УДК 521.181

А.И.ЯКОВЛЕВ

Санкт-Петербургский филиал
Военно-инженерного университета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТУРЫ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКИХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Предлагается метод определения составляющих уклонения отвесных линий (ξ, η) путем сопоставления результатов геометрического нивелирования с превышениями, определенными с использованием аппаратуры потребителей космических навигационных систем. Теоретически обоснована возможность определения составляющих уклонения отвесной линии. На конкретном практическом примере определены значения ξ, η с точностью порядка 0,5-1,0".

The metod of definition of components evasion of steep lines is offered by comparison of results geometrical levelling with exceeding certain (determined) with use the equipment consumers space navigating systems. The opportunity of definition of components of evasion of a steep line is theoretically proved. Evasion of a steep line are determined with accuracy about 0,5-1,0" on a concrete practical example.

Разработка оперативных и экономически оправданных методов определения уклонений отвеса является одной из актуальных задач геодезии. Значительный интерес представляет [1, 3] определение составляющих уклонений отвесных линий ξ, η путем сопоставления результатов геометрического нивелирования с превышениями, определенными с использованием аппаратуры потребителей космических навигационных систем (АПКНС).

Высота квазигеоида ξ (или аномалия высоты), вычисленная как разность геодезической высоты H, полученной с использованием АПКНС, и нормальной высоты h из геометрического нивелирования, служит исходной основой предлагаемой методики определения уклонений отвесной линии. Математическая модель выбранной методики – установление функциональной зависимости между неизвестными параметрами ξ, η и наблюденными величинами из АПКНС и геометрического нивелирования.

Предположим, высота квазигеоида есть функция экваториальных координат, которые определяются с использованием АПКНС: $\xi = \xi(B, L, H)$. Полный дифференциал наклона квазигеоида (аномалии высоты) можно записать так [2]:

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial L}dL + \frac{\partial\xi}{\partial B}dB + \frac{\partial\xi}{\partial H}dH .$$

Частные производные аномалии высоты по экваториальным координатам B, L и высоте H [2]:

$$\frac{\partial\xi}{\partial B} = -\xi\frac{g}{\gamma_m}(M+H);$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial L} = -\eta\frac{g}{\gamma_m}(N+H)\cos B; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial H} = -\frac{g-\gamma}{\gamma_m}.$$

В формулах (1), не теряя точности, можно принять $g \approx \gamma$, $g/\gamma \approx 1$ [2], так как среднее ускорение силы тяжести на земной поверхности $g = 979\ 100$ мГал, а $\gamma_{45} = 980\ 688{,}910$ мГал. Относительная ошибка $g/\gamma \approx 1/1000$ мГал, поэтому

$$\frac{\partial\xi}{\partial B} = -\xi(M+H); \quad \frac{\partial\xi}{\partial L} = -\eta(N+H)\cos B.$$

Частная производная по высоте H является малой поправкой за относительный избыток силы тяжести. Если принять $(g-\gamma)_{ср} = 0{,}05$ см·с$^{-2}$ и $H_2 - H_1$, то $(g-\gamma)/\gamma_m$ будет порядка 0,1 м [2], поэтому ею можно пренебречь. Отсюда следует, что

$$d\xi = -\xi(M+H_1)dB - \eta(N+H)\cos B dL. \quad (2)$$

Проинтегрировав выражение (2) по ходовой линии между точками 1 и 2 земной поверхности, получим превышение квазигеоида между этими точками:

$$\xi_1 - \xi_2 = -\xi(M+H)\int_{B_1}^{B_2} dB - \eta(N+H)\cos B\int_{L_1}^{L_2} dL =$$

$$= -\xi(M+H)(B_2 - B_1) - \eta(N+H)\cos B(L_2 - L_1). \quad (3)$$

Окончательно имеем

$$\xi_1 - \xi_2 = (H_2 - H_1) - (h_2 - h_1) =$$

$$= -\xi(M+H)(B_2 - B_1) - \eta(N+H)\cos B(L_2 - L_1).$$

Поскольку по определению топоцентрической горизонтной системы координат $(M+H)(B_2 - B_1) = dX' = S\cos A$; $(N+H) \times \times \cos B(L_2 - L_1) = dY' = S\sin A$,

$$\xi_1 - \xi_2 = -(\xi\cos A + \eta\sin A)S/\rho''. \quad (4)$$

Вычислив разности высот квазигеоида по результатам сопоставления геометрического нивелирования с превышениями, определенными с использованием АПКНС для каждой линии нивелирования, можем составить N уравнений вида (4) и найти составляющие уклонения в точке. Суть уравнительных вычислений, в ходе которых определяются значения ξ и η, будет сводиться к следующему. Для каждой линии составляют уравнения поправок вида:

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_N}\right) X_N - \Phi_N, \quad (5)$$

где $N = 1, 2, 3\ldots$ – число линий нивелирования; $X_N = \begin{bmatrix}\xi \\ \eta\end{bmatrix}$ – значение искомых параметров в исследуемой точке; $\Phi_N = -(\xi_2 - \xi_1)\rho''/S = L$ – вектор свободных членов;

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_N}\right) = B = \begin{bmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \\ в_{31} & в_{23} \\ \ldots & \ldots \\ в_{N1} & в_{N2} \end{bmatrix}; \; в_{11} = \cos A; \; в_{12} = \sin A \ldots$$

Наличие избыточных зависимостей позволяет нам решать уравнение (5) под условием $V^{т}PV = \min$. Составив и решив нормальные уравнения вида $X = -(B^{т}B)^{-1}B^{т}L$, находим ξ и η.

Для экспериментальной проверки данного метода на геодезическом полигоне были выполнены измерения с использованием двухчастотной АПКНС «Z – 18». Все пункты (см. рисунок) представляют собой бетонные столбы, на которых определены астрономические широта φ, долгота λ, нормальная высота h из геометрического нивелирования. Линии 2-5, 3-4 ориентированы в меридиане, 2-3, 5-4 – в первом вертикале. Длина линий указана на рисунке. Измерения спутниковыми приемниками выполнялись одновременно на семи пунктах одной сессией в течение 4 ч.

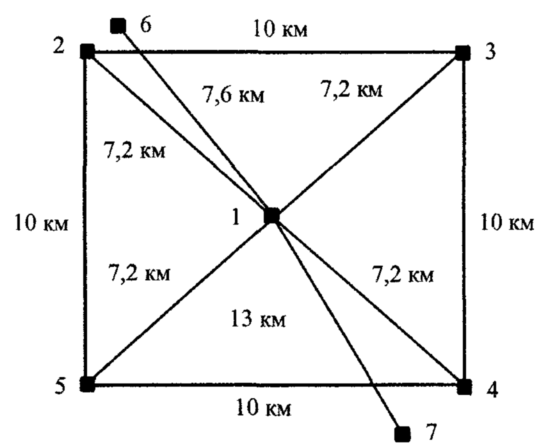

Схема расположения пунктов

Набор измерительной информации позволил определить на пунктах составляющие астрономо-геодезического уклонения отвесной линии с точностью порядка 0,5-0,8″. Нивелирные превышения получены с ошибкой 2-2,5 см. Разности геодезических высот пунктов вычислялись по программе Winprizm 2.10 фирмы «Aschtech». Получены следующие результаты вычисления разности нивелирных превышений и геодезических высот:

Направление	$\Delta\xi''$
1-2	4,63
1-3	4,94
1-4	-3,16
1-5	-4,01
1-6	4,74
1-7	-1,23
1-8	2,89
5-2	6,12
2-3	0,26
3-4	-5,75
5-4	0,69

Для каждого пункта по имеющимся линиям нивелирования были составлены уравнения вида (4). Избыточные зависимости (>2) позволили решить нормальные уравнения и вычислить составляющие ξ, η на пунктах 1, 2, 3, 4, 5 (табл.1).

Таблица 1

Результаты вычисления ξ, η

Номер пункта	ξ (АПКНС)	ξ (астр.-геод.)	η (АПКНС)	η (астр.-геод.)
1	-4,99″	-5,36″	-0,94″	0,05″
2	-6,29	-6,22	-0,10	-1,20
3	-6,00	-8,63	-0,56	-0,91
4	-5,55	-4,75	-0,84	-0,59
5	-5,84	-5,71	-0,38	-0,36

С использованием обратной весовой (корреляционной) матрицы выполнена оценка точности данных (табл.2).

Таблица 2

Среднеквадратические ошибки

Номер пункта	m_ξ	m_η
1	1,17″	1,27″
2	0,21	0,21
3	0,33	0,33
4	0,22	0,22
5	0,34	0,34

Оценка точности, произведенная по истинным ошибкам (за истинные приняты ξ, η, полученные астрономо-геодезическим методом), приведена в табл.3.

Таблица 3

Истинные ошибки

Номер пункта	Δ_ξ	Δ_η
1	0,37″	0,99″
2	0,07	1,10
3	2,63	0,35
4	0,80	0,25
5	0,14	0,02

Средние квадратические ошибки определения ξ, η для данного района

$$m_\xi = \sqrt{[\Delta\xi]/n} = 0{,}90''; \quad m_\eta = \sqrt{[\Delta\eta]/n} = 0{,}74''.$$

Исходя из анализа данных, приведенных в табл.3 и 4, можно сделать вывод, что этот способ позволяет определять составляющие уклонения отвесной линии с точностью порядка 0,5-1,0″.

Заметим, что точность данного способа зависит от ошибок определения наклона квазигеоида и расстояния между точками. Это исходит из природы самого гравитационного поля, производные которого, в частности уклонения отвеса, можно рассматривать в некотором районе как значение некоторой случайной величины. Поэтому зависимость между превышением квазигеоида и уклонением отвеса, которая использована в этом способе, в действительности выражается интегральной формулой вида (3). Отсюда следует, что чем меньше расстояние между точками, тем выше точность определения уклонений отвеса. Однако при выборе расстояния необходимо руководствоваться и точностью измеренных превышений квазигеоида, а также учитывать сложность гравитационного поля. Для оценки воздействия на точность определения составляющих уклонения отвесной линии на пункте 1 был изменен наклон квазигеоида на 1 мм, 1 см, 5 см, 10 см, 1 м. Результаты приведены в табл.4.

Из анализа данных табл.4 видно, что эффективное использование данного способа требует высокоточного определения высот из геометрического нивелирования и превышений при помощи АПКНС.

Таблица 4

Априорные ошибки

Ошибка определения $\Delta\xi$	$\Delta\xi$	$\Delta\eta$
1 мм	0,03″	0,02″
1 см	0,3	0,1
2 см	0,6	0,2
5 см	1,5	0,5
10 см	3,1	1,0
1 м	30,5	9,9

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимов В.Г.* Определение уклонений отвесных линий с использованием GPS/ГЛОНАСС / В.Г.Максимов, Д.И.Плешаков, Ю.А.Бодлов // Геодезия и картография. 2002. № 5. С.6-10.

2. *Машимов М.М.* Планетарные теории геодезии. М.: Недра, 1982. 261 с.

3. *Яковлев А.И.* О возможности определения уклонений отвесных линий с использованием аппаратуры потребителей космических навигационных систем // Научн.-техн. сборник ВИУ (филиал) / Военно-инжен. ун-т. СПб, 2000. С. 20-22.