

## ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПУТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Приводится вывод уравнений поверхностей вращения в форме тензорных преобразований канонического уравнения земного эллипсоида.

The obtaining of the rotation surfaces equations is described in the form of tensor transformations of the canonical earth ellipsoid equation.

Представлены разработки по получению уравнений двух поверхностей вращения в форме преобразований канонического уравнения земного эллипсоида. В основу разработок положена методика, уже использованная при отыскании параметров среднего квадратического эллипсоида ошибок [2].

Рассмотрим тензор ошибок

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

представленный симметричной матрицей с инвариантами:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= m_{11} + m_{22} + m_{33}; \\ S_2 &= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}; \\ S_3 &= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Инварианты (2) напрямую связаны с характеристическим уравнением

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0. \quad (3)$$

Корни  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) этого уравнения определяют полуоси эллипсоида ошибок:

$$M_{\max} = \sqrt{\lambda_1}; \quad M_{\text{med}} = \sqrt{\lambda_2}; \quad M_{\min} = \sqrt{\lambda_3}.$$

Особенность методики их определения состоит в преобразовании тензора (1):

$$M = M_S + M_D.$$

Шаровой тензор

$$M_S = \begin{pmatrix} 1/3S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3S_1 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

тензор девиатор

$$M_D = \begin{pmatrix} m'_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m'_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{32} & m'_{33} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Компоненты и инварианты тензоров (4) и (5) имеют вид

$$m'_{11} = m_{11} - 1/3S_1;$$

$$m'_{22} = m_{22} - 1/3S_1;$$

$$m'_{33} = m_{33} - 1/3S_1;$$

$$1/3S_1 = 1/3(m_{11} + m_{22} + m_{33});$$

$$S'_1 = m'_{11} + m'_{22} + m'_{33} = 0;$$

$$S'_2 = \begin{vmatrix} m'_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m'_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m'_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m'_{33} \end{vmatrix};$$

$$S'_3 = \begin{vmatrix} m'_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m'_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m'_{33} \end{vmatrix}.$$

Тензоры (4) и (5) образуют два новых характеристических уравнения:

$$(1/3S_1 - \lambda_0)^3 = 0; \quad (6)$$

$$(\lambda')^3 + S'_2\lambda' - S'_3 = 0. \quad (7)$$

Из уравнения (6), очевидно, имеем

$$\lambda_0 = 1/3S_1,$$

а из решения уравнения (7) по известным формулам Кардано получим  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  с контролем по инвариантам:

$$S'_1 = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 0;$$

$$S'_2 = \lambda'_1\lambda'_2 + \lambda'_1\lambda'_3 + \lambda'_2\lambda'_3;$$

$$S'_3 = \lambda'_1\lambda'_2\lambda'_3.$$

Корни основного уравнения (3) получим в форме простых сумм:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda'_1 + \lambda_0; \\ \lambda_2 &= \lambda'_2 + \lambda_0; \\ \lambda_3 &= \lambda'_3 + \lambda_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Контроль по инвариантам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \\ S_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3; \\ S_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Такова, вкратце, методика определения полуосей эллипсоида ошибок. Далее известно [3], что каждому симметричному тензору ставится в соответствие поверхность второго порядка (что и иллюстрируется методикой отыскания полуосей эллипсоида ошибок). Поскольку тензоры (4) и (5) также симметричны, тензору (4) поставим в соответствие поверхность шара с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (10)$$

где  $R^2 = 1/3S_1$ , а тензору (5) – поверхность, параметры которой легко определяются из равенств (8):

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \lambda_1 - \lambda_0; \\ \lambda'_2 &= \lambda_2 - \lambda_0; \\ \lambda'_3 &= \lambda_3 - \lambda_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая инвариант  $S'_1 = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 0$  и условие дискриминанта [1]

$$(S'_3)^2 + \frac{4}{27}(S'_2)^3 \leq 0,$$

найдем, что корни  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  уравнения (7) – вещественны и имеют разные знаки, поэтому получим уравнение вида

$$\frac{x^2}{\lambda'_1} + \frac{y^2}{\lambda'_2} - \frac{z^2}{\lambda'_3} = 1,$$

которое представляет собой уравнение однополостного гиперболоида вращения.

Обратимся к каноническому уравнению земного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Его полуоси, очевидно, идентичны корням уравнения (3):  $\lambda_1 = \lambda_2 = a^2$ ,  $\lambda_3 = b^2$ , поэтому первый инвариант из равенств (9)

$$S_1 = a^2 + a^2 + b^2.$$

Отсюда радиус шара уравнения (10) определяется очевидным равенством

$$R^2 = 1/3(2a^2 + b^2).$$

Далее равенства (11) получают реализацию в виде

$$\lambda'_1 = a^2 - 1/3(2a^2 + b^2) = 1/3(a^2 - b^2);$$

$$\lambda'_2 = a^2 - 1/3(2a^2 + b^2) = 1/3(a^2 - b^2);$$

$$\lambda'_3 = b^2 - 1/3(2a^2 + b^2) = -2/3(a^2 - b^2).$$

Найденные значения  $\lambda'_i (i=1, 2, 3)$  подставим в уравнения (10) и (12). В итоге получим следующие уравнения поверхностей вращения: уравнение шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1/3(2a^2 + b^2) = R^2; \quad (13)$$

# Параметры поверхностей пересечения

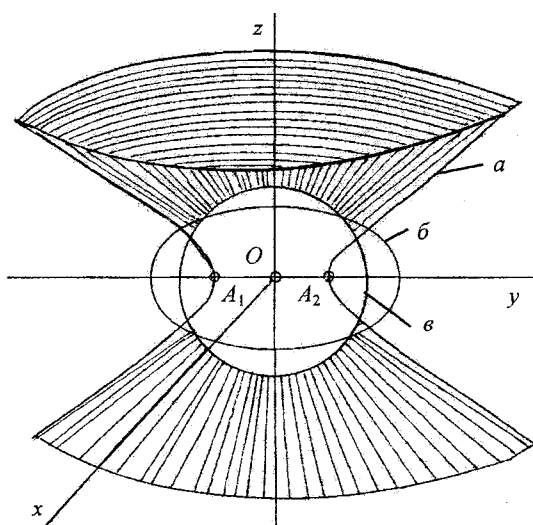
| Поверхности пересечения | Высота пересечения      | Окружность сечения            |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| Эллипсоид – шар         | $z^2 = 1/3b^2$          | $x^2 + y^2 = 2/3a^2$          |
| Эллипсоид – гиперboloид | $z^2 = 2/3b^2$          | $x^2 + y^2 = 1/3a^2$          |
| Гиперboloид – шар       | $z^2 = 2/9(a^2 + 2b^2)$ | $x^2 + y^2 = 1/9(4a^2 - b^2)$ |
| Экватор гиперboloида    | $z = 0$                 | $x^2 + y^2 = 1/3(a^2 - b^2)$  |

уравнение однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{1/3(2a^2 - b^2)} + \frac{y^2}{1/3(2a^2 - b^2)} - \frac{z^2}{2/3(2a^2 - b^2)} = 1; \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 1/3(a^2 - b^2). \quad (15)$$

Как видим, уравнения (13), (14), (15) представлены в параметрах земного эллипсоида. В этой связи отметим, что, поскольку



Взаимное положение трех поверхностей:  
а – гиперboloид; б – эллипсоид; в – шар  
A<sub>1</sub>A<sub>2</sub> – экватор гиперboloида

радиус шара уравнения (13) определяется как среднее значение из квадратов полуосей эллипсоида, назовем этот шар – «шар квадратический»; для него по параметрам эллипсоида Красовского имеем  $R_{\text{кв}} = 6371125,6$  м, а по параметрам эллипсоида WGS-84  $R_{\text{кв}} = 6371016,746$  м.

Для иллюстрации геометрии взаимного положения всех трех поверхностей вращения с их общей осью OZ достаточно попарно решить уравнения (12), (13) и (14), чтобы получить высоту пересечения поверхностей в форме  $z^2$  и окружность сечения в форме  $x^2 + y^2 = r^2$  (см. таблицу, рисунок).

Таким образом, в результате тензорных преобразований земной эллипсоид, образно говоря, представлен суммой двух поверхностей вращения, что, по нашему мнению, не лишено интереса для теории задач сферической геодезии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вакуленко А.А. Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике / ЛГУ. Л., 1972. 64 с.
2. Коробков С.А. Тензор ошибок на плоскости и в пространстве // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2000. № 2. С.3-20.
3. Кочин П.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 7-е изд. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 426 с.