйлеровых треугольника с тремя попарно равными углами либо равны, либо зеркально симметричны.

Сумма внутренних углов эйлерова треугольника всегда больше π , но меньше 3π . Для треугольника ABC с углами A, B и C сферический избыток, или сферический эксцесс, $\varepsilon = A + B + C - \pi$.

Теорема косинусов для сферических треугольников формулируется следующим образом: $\cos(AB/R_0) = \cos(BC/R_0)\cos(AC/R_0) + \sin(BC/R_0)\sin(AC/R_0)\cos C$.

В прямоугольном сферическом треугольнике с катетами AC, BC и гипотенузой AB справедливы равенства [2, 3]:

$$\cos(AB/R_0) = \cos(BC/R_0)\cos(AC/R_0) \text{ и } \operatorname{tg}(AC/R_0) = \operatorname{tg}(AB/R_0)\cos\alpha, \quad (1)$$

где α – угол между катетом AC и гипотенузой AB .

Площадь сферического треугольника S_Δ выражается через длины его сторон a, b, c согласно теореме Люилье:

$$\operatorname{tg} \frac{S_\Delta}{4R_0^2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2R_0} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2R_0} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2R_0} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2R_0}},$$

где $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр эйлерова треугольника ABC .

При $R_0 \rightarrow \infty$ получается формула Герона для плоского треугольника

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Поскольку два сферических треугольника с тремя равными углами равновелики, для них справедлива формула Жирара, не имеющая аналога в планиметрии: $S_\Delta = \varepsilon R_0^2$.

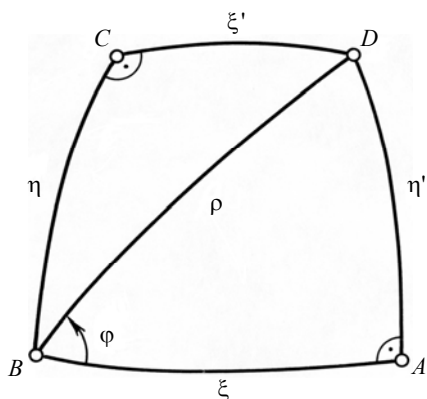


Рис.1. Сферический четырехугольник с тремя прямыми углами:
 $ABC = BAD = BCD = 90^\circ$

Теорема 1 [13]. Пусть в сферическом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC , BAD и BCD – прямые (рис.1). Тогда имеют место соотношения:

$$\operatorname{tg}^2 \rho = \operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta; \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \eta / \operatorname{tg} \xi; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \xi' = \operatorname{tg} \xi \cos \eta; \operatorname{tg} \eta' = \operatorname{tg} \eta \cos \xi, \quad (3)$$

где $\rho = BD/R_0$; $\xi = BA/R_0$; $\eta = BC/R_0$; $\xi' = CD/R_0$; $\eta' = AD/R_0$.

Доказательство. Из прямоугольных треугольников ABD и CBD по формулам (1) имеем: $\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \rho \cos \varphi$, $\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \rho \cos(\pi/2 - \varphi) = \operatorname{tg} \rho \sin \varphi$. Отсюда непосредственно следуют формулы (2). Поскольку $\cos \rho = \cos \xi' \cos \eta$, или

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \rho} = \frac{\cos^2 \eta}{1 + \operatorname{tg}^2 \xi'},$$

с учетом (2), имеем

$$1 + \operatorname{tg}^2 \xi' = \cos^2 \eta + \operatorname{tg}^2 \eta \cos^2 \eta + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2 \eta; \operatorname{tg}^2 \xi' = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta - 1 + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2 \eta,$$

т.е. справедливы выражения (3).

При $R_0 \rightarrow \infty$ четырехугольник $ABCD$ переходит в плоский прямоугольник, в котором $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \eta/\xi = \eta'/\xi'$, т.е. справедлива теорема Пифагора.

Множество точек, отстоящих от произвольной точки O на сферическом расстоянии $\tilde{r} < \pi R_0/2$, образует сферическую окружность; точка O называется центром этой окружности, а величина $\tilde{r}$ – ее радиусом. Сферическим эллипсом называется множество точек сферы, сумма сферических расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, постоянна (и равна длине большой оси эллипса). Сферической гиперболой называется множество точек сферы, разность сферических расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, является величиной постоянной.

Теорема 2 [13]. Пусть имеется сферическая гипербола с фокусами F_1 и F_2 (рис.2). Тогда данная гипербола одновременно является эллипсом, фокусы которого расположены в точке F_1 и в антипode точки F_2 – точке F'_2 .

Доказательство. По определению гиперболы $F_2M - F_1M = 2\zeta$ для любой точки M данной гиперболы, где ζ – параметр гиперболы. Однако $F_2M = \pi R_0 - F'_2M$. Значит, $\pi R_0 - F_1M - F'_2M = 2\zeta$ или $F_1M + F'_2M = 2(\pi R_0/2 - \zeta)$, что и требовалось доказать.

Отсюда, как следствие, получаем полуось найденного эллипса: $a = \pi R_0/2 - \zeta$.

Если провести плоскость, нормальную к отрезку OC (рис.2), то полученная большая окружность $QPQ'P'$ будет играть роль бесконечности, в которой сферическая гипербола касается своей асимптоты.

Сферической параболой назовем множество точек M сферы C , сферические расстояния от которых до данной точки F_1 (фокуса параболы) и данной прямой (директрисы $P'OP$) равны между собой (рис.2).

Теорема 3 [13]. Парабола на сфере есть эллипс, одним из фокусов которого является фокус параболы F_1 , а другим – полюс директрисы (точка Q).

Доказательство. По определению параболы имеем $F_1M = KM$, где K – точка пересечения прямой QM с директрисой $P'OP$.

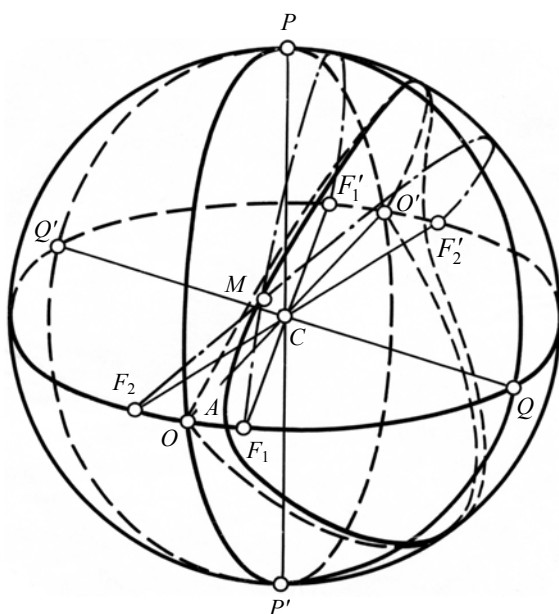


Рис.2. Сферическая гипербола

Для любой точки M параболы справедливо соотношение $KM/R_0 = \pi/2 - MQ/R_0$. Отсюда $F_1M/R_0 = \pi/2 - MQ/R_0$ или $(F_1M + MQ)/R_0 = \pi/2$, т.е. парабола на сфере является эллипсом с длиной большой полуоси равной $\pi R_0/4$.

Отметим, что сферическую гиперболу всегда можно рассматривать как соответствующий ей эллипс, в то время как двуугольник (расстояние между фокусами равно πR_0), окружность (расстояние между фокусами равно нулю) и парабола являются лишь частными случаями эллипсов. Это соответствует замечанию Ф.Х.Клейна о том, что в эллиптической геометрии существует только два типа кривых второго порядка: эллипс и окружность [7]. Правда, последняя является частным случаем эллипса.

В связи с тем, что сфера является замкнутой поверхностью и на ней отсутствуют бесконечно удаленные друг от друга точки, многие кривые высших порядков, имеющие на плоскости бесконечные ветви, оказываются ограниченными: сферическая циссоида, строфоида, спирали и т.п.

Например, логарифмической спиралью на сфере является кривая, определяемая уравнением $\rho = a \exp(k\varphi)$, $-\infty < \varphi < \infty$. При $\varphi = 0$ величина $\rho = a$. При $k > 0$ и изменении угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \infty$ логарифмическая спираль пересекает полюсу точки O (при $\varphi_\infty = k^{-1} \ln[\pi R_0/(2a)]$), затем впервые достигает точки O' – антипода точки O [при $\varphi' = k^{-1} \ln(\pi R_0/a)$] и продолжает периодически раскручиваться и закручиваться до бесконечности. При изменении угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = -\infty$ такая спираль, как и на евклидовой плоскости, бесконечно закручивается вокруг точки O .

Системы координат на сфере и соотношения между ними. Для определения положения точки M на поверхности сферы существует несколько систем координат. Наиболее распространенными являются система пространственных сферических координат $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta})$ – с условием $\bar{r} = R_0$ и декартовых геоцентрических координат (X, Y, Z) – с условием $X^2 + Y^2 + Z^2 = R_0^2$. При этом ось OZ направлена из центра сферы C к полюсу P , ось OX – из C в точку O пересечения начального меридиана с экватором, ось OY – из точки C по нормали к плоскости начального меридиана. Эти координаты связаны между собой известными соотношениями [5, 12, 15].

Однако, например для единичной сферы радиуса $R_0 = 1$, в некотором смысле более естественными, т.е. расположенными на поверхности самой сферы – внутренними, являются сферические декартовы (ξ, η) и сферические полярные (ρ, φ) координаты, а также географические координаты (λ', φ') , где λ' – долгота; φ' – широта точки M .

Положение точки M в сферических декартовых координатах (ξ, η) задается, как и на евклидовой плоскости, расстояниями от начала координат (точки O) до точек пересечения K и L нормалей, проведенных из точки M к взаимно нормальным осям координат OQ и OP (рис.3). Получившийся при этом сферический четырехугольник $OLMK$ имеет три прямых угла: LOK , OLM и OKM .

В сферической полярной системе координат (ρ, φ) положение точки M задается длиной ρ геодезической линии OM и углом φ , образуемым сферическим радиусом-вектором OM с экватором сферы $OO'O'O$. Как было

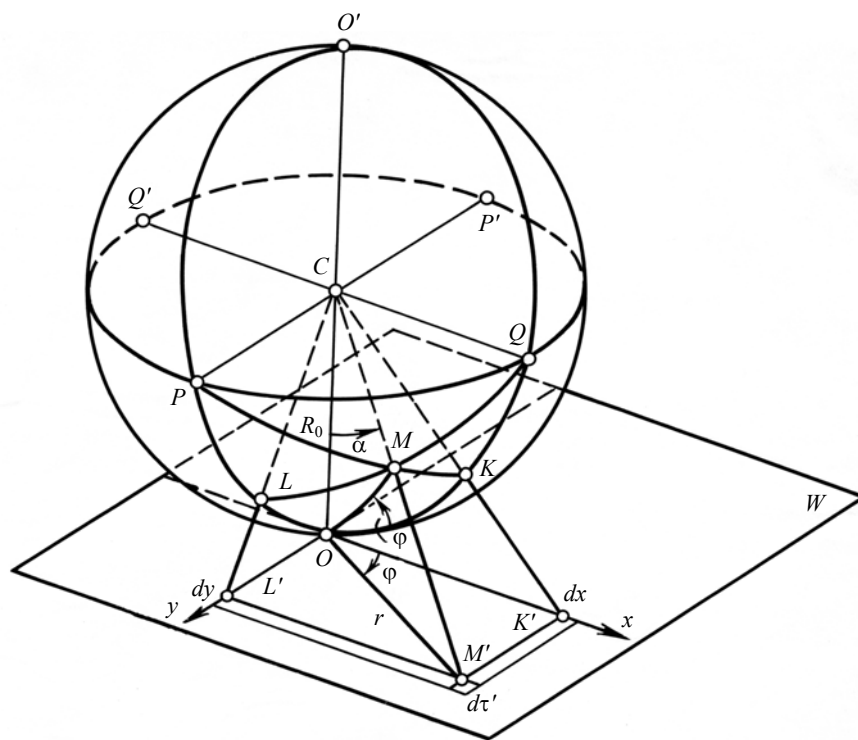


Рис.3. К выводу мероопределения площади на эллиптической плоскости

доказано ранее – теорема 1, формулы (2): $\operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta = \operatorname{tg}^2 \rho$; $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \eta / \operatorname{tg} \xi$. При $R_0 \rightarrow \infty$ системы координат (ξ, η) и (ρ, φ) естественным образом переходят в системы декартовых (x, y) и полярных координат (r, φ) на евклидовой плоскости.

Разновидностью сферических декартовых координат (ξ, η) на единичной сфере являются тангенциальные координаты (x, y) , в которых положение точки M задается тангенсами ее декартовых координат: $x = \operatorname{tg} \xi$, $y = \operatorname{tg} \eta$. В тангенциальной системе координат формулы (3) запишутся в виде

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \rho = r^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x; \quad x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi, \quad (4)$$

где $r \equiv \operatorname{tg} \rho$.

Тангенциальные координаты являются частным случаем бельтрамиевых координат [6, 7, 17]. Координаты Бельтрами (x_B, y_B) – прямоугольные координаты на плоскости W , касательной к сфере радиуса R_0 , которые получаются проецированием сферических декартовых координат (ξ, η) точек сферы из ее центра C (рис.3). В результате такого проецирования все геодезические линии сферы превращаются в прямые на касательной плоскости, геометрия которой оказывается неевклидовой: геометрия Римана на эллиптической плоскости.

Сферические декартовы (ξ, η) , бельтрамиевы (x_B, y_B) и тангенциальные (x, y) координаты на сфере произвольного радиуса R_0 связаны между собой соотношениями:

$$x_B = R_0 \operatorname{tg} (\xi/R_0) = R_0 x, \quad y_B = R_0 \operatorname{tg} (\eta/R_0) = R_0 y;$$

$$\xi = R_0 \operatorname{arctg} (x_B/R_0) = R_0 \operatorname{arctg} x, \quad \eta = R_0 \operatorname{arctg} (y_B/R_0) = R_0 \operatorname{arctg} y.$$

Для единичной сферы ($R_0 = 1$) тангенциальные (x, y) и бельтрамиевы (x_B, y_B) координаты совпадают.

Установим связь между тангенциальными (x, y) и географическими (λ', φ') координатами точки M на единичной сфере. Из рис.1 следует: $\lambda' = \xi$; $\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \xi = x$; $\varphi' = \eta'$. Отсюда, с учетом выражений (2) и (3), получим

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \eta' = \operatorname{tg} \eta \cos \xi = \operatorname{tg} \eta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi};$$

$$y = \operatorname{tg} \varphi' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda'}, \quad x = \operatorname{tg} \lambda';$$

$$\lambda' = \operatorname{arctg} x; \quad \varphi' = \operatorname{arctg} (y / \sqrt{1 + x^2}).$$

Осуществим поворот системы координат (ξ, η) вокруг точки O на некоторый угол θ против часовой стрелки. Для новых полярных координат $(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$ имеем очевидные соотношения: $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \theta$. Отсюда $\tilde{x} = \tilde{\rho} \cos \tilde{\varphi} = \rho \cos (\varphi - \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Проводя аналогичные преобразования для $\tilde{y}$, окончательно получим зависимости между новыми $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и старыми (x, y) тангенциальными координатами точки M на сфере, совершенно аналогичные формулам аналитической геометрии на евклидовой плоскости:

$$\tilde{x} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \tilde{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta;$$

$$x = \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta, \quad y = \tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta.$$

В связи с отсутствием на сфере понятия параллельности, параллельный перенос системы тангенциальных координат не имеет смысла. Поэтому в общем случае преобразование координат на сфере должно задаваться либо некоторым движением, либо координатами нового центра и направлением одной из осей новой системы координат.

Вращаем систему координат (ξ, η) вокруг полюса P против часовой стрелки на некоторый угол ξ_0 . Отметим, что величина $\eta' = \varphi'$ при таком вращении останется неизменной. Поэтому для новых систем координат $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ и $(\tilde{x} = \operatorname{tg} \tilde{\xi}, \tilde{y} = \operatorname{tg} \tilde{\eta})$ имеем $\tilde{\xi} = \xi - \xi_0$, $\tilde{\eta}' = \eta'$ и $\tilde{x} = \operatorname{tg} \tilde{\xi} = (x - x_0)/(1 + x_0 x)$, $\tilde{y}^2/(1 + \tilde{x}^2) = y^2/(1 + x^2)$, где $x_0 = \operatorname{tg} \xi_0$. Отсюда, после тождественных преобразований, окончательно получим



$$\tilde{x} = (x - x_0)/(1 + x_0x), \quad \tilde{y} = y\sqrt{1 + x_0^2}/(1 + x_0x); \quad (5)$$

$$x = (\tilde{x} + x_0)/(1 - x_0\tilde{x}); \quad y = \tilde{y}\sqrt{1 + x_0^2}/(1 - x_0\tilde{x}).$$

Простейшим преобразованием, переносящим начало системы координат (x, y) в данную точку $M_0(x_0, y_0)$ сферы и аналогичным параллельному переносу на плоскости, является двойное вращение вокруг точек сферы P и Q (рис.3). Такое преобразование можно осуществить двумя способами, и получившиеся при этом системы координат не совпадут.

Повернем систему координат (x, y) сначала вокруг полюса P на угол $\xi_0 = \arctg x_0$. Тогда новые координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ произвольной точки M согласно (5) суть

$$\tilde{x} = (x - x_0)/(1 + x_0x); \quad \tilde{y} = y\sqrt{1 + x_0^2}/(1 + x_0x).$$

При этом новая ордината точки M_0

$$\tilde{y}_0 = y_0\sqrt{1 + x_0^2}/(1 + x_0^2) = y_0/\sqrt{1 + x_0^2}.$$

Теперь повернем новую систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на угол $\tilde{\eta}_0 = \arctg \tilde{y}_0$:

$$\bar{x} = \tilde{x} \frac{\sqrt{1 + \tilde{y}_0^2}}{1 + \tilde{y}_0\tilde{y}} = \frac{(x - x_0)\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}}{(1 + x_0x + y_0y)\sqrt{1 + x_0^2}}; \quad \bar{y} = \frac{y - y_0 + x_0(yx_0 - xy_0)}{(1 + x_0x + y_0y)\sqrt{1 + x_0^2}}. \quad (6)$$

Если же сначала сделать поворот на угол η_0 , а затем – на угол $\tilde{\xi}_0$, то получим следующие выражения:

$$\hat{x} = \frac{x - x_0 + y_0(xy_0 - yx_0)}{(1 + x_0x + y_0y)\sqrt{1 + y_0^2}}; \quad \hat{y} = \frac{(y - y_0)\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}}{(1 + x_0x + y_0y)\sqrt{1 + y_0^2}}.$$

Полярные углы $\bar{\varphi}$ и $\hat{\varphi}$ некоторой точки $M(x, y)$ в новых системах координат $(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\hat{x}, \hat{y})$ определяются выражениями: $\tg \bar{\varphi} = \bar{y}/\bar{x}$ и $\tg \hat{\varphi} = \hat{y}/\hat{x}$, т.е.

$$\tg \bar{\varphi} = \frac{y - y_0 + x_0(yx_0 - xy_0)}{(x - x_0)\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}}; \quad \tg \hat{\varphi} = \frac{(y - y_0)\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0 - y_0(x_0y + y_0x)}.$$

Значит, их разность $\gamma = \bar{\varphi} - \hat{\varphi}$ задается соотношением

$$\tg \gamma = \tg(\bar{\varphi} - \hat{\varphi}) = \frac{\tg \bar{\varphi} - \tg \hat{\varphi}}{1 + \tg \bar{\varphi} \tg \hat{\varphi}}.$$

Подставив сюда приведенные выше выражения для $\tg \bar{\varphi}$ и $\tg \hat{\varphi}$, после соответствующих тождественных преобразований получим окончательно

$$\tg \gamma = -\frac{x_0y_0}{\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}}.$$

При $R_0 \rightarrow \infty$ величина $\gamma \rightarrow 0$. Поэтому в этом пределе (на евклидовой плоскости) последовательно проведенный параллельный перенос декартовой системы координат (x, y) в обоих случаях приводит к одной и той же системе координат: $\bar{x} = \hat{x} = x - x_0$, $\bar{y} = \hat{y} = y - y_0$.

Меропределение на сфере и на эллиптической плоскости. Возвратимся к рис.3. Построим на плоскости W прямоугольную систему координат (x, y) следующим образом. Начало системы (x, y) совместим с общей точкой O сферы S и плоскости W . Ось Ox направим вдоль линии пересечения плоскости W с плоскостью сферической прямой OQO' , а ось Oy – вдоль линии пересечения плоскости сферической прямой OPO' с плоскостью W . Координаты Ox и Oy точки



$M'(x, y)$ на плоскости W сделаем не равномерными, как в системе декартовых координат на евклидовой плоскости, а определим длинами OK' и OL' центральных проекций точек K и L сферических декартовых координат (ξ, η) произвольной точки M сферы. Тогда

$$x = OK' = R_0 \operatorname{tg} (OK/R_0) = R_0 \operatorname{tg} (\xi/R_0);$$

$$y = OL' = R_0 \operatorname{tg} (OL/R_0) = R_0 \operatorname{tg} (\eta/R_0).$$

В этом случае сферические декартовы координаты (ξ, η) произвольной точки M на сфере, определяемые длинами отрезков OK и OL , и прямоугольные координаты (x, y) проекции M' точки M сферы на плоскость W будут согласованы между собой.

По существу мы построили систему бельтрамиевых координат на эллиптической плоскости Римана W . Величина R_0 является радиусом кривизны этой плоскости. Поскольку при $R_0 = 1$ бельтрамиевы координаты и тангенциальные совпадают, построенную систему координат (x, y) будем называть тангенциальной.

Заметим, что углы KOM и $K'OM'$ равны между собой (рис.3). Поэтому полезно ввести еще одну систему координат: тангенциально-полярную (r, φ) , в которой $\varphi = K'OM'$, $r = OM' = R_0 \operatorname{tg} (OM/R_0) = R_0 \operatorname{tg} \alpha = R_0 \operatorname{tg} (\rho/R_0)$. Согласно равенствам (4): $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \operatorname{arctg} (y/x)$; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. При $R_0 \rightarrow \infty$ система (r, φ) переходит в обычную полярную систему координат на евклидовой плоскости (ρ, φ) .

Определим расстояние l между проекциями $M'_1(x_1, y_1)$ и $M'_2(x_2, y_2)$ двух точек сферы $M_1(\xi_1, \eta_1)$ и $M_2(\xi_2, \eta_2)$ в тангенциальной системе координат (x, y) на плоскости W . Для этого перенесем начало системы координат (x, y) в точку $M'_1(x_1, y_1)$ любым способом. Тогда в новой системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ расстояние между данными точками $l = M_1 M_2$ – это длина сферического радиуса-вектора точки $M'_2(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Сделаем преобразование координат, например, по формулам (6):

$$\tilde{x}_2 = \frac{(x_2 - x_1)\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)\sqrt{1 + x_1^2}}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_2 - y_1 + x_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)\sqrt{1 + x_1^2}}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}^2(l/R_0) = \tilde{r}_2^2 = \tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2$, или

$$\operatorname{tg}^2 \frac{l}{R_0} = \operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}, \quad (7)$$

где $\lambda \equiv l/R_0$,

Если точки M_1 и M_2 отстоят друг от друга на расстояние $\pi R_0/2$, то $\operatorname{tg}(l/R_0) = \operatorname{tg}(\pi/2) = \infty$, или

$$1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \quad (8)$$

Если точка M_2 лежит в достаточно малой окрестности точки M_1 , так что $x_2 = x_1 + \Delta x$, $\Delta x \ll 1$; $y_2 = y_1 + \Delta y$, $\Delta y \ll 1$, то

$$\operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (x_1 y_1 + x_1 \Delta y - x_1 y_1 - y_1 \Delta x)^2}{(1 + x_1^2 + x_1 \Delta x + y_1^2 + y_1 \Delta y)^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (x_1 \Delta y - y_1 \Delta x)^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + x_1 \Delta x + y_1 \Delta y)^2}.$$

При $M_2 \rightarrow M_1$ получается мероопределение элемента длины dl на сфере в тангенциальной системе координат (x, y) в окрестности произвольной точки $M(x, y)$, совпадающее с мероопределением dl на эллиптической плоскости [6, 7, 17]:

$$\lim \operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{dl^2}{R_0^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + (x dy - y dx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

т.е.

$$dl^2 = \frac{R_0^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} [dx^2 + dy^2 + (x dy - y dx)^2]. \quad (9)$$

Поскольку $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то $dx = dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi$, $dy = dr \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi$ и из выражения (9) можно получить

$$dl^2 = \frac{R_0^2}{(1+r^2)^{3/2}} \left[\frac{dr^2}{\sqrt{1+r^2}} + r^2 \sqrt{1+r^2} d\varphi^2 \right].$$

Такое же выражение можно получить исходя из очевидного равенства $d\lambda^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho d\varphi^2$.

Дадим элементарные приращения dx и dy тангенциальным координатам точки M' (рис.3). При этом сферические декартовы координаты точки M ($\xi = OK/R_0$ и $\eta = OL/R_0$) также получат соответствующие элементарные приращения, образуя на сфере элементарную площадку $d\tau$ в окрестности точки M . В сферической полярной системе координат (ρ, φ) элементарная площадка $d\tau = \sin \rho d\rho d\varphi$, а $\sin^2 \rho = r^2/(1+r^2)$.

На проективной плоскости W : $r = \tan \rho$ и $dr = d\rho/\cos^2 \rho = (1 + \tan^2 \rho) d\rho$. Поэтому в тангенциально-полярной системе координат (r, φ) элементарная площадка

$$d\tau = R_0^2 \frac{r dr d\varphi}{(1+r^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Чем дальше точка M отстоит от начала координат O , тем меньше размер элементарной площадки; уменьшение пропорционально величине $(1+r^2)^{3/2}$. В этом заключается существенное отличие мероопределения площади на эллиптической плоскости от евклидовой.

Если учесть, что тангенциальные координаты (x, y) произвольной точки M соотносятся с ее тангенциально-полярными (r, φ) аналогично декартовым и полярным координатам на евклидовой плоскости [см. равенства (4)], то получим элемент площади $d\tau$ на сфере в тангенциальных координатах в виде

$$d\tau = \frac{R_0^2 dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) совпадают с мероопределением элемента площади на эллиптической плоскости [6, 7, 17]. На евклидовой плоскости $d\tau = dx dy$.

Кривые первого порядка на сфере. Соотношения между точками и кривыми первого порядка. Перейдем к основным задачам геодезии и навигации на сферической поверхности Земли.

Заданием сферической прямой, аналогичным заданию прямой на евклидовой плоскости, является нормальная форма: прямая определяется длиной p нормали к ней от начала координат и направлением этой нормали θ (рис.4).

Возьмем произвольную точку M на данной прямой. Тогда на эллиптической плоскости единичной кривизны ($R_0 = 1$) имеем $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \varphi = y/x$. Угол M_0OM определяется соотношением

$$\tan(\angle M_0OM) = \tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi} = \frac{x y_0 - y x_0}{x x_0 + y y_0}.$$

Из прямоугольного треугольника M_0OM находим

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &= \tan^2 \rho = \tan^2 p [1 + \tan^2(\theta - \varphi)] = \\ &= \tan^2 p (x_0^2 + y_0^2) (x^2 + y^2) / (x x_0 + y y_0)^2, \end{aligned}$$

или

$$x x_0 + y y_0 = \tan^2 p.$$

Однако $x_0 = \tan p \cos \theta$, $y_0 = \tan p \sin \theta$; следовательно, для любой точки M на данной прямой справедливо равенство $x \cos \theta + y \sin \theta = \tan p$, представляющее собой уравнение прямой в нормальной форме. В пределе, при $R_0 \rightarrow \infty$, получим известное уравнение прямой на плоскости [3, 5] $x \cos \theta + y \sin \theta = p$.

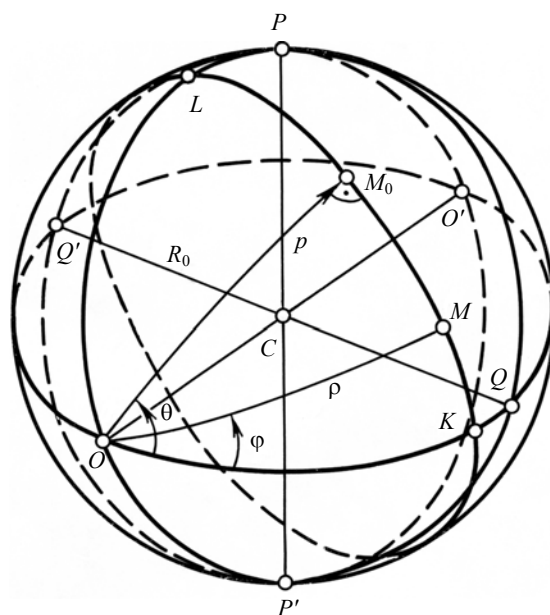


Рис.4. К выводу нормального уравнения сферической прямой



Теорема 4 [13]. Всякое уравнение первой степени определяет сферическую прямую в тангенциальных координатах.

Доказательство. Пусть на эллиптической плоскости дано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad (12)$$

где A и B не равны одновременно нулю.

Разделим обе части уравнения (12) на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и введем обозначения:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \theta; \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \theta; \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\operatorname{tg} p.$$

Тогда уравнение (12) примет вид нормально заданной прямой на сфере:

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \operatorname{tg} p = 0,$$

где $\operatorname{tg} \theta = B/A$; $\operatorname{tg} p = -C/\sqrt{A^2 + B^2}$.

Отметим, что если $\operatorname{tg} p \neq 0$, то $\cos \theta / \operatorname{tg} p = \operatorname{ctg} OK / R_0$, $\sin \theta / \operatorname{tg} p = \operatorname{ctg} OL / R_0$, и уравнение (12) можно переписать в виде

$$\frac{x}{\operatorname{tg}(OK/R_0)} + \frac{y}{\operatorname{tg}(OL/R_0)} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (13)$$

где $a = \operatorname{tg}(OK/R_0)$; $b = \operatorname{tg}(OL/R_0)$.

Уравнение (13) есть уравнение сферической прямой в отрезках на осях координат, которое в пределе, при $R_0 \rightarrow \infty$, превращается в аналогичную форму задания прямой на евклидовой плоскости [3, 5].

Возможно также представление сферической прямой в виде $y = kx + c$, где $c = \operatorname{tg}(OL/R_0)$; $k = -\operatorname{ctg} \theta$.

Проведем прямую через данную точку $M^*(x^*, y^*)$ единичной сферы. Уравнение прямой зададим в отрезках на осях координат: $x/a + y/b = 1$. Если точка M^* принадлежит этой прямой, то $x^*/a + y^*/b = 1$. Отсюда выводим, что пучок прямых, проходящих через данную точку сферы M^* , задается уравнением $x/a + y/b = x^*/a + y^*/b$, или

$$(x - x^*)/a + (y - y^*)/b = 0.$$

Аналогичным образом можно получить уравнение прямой, проходящей через две данные точки сферы: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Точка пересечения сферических прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяется так же, как и на евклидовой плоскости. При этом следует помнить, что на сфере любые две прямые всегда пересекаются, причем в двух противоположных точках сферы – в антиподах: $\xi_0 = R_0 \arctg x_0$; $\eta_0 = R_0 \arctg y_0$ и $\xi'_0 = R_0 (\arctg x_0 + \pi)$; $\eta'_0 = R_0 (\arctg y_0 + \pi)$.

Если $\Delta = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ и не соблюдается равенство $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то точки пересечения сферических прямых лежат на полярке начала координат и определяются в полярной системе сферических координат равенствами:

$$\varphi_0 = \arctg \Delta_2 / \Delta_1; \quad \rho_0 = \pi R_0 / 2; \quad \varphi'_0 = \arctg \Delta_2 / \Delta_1 + \pi; \quad \rho'_0 = \pi R_0 / 2.$$

Если зафиксировать точку M_1 , а положение точки M_2 менять, соблюдая условие $M_1 M_2 = \pi R_0 / 2$, то из равенства (8) получим уравнение полярки точки M_1

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -1/x_0$; $b = -1/y_0$.

Используя равенство (8), можно найти координаты полюса P данной прямой:

$$x_P = \frac{A}{C} = -\frac{1}{a}; \quad y_P = \frac{B}{C} = \frac{1}{b}. \quad (14)$$

Если вспомнить, что угол пересечения ψ двух сферических прямых определяется расстоянием между их полюсами, то можно вывести формулу

$$\cos^2 \psi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}. \quad (15)$$

Из равенства (15) найдем условие ортогональности сферических прямых:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Чтобы через произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ провести нормаль к данной прямой, достаточно найти полюс этой прямой и провести через этот полюс и точку M_0 прямую. Прделав эти операции, получим уравнение нормали, опущенной из точки M_0 на данную прямую: $x(B - Cy_0) + y(Cx_0 - A) + (Ay_0 - Bx_0) = 0$.

Аналогичным образом может быть получено уравнение прямой, проходящей через произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ под прямым углом к нормали, опущенной из точки M_0 на данную сферическую прямую (на плоскости искомая прямая параллельна данной прямой):

$$x[x_0(C + By_0) - A(1 + y_0^2)] + y[y_0(C + Ax_0) - B(1 + x_0^2)] + x_0(A - Cx_0)y_0(B - Cy_0) = 0.$$

Расстояние δ между точкой $M_0(x_0, y_0)$ и прямой $Ax + By + C = 0$ можно определить следующим образом. Поскольку это расстояние равно дополнению до $\pi R_0/2$ расстояния между точкой M_0 и полюсом $P(A/C, B/C)$ данной прямой, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{R_0} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{M_0 P}{R_0} \right) = \operatorname{ctg} \frac{M_0 P}{R_0} = \frac{1}{\operatorname{tg}(M_0 P/R_0)},$$

т.е.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{R_0} = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A - Cx_0)^2 + (B - Cy_0)^2 + (Bx_0 - Ay_0)^2}.$$

Основные свойства кривых второго и более высокого порядка. Развитый выше аналитический аппарат позволяет составить уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1(\delta, 0)$ и $F_2(-\delta, 0)$ единичной сферы и с большой a и малой полуосью β . Полный вывод этого уравнения приведен в работе [2], в которой получено каноническое уравнение эллипса на сфере в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (16)$$

где $a = \operatorname{tg} \alpha$, $d = \operatorname{tg} \delta$, $b^2 = \operatorname{tg}^2 \beta = (a^2 - d^2)/(1 + d^2)$.

Каноническое уравнение гиперболы на сфере можно получить из уравнения эллипса (16) с помощью соответствующего преобразования координат (5):

$$\frac{x^2}{g^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

где $g = 1/a = \operatorname{tg} \zeta$; $q = b/a$; ζ – параметр гиперболы.

Воспользовавшись теоремой 3 и преобразованием координат (5), получим каноническое уравнение сферической параболы $y^2 = 2Px$, где $P = \sin p$; p – параметр параболы.

Уравнение окружности, центр которой находится в начале координат, получим по определению – в соответствии с формулами (4): $x^2 + y^2 = r_0^2 = \operatorname{const}$, где $r_0 = \operatorname{tg} \rho_0$; ρ_0 – радиус сферической окружности.

Уравнения касательных к кривым второго порядка на сфере в некоторой точке (x_0, y_0) кривой получают как пределы соответствующих секущих. Например, для сферической гиперболы

$$\frac{xx_0}{g^2} - \frac{yy_0}{h^2} = 1.$$

Кривые второго порядка можно также задавать в параметрической форме. Так, непосредственной подстановкой в уравнение (16) можно проверить, что для канонического эллипса параметрическое уравнение имеет вид $x = a \cos \varphi$; $y = b \sin \varphi$. При этом параметр φ меняется от 0 до 2π .



Пусть для дальнейшего удобства большая полуось a эллипса направлена вдоль оси Oy . Тогда $x = b \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ и

$$dx = -b \sin \varphi d\varphi; dy = a \cos \varphi d\varphi, \quad (17)$$

а линейный элемент сферического эллипса получается при подстановке выражений (17) в равенство (9):

$$dl^2 = R_0^2 \frac{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + (ab \cos^2 \varphi + ab \sin^2 \varphi)^2}{(1 + b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi^2.$$

Учитывая, что $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, после соответствующих тождественных преобразований получим

$$dl^2 = R_0^2 a^2 \frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi}{(1 + b^2)(1 + h \sin^2 \varphi)^2} d\varphi^2,$$

где $k^2 = (a^2 - b^2)/[a^2(1 + b^2)]$; $h = (a^2 - b^2)/(1 + b^2) = k^2 a^2$.

Элемент длины dl эллипса можно записать также в виде

$$dl = R_0 \frac{1 + a^2 - (1 + h \sin^2 \varphi)}{a \sqrt{1 + b^2} (1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Отсюда длина сектора $(0, \theta)$ сферического эллипса вычисляется по формуле

$$L_{с.э}(\theta) = \frac{R_0(1 + a^2)}{a \sqrt{1 + b^2}} \int_0^\theta \frac{1}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \frac{R_0}{a \sqrt{1 + b^2}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

или

$$L_{с.э}(\theta) = \frac{R_0(1 + a^2)}{a \sqrt{1 + b^2}} \Pi(\theta, h, k) - \frac{R_0}{a \sqrt{1 + b^2}} F(\theta, k),$$

где $F(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, h, k)$ – неполные эллиптические интегралы соответственно I и III рода [11, 14].

Полная длина сферического эллипса $L_{с.э}$ вычисляется интегрированием элемента длины dl по параметру φ от 0 до 360° и состоит из четырех равновеликих дуг:

$$L_{с.э} = \frac{4R_0(1 + a^2)}{a \sqrt{1 + b^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, h, k\right) - \frac{R_0}{a \sqrt{1 + b^2}} \mathbf{K}(k), \quad (18)$$

где $\mathbf{K}(k) = F(\pi/2, k)$ – полный эллиптический интеграл I рода [10, 11, 14].

Впервые формулу (18), по-видимому, получил в 1958 г. Нгуен Кан Тоан [9].

Площадь сферического эллипса $S_{с.э}$ можно получить интегрированием выражения (11) по переменным x и y :

$$S_{с.э} = 4R_0^2 \int_0^{a y(x)} \int_0^x \frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx.$$

В результате получим [9]

$$S_{с.э} = \frac{4R_0 b}{a \sqrt{1 + a^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, h', k'\right) - \frac{4R_0}{a \sqrt{1 + b^2}} \mathbf{K}(k'),$$

где $k'^2 = (a^2 - b^2)/(1 + a^2)$; $h' = -a^2/(1 + a^2)$.

Пользуясь параметрическим заданием кривых более высокого порядка, аналогичным образом можно получить выражения для длины и площади более сложных геометрических фигур на сфере. Например, архимедова спираль на единичной сфере в полярных сферических координатах



определяется уравнением $\rho = a \varphi$, $-\infty < \varphi < \infty$. Значит, $d\rho = a d\varphi$, а элемент длины dl спирали определяется равенствами

$$dl^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho d\varphi^2 = [a^2 + \sin^2(a\varphi)] d\varphi^2.$$

Длина отрезка спирали как функция переменной θ при $R_0 \neq 1$

$$L_{a.c}(\theta) = \frac{R_0 \sqrt{1+a^2}}{a} E\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) - \frac{R_0}{a} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 + \sin^2 x}}, \quad (19)$$

где $E(\mu, k)$ – неполный эллиптический интеграл II рода; $k \equiv 1/\sqrt{1+a^2}$; $x \equiv a\theta$; $\mu \equiv \arcsin\left(\sqrt{1+a^2} \sin x / \sqrt{a^2 + \sin^2 x}\right)$ [10, 11, 14].

Заключение. При введении на сферической поверхности тангенциальной системы координат математический аппарат аналитической геометрии на сфере немногим сложнее классической аналитической геометрии на евклидовой плоскости. В то же время известный аппарат сферической тригонометрии значительно уступает по своей простоте изложенному выше аппарату аналитической геометрии на сфере. Достаточно сравнить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, в тангенциальных координатах

$$(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$$

и в географических координатах

$$\operatorname{tg} \varphi' \sin \operatorname{tg} \varphi' \sin(\lambda'_2 - \lambda'_1) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin(\lambda' - \lambda'_2) + \operatorname{tg} \varphi'_2 \sin(\lambda'_1 - \lambda') = 0,$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – тангенциальные координаты точек M_1 и M_2 на единичной сфере; (φ'_1, λ'_1) и (φ'_2, λ'_2) – географические координаты этих же точек.

Тем более затруднительно с помощью географических координат определять длину и площадь различных фигур на сфере. С помощью тангенциальных координат эти величины зачастую сводятся к известным специальным функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В.В. Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям / В.В.Афанасьев, В.А.Логиновский. СПб: Изд-во Государственной морской академии им. адмирала С.О.Макарова, 2004. 38 с.
2. Венцель М.К. Сферическая тригонометрия: Краткий курс. М.: Геодезиздат, 1948. 154 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Изд-во «АСТ/Астрель», 2002. 992 с.
4. Ермолаев Г.Г. Основы морского судоходства / Г.Г.Ермолаев, Е.С.Затеев. М.: Транспорт, 2012. 270 с.
5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2003. 584 с.
6. Картан Э. Геометрия римановых пространств. М.: Изд-во Ин-та компьютер. исследований, 2012. 431 с.
7. Клейн Ф. Неевклидова геометрия: Пер. с нем. М.: URSS: ЛКИ, 2007. 356 с.
8. Кранц П. Сферическая тригонометрия. М.: URSS: ЛКИ, 2007. 96 с.
9. Нгуен Кан Тоан. Некоторые новые свойства кривых второго порядка в эллиптической плоскости // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6(7). С.193-202.
10. Прудников А.П. Интегралы и ряды: В 3 томах. Т.1. Элементарные функции / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. М.: Физматлит, 2003. 632 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Телеганов Н.А. Метод и системы координат в геодезии / Н.А.Телеганов, Г.Н.Тетерин. Новосибирск: Изд-во Сибирской государственной геодезической академии, 2008. 143 с.
13. Худяков Г.И. Элементы аналитической геометрии на сфере: Депонированная рукопись. Л.: Ин-т «Интеграл», 1969. 25 с. // Реферативная информация по радиоэлектронике. 1969. № 11. Реф.10013.
14. Янке Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Лёш. М.: Наука, 1977. 344 с.
15. Vermeer M. Mathematical Geodesy. Helsinki: Publishing house of the Finnish Geodetic Institute, 2015. 119 p.
16. Watkins Th. Spherical Geometry and Trigonometry. Silicon Valley & Tornado Alley, USA: Publishing house of the San José State University, 2000. 230 p.
17. Wolf J.A. Spaces of Constant Curvature. Berkeley: Publishing house of the University of California, 2011. 420 p.

Автор Г.И.Худяков, д-р техн. наук, профессор, khudgi@mail.ru (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия).

Статья принята к публикации 03.10.2016.