УДК 528.812

С.В.ТЮРИН
Санкт-Петербургский государственный университет

УРАВНИВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрены особенности уравнивания свободных и нуль-свободных пространственных геодезических сетей. Приведен численный пример уравнивания свободной сети пространственной трилатерации.

The article deals with the peculiarities of free and zero-free special geodetic network adjustment. The numerical example of the trilateration free network adjustment is given.

Теория уравнивания нивелирных и плановых геодезических сетей как свободных давно и хорошо разработана. Использование же этой технологии для обработки пространственных сетей в литературе практически не описано.

Приведем общие формулы и положения уравнивания свободных сетей. Рассмотрим систему параметрических уравнений:

$$V = AX + l, \qquad (1)$$

где A – матрица коэффициентов размером $n \times k$; X – вектор размером $k \times 1$ определяемых параметров; l – вектор размером $n \times 1$ свободных членов; V – вектор размером $n \times 1$ поправок в измерения.

Известно [1, 6], что при уравнивании свободных сетей матрица A коэффициентов параметрических уравнений поправок имеет столбцовый дефект $d = k - r$, где r – ранг матрицы A; k – число параметров. Таким образом, d – это число параметров, фиксации которых не хватает для привязки сети к системе координат. Для сетей разного типа d может иметь разные значения. Так, в сетях нивелирования $d = 1$, в плановых сетях максимальное значение $d = 4$, в пространственных $d \le 7$. Если в сети зафиксировано только необходимое для привязки к системе координат число параметров, сеть называется нуль-свободной. В этом случае сеть все же остается свободной от деформаций, вносимых избыточным числом исходных данных [6]. Число минимально необходимых для фиксации параметров зависит не только от вида сети (одно-, дву- или трехмерная), но и от измеряемых в ней величин. Так, например, в сети трилатерации, очевидно, нет необходимости фиксировать масштаб.

Следствием того, что $d > 0$, является вырожденность соответствующей матрицы R коэффициентов нормальных уравнений. Существует множество различных псевдорешений, удовлетворяющих требованию $V^{\mathrm{T}}PV = \min$. Для выбора какого-то одного конкретного псевдорешения необходимо обладать дополнительной информацией о задаче, т.е. задать дополнительные условия. Многие разработанные методики вычисления требуемого псевдорешения сводятся к предварительному построению такой матрицы t, что [2, 3]

$$L(t) \quad L(A^{\mathrm{T}}) = 0;$$

$$\dim L(t) = d = \mathrm{k} - \operatorname{rank} A; \quad t^{\mathrm{t}}\hat{X} = 0,$$

где $L(t)$ и $L(A^{\mathrm{T}})$ – пространства столбцов матриц t и A^{T}; $\hat{X}$ – оценка вектора X.

Если взять $t = e$, где $L(\mathrm{e}) = \operatorname{Ker} A$ (т.е. e – матрица, столбцы которой образуют базис подпространства $\operatorname{Ker} A$), то мы получим главное или нормальное решение $X^{\perp}$ системы (1). Нормальным решением системы называют то ее решение, норма

$$\left\|\hat{X}\right\| = \sqrt{\hat{X}^{\mathrm{T}}\hat{X}}$$

которого является наименьшей среди норм всех решений этой системы. Это решение можно найти по формуле

$$\hat{X}^{\perp} = R^{+}b,$$

где R^{+} – главная псевдообратная матрица.

В свою очередь, R^+ можно найти, например, по формуле Рао [7]

$$\begin{pmatrix} R & t \\ t^{\tau} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^+ & T \\ T^{\tau} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В работе [6] показано, что при оценке точности неизвестных матрица R^+ играет ту же роль, что и матрица $Q = R^{-1}$. Ошибка единицы веса при этом

$$\mu = \sqrt{\frac{V^{\tau}PV}{n-k+d}}. \qquad (3)$$

С различными методами вычисления псевдообратных матриц можно ознакомиться, например, в работе [5].

Найдем элементы матрицы e при уравнивании пространственных сетей. Выше указывалось, что столбцы матрицы e образуют базис подпространства $\mathrm{Ker}\,A$. В работах [1, 2] дана интерпретация элементов из $\mathrm{Ker}\,A$ как изменений координат точек сети, сохраняющих ее геометрию, т.е. изменений, происходящих за счет сдвига сети, разворота сети и изменения масштаба. Таким образом, элементами матрицы e являются коэффициенты уравнений поправок, возникающих при конформном преобразовании координат в задаче объединения сетей по координатам идентичных пунктов. Формулы преобразования координат для пространственных сетей имеют вид [4]

$$x' = a + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z;$$
$$y' = b + \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z;$$
$$z' = c + \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z,$$

где x', y', z' – координаты произвольной точки в первой системе координат; x, y, z – координаты этой же точки относительно второй системы координат; a, b, c – координаты начала второй системы относительно первой.

Числа α_{ij} определяются через углы Эйлера (φ, ψ, θ) следующим образом:

$$\alpha_{11} = \cos(\psi)\cos(\theta);$$
$$\alpha_{12} = -\cos(\psi)\sin(\theta);$$
$$\alpha_{13} = -\sin(\psi);$$
$$\alpha_{22} = \sin(\varphi)\sin(\psi)\sin(\theta) + \cos(\varphi)\cos(\theta);$$
$$\alpha_{23} = -\sin(\varphi)\cos(\psi);$$
$$\alpha_{31} = \cos(\varphi)\sin(\psi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta);$$
$$\alpha_{32} = -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\theta) + \sin(\varphi)\cos(\theta);$$
$$\alpha_{33} = \cos(\varphi)\cos(\psi).$$

При малых углах Эйлера и масштабном факторе $m \approx 1$ найдем производные:

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \frac{\partial y'}{\partial b} = \frac{\partial z'}{\partial c} = 1;$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi} \approx 0;\ \frac{\partial x'}{\partial \psi} \approx -z;\ \frac{\partial x'}{\partial \theta} \approx -y;\ \frac{\partial x'}{\partial m} \approx x;$$

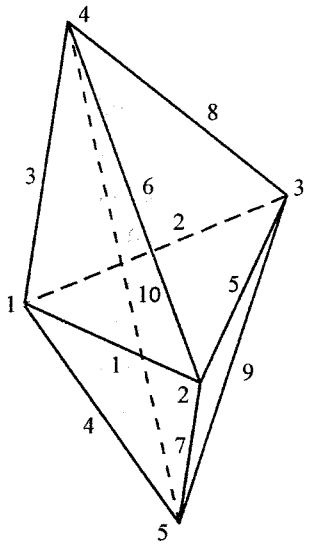
$$\frac{\partial y'}{\partial \varphi} \approx -z;\ \frac{\partial y'}{\partial \psi} \approx 0;\ \frac{\partial y'}{\partial \theta} \approx x;\ \frac{\partial y'}{\partial m} \approx y;$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \varphi} \approx y;\ \frac{\partial z'}{\partial \psi} \approx x;\ \frac{\partial z'}{\partial \theta} \approx 0;\ \frac{\partial z'}{\partial m} \approx z.$$

Таким образом, для каждой точки матрица e будет состоять из трехстрочных полос:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & -y & x \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & y & x & 0 & z \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Известно, что минимальное число исходных данных, привязывающих пространственную сеть к фиксированной системе координат, равно 7, т.е. мы должны зафиксировать положение сети относительно начала координат (по трем осям), разворот сети в трех плоскостях и масштаб. Положение относительно начала координат определяется путем фиксации координат (x, y, z) одного из пунктов. Фиксация координат второго пункта дает нам масштаб сети и ориентировку линии, соединяющей эти пункты, в пространстве. Однако остается возможность вращения сети вокруг этой линии. Чтобы окончательно привязать сеть, нам достаточно зафиксировать любую координату одного из пунктов, не лежащих на прямой, соединяющей первые два пункта. Реально такое количество зафиксированных параметров всегда будет избыточным, так как некоторые из элементов, определяющих привязку сети, фиксируются измерениями. Для разного вида сетей набор фиксируемых па-



Сеть пространственной трилатерации

раметров при уравнивании сети как нульсвободной будет меняться. Соответственно будет меняться и вид матрицы e.

В качестве иллюстрации приведем пример уравнивания сети пространственной трилатерации. Пусть имеем сеть пространственной трилатерации из пяти пунктов (см. рисунок). Предварительные координаты пунктов и вектор измерений заданы в метрах и выглядят так:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 100{,}00 \\ 108{,}00 \\ 254{,}00 \\ 180{,}00 \\ 157{,}00 \end{bmatrix}; \quad y_0 = \begin{bmatrix} 100{,}00 \\ 215{,}00 \\ 175{,}00 \\ 152{,}00 \\ 181{,}00 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} 100{,}00 \\ 132{,}00 \\ 89{,}00 \\ 234{,}00 \\ 47{,}00 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 119{,}486 \\ 171{,}514 \\ 164{,}690 \\ 112{,}063 \\ 157{,}132 \\ 140{,}252 \\ 103{,}644 \\ 164{,}578 \\ 105{,}584 \\ 190{,}724 \end{bmatrix}.$$

Вследствие больших размеров, матрицу коэффициентов параметрических уравнений мы не приводим, а вектор свободных членов будет таким

$$l^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}151 \\ 0{,}131 \\ -0{,}191 \\ 0{,}271 \\ 0{,}237 \\ -0{,}406 \\ 0{,}192 \\ -0{,}170 \\ 0{,}289 \\ -0{,}096 \end{pmatrix}.$$

Веса измерений назначим равными $1/m^2$, где m – средняя квадратическая погрешность (СКП) измерения расстояния. В нашем случае $m = 5$ мм.

Матрица t будет состоять из всех столбцов матрицы (4), кроме последнего, так как масштаб сети задается самими измерениями:

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -100 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 & 100 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -132 & -215 \\ 0 & 1 & 0 & -132 & 0 & 108 \\ 0 & 0 & 1 & 215 & 108 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -89 & -175 \\ 0 & 1 & 0 & -89 & 0 & 254 \\ 0 & 0 & 1 & 175 & 254 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -234 & -152 \\ 0 & 1 & 0 & -234 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 152 & 180 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -47 & -181 \\ 0 & 1 & 0 & -47 & 0 & 157 \\ 0 & 0 & 1 & 181 & 157 & 0 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (2) и получим матрицу R^{+}. В целях экономии места приведем только ее диагональные элементы:

$$R^{+} = \begin{bmatrix} 1{,}11\cdot10^{-5} \\ 7{,}90\cdot10^{-6} \\ 9{,}56\cdot10^{-6} \\ 1{,}15\cdot10^{-5} \\ 1{,}22\cdot10^{-5} \\ 8{,}26\cdot10^{-6} \\ 5{,}78\cdot10^{-6} \\ 1{,}80\cdot10^{-5} \\ 8{,}23\cdot10^{-6} \\ 7{,}54\cdot10^{-6} \\ 1{,}00\cdot10^{-5} \\ 5{,}85\cdot10^{-6} \\ 9{,}05\cdot10^{-6} \\ 2{,}28\cdot10^{-5} \\ 9{,}18\cdot10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Затем найдем вектор поправок в измерения и вектор оценок параметров:

$$V = \begin{bmatrix} -0{,}001 \\ -0{,}001 \\ 0{,}001 \\ 0{,}001 \\ -0{,}002 \\ 0{,}001 \\ 0{,}002 \\ 0{,}002 \\ 0{,}002 \\ -0{,}003 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} -0{,}017 & \delta x1 \\ 0{,}141 & \delta y1 \\ -0{,}058 & \delta z1 \\ 0{,}028 & \delta x2 \\ 0{,}022 & \delta y2 \\ -0{,}208 & \delta z2 \\ -0{,}159 & \delta x3 \\ 0{,}129 & \delta y3 \\ -0{,}067 & \delta z3 \\ 0{,}092 & \delta x4 \\ -0{,}123 & \delta y4 \\ 0{,}215 & \delta z4 \\ 0{,}056 & \delta x5 \\ -0{,}169 & \delta y5 \\ 0{,}118 & \delta z5 \end{bmatrix}.$$

По формуле (3) найдем ошибку единицы веса и СКП искомых параметров: $\mu = (1{,}0487)$;

$$m^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}004 \\ 0{,}004 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}004 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}003 \\ 0{,}005 \\ 0{,}003 \end{pmatrix}.$$

Эти погрешности являются мерой точности положения пунктов сети в системе координат, определяемой предварительными координатами всех пунктов, и характеризуют внутреннюю сходимость в сети.

Для уравнивания этой сети как нульсвободной необходимо зафиксировать шесть параметров. Например, три координаты первого пункта, x, y второго пункта и x третьего пункта. В этом случае получим в точности такой же вектор поправок в измерения и следующий вектор оцениваемых параметров:

$$X = \begin{bmatrix} -0{,}567 & \delta z2 \\ -0{,}227 & \delta y3 \\ 0{,}517 & \delta z3 \\ -0{,}553 & \delta x4 \\ 0{,}183 & \delta y4 \\ 0{,}494 & \delta z4 \\ 0{,}446 & \delta x5 \\ -0{,}586 & \delta y5 \\ 0{,}157 & \delta z5 \end{bmatrix}.$$

Средние квадратические погрешности искомых параметров будут такими:

$$m^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}019 \\ 0{,}011 \\ 0{,}026 \\ 0{,}018 \\ 0{,}022 \\ 0{,}016 \\ 0{,}008 \\ 0{,}012 \\ 0{,}017 \end{pmatrix}.$$

Они являются мерой точности положения пунктов сети в системе координат, определяемой предварительными координатами всех пунктов, и характеризуют внутреннюю сходимость сети.

Если обрабатывается пространственная линейно-угловая сеть, необходимыми параметрами будут только три координаты одного пункта и x или y другого. Матрица t будет состоять из первых трех и шестого столбцов матрицы (4). Это связано с тем, что кроме масштаба, благодаря наличию измеренных вертикальных углов, фиксируется разворот сети относительно плоскости OXY.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бывшев В.А.* О алгебраической структуре множества матриц, g-обратных к симметричной матрице, в задаче уравнивания по методу наименьших квадратов свободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1983. № 4. С.11-19.

2. *Бывшев В.А.* Об интерпретации результатов уравнивания свободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 2. С.7-14.

3. *Бывшев В.А.* Методика вычисления псевдорешений уравнений ошибок с требуемыми экстремальными свойствами / В.А.Бывшев, Е.В.Алексашина // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1993. № 4. С.8-17.

4. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. 6-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 240 с.

5. *Князев А.Г.* О способах вычисления псевдообратной матрицы при уравнивании свободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1987. № 5. С.25-34.

6. *Маркузе Ю.И.* Основы уравнительных вычислений: Уч. пос. для вузов. М.: Недра, 1990. 240 с.

7. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968. 548 с.