УДК 517.9

И.А.ЛЕБЕДЕВ
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описано параметрическое представление функционалов от решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в зависимости от начального условия.

The article describe a parametric representation of functionals on a decision of ordinal differentional equation, of firstorder as a function of initial condition.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} + p(w,t) = 0, \qquad (1)$$

где комплекснозначная функция $p(w,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) w^k$ задана на интервале $t \in [\tau : T)$ и аналитична по w в некоторой окрестности нуля.

Пусть $|\gamma_0(t)| = g(t) \ge 0$, $|\gamma_k(t)| \le a^k g(t) a$, $a > 0$ и $\gamma_k(t)$ непрерывны на $[\tau : T)$, а начальное условие $w|_{t=\tau} = v$, т.е решение уравнения (1), $w = w(v,t)$. Кроме того, все рассматриваемые ветви функций – главные $(\ln 1 = 0,\ 1^{\varepsilon} = 1)$.

Для функции $p(w,t)$ мажорирующая функция $\tilde{p}(w,t)$ имеет вид

$$\tilde{p}(w,t) = g(t)\sum_{n=0}^{\infty} a^n w^n = \frac{g(t)}{1-aw}$$

и входит в рассматриваемый класс функций $p(w,t)$. Эта функция $\tilde{p}(w,t)$ существует для $|w| < \frac{1}{a}$, а значит, там же определены и функции $p(w,t)$. При этих условиях решение задачи Коши непрерывно зависит от начального условия*.

Поэтому, по крайней мере для достаточно малого v, решение $w = w(v,t)$ уравнения (1) на всем интервале $[\tau : T)$ будет находиться внутри круга $|w| < \frac{1}{a}$.

Теорема 1. Если $M = \int_{\tau}^{T} g(t)dt < +\infty$, $\varepsilon > 0, D_0 \ne 0$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|D_n|} \le ae^{-M}$, то для уравнения (1) интегрирующий множитель степенного типа

$$\mu = \mu(w,t) = w^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) w^n, \qquad (2)$$

где $\alpha_n(t) \ne 0$ определяется на всем интервале $[\tau, T]$ внутри круга $|w| < \frac{1}{a}$ с точностью до постоянного множителя равенствами

$$\alpha_n(t) = \Delta^{\lambda_n}(t)\left(\lambda_n \int_{T}^{t} \varphi_n(t)\Delta^{-\lambda_n}(t)dt + D_n\right); \quad (3)$$

$\lambda_n = n + \varepsilon, \quad \Delta(t) = \exp\int_{\tau}^{t} \gamma_0(t)dt, \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\gamma_{n-k}(t)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1) и его интегрирующий множитель (2):

$$\frac{\mu(w,t)}{W}dw + \mu(w,t)p(w,t)dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{w}\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w}\left[\mu(w,t)p(w,t)\right] = \frac{\partial\mu}{\partial w}p + \mu\frac{\partial p}{\partial w} \Rightarrow \quad (4)$$

* *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 411 с.

$$-\frac{1}{w}\frac{\partial \ln \mu}{\partial t} = p\frac{\partial \ln \mu}{\partial w} + \frac{\partial p}{\partial w}. \qquad (5)$$

Так как имеем

$$\mu(w,t)\,p(w,t) = w^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t)\gamma_{n-k}(t)\right)w^n,$$

то по (4) получаем

$$\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha'_n w^{n+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\gamma_{n-k}\right)(n+\varepsilon)w^{n+\varepsilon-1} \Rightarrow$$

$$\alpha'_n = \lambda_n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\gamma_{n-k} = \lambda_n\varphi_n + \lambda_n\alpha_n\gamma_0 \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \Delta^{\lambda_n}\left(\lambda_n\int_{\tau}^{t}\varphi_n\Delta^{-\lambda_n}dt + d_n\right), \qquad (6)$$

где $\alpha_n(\tau) = d_n$.

Так как $e^{-M} \le |\Delta(t)| \le e^{M}$, $\varphi_0 = 0$ и $\alpha_0 = \Delta^{\lambda_0}d_0$, то по индукции нетрудно показать, что $\varphi_n = \Delta^{\lambda_{n-1}}\omega_n g(t)$ и $\alpha_n = \Delta^{\lambda_n}\sigma_n$, где ω_n и σ_n ограничены для $t \in [\tau, T)$. Действительно, если $\alpha_k = \Delta^{\lambda_k}\sigma_k$, то получаем

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta^{\lambda_k}\sigma_k\gamma_{n-k} = \Delta^{\lambda_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^{-(n-k-1)}\sigma_k\gamma_{n-k} \Rightarrow$$

$$\left|\varphi_n\Delta^{-\lambda_{n-1}}\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\Delta|^{-(n-k-1)}\left|\sigma_k\right|a^{n-k}g(t) \le C_n g(t) \Rightarrow$$

$$\left|\alpha_n\Delta^{-\lambda_n}\right| \le \lambda_n\int_{\tau}^{t}C_n|\Delta|^{-1}g(t)dt + |d_n| \le \lambda_n C_n e^{M}M + |d_n|.$$

Таким образом, индукция завершена, и в уравнении (6) интегралы ограничены. Поэтому коэффициент α_n можно представить в виде

$$\alpha_n(t) = \Delta^{\lambda_n}(t)\left(\lambda_n\int_{T}^{t}\varphi_n(t)\Delta^{-\lambda_n}(t)dt + D_n\right). \qquad (7)$$

Используя мажорирующую функцию $\tilde{p}(w,t)$, по (5) получим

$$\frac{1}{w}\frac{\partial \ln\tilde{\mu}}{\partial t} = \tilde{p}\frac{\partial \ln\tilde{\mu}}{\partial w} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial w} = \frac{g(t)}{1-aw}\frac{\partial \ln\tilde{\mu}}{\partial w} + \frac{ag(t)}{(1-aw)^2} \Rightarrow$$

$$g(t)dt = \frac{aw-1}{w}dw = \frac{(aw-1)^2}{aw}d\ln\tilde{\mu},$$

т.е. систему уравнений, из которой определяется $\tilde{\mu}(w,t)$. Отметим, что в силу сходимости интеграла $\int_{\tau}^{T}g(t)dt = M$ интегрирующий множитель $\tilde{\mu}(w,t)$ будет степенного типа и существовать в круге $|w| < \frac{1}{a}$ при всех $t \in [\tau; T]$ в случае сходимости соответствующего ряда для $\tilde{\mu}(w,t)$.

Для этого по (7) достаточно, чтобы $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\tilde{a}_n(T)|} = |\tilde{\Delta}(T)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|D_n|} \le a \Rightarrow$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|D_n|} \le a|\tilde{\Delta}(T)|^{-1} = ae^{-M}$.

В силу мажорации по Коши* то же самое верно для $\mu(w,t)$. Доказательство окончено.

Теорема 2. Если

$$F_{\mu} = F_{\mu}(w,t) = \int_{0}^{w}\frac{\mu(w,t)}{w}dw,$$

то для $|v| < \frac{1}{a}$ имеем

$$F_{\mu}(V,T) = F_{\mu}(v,\tau),$$

где $V = \lim_{t\to T} w(v,t)$.

Доказательство. Если решение уравнения (1) искать в виде $w = \sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)v^k$, где $c_1(\tau) = 1$ и $c_i(\tau) = 0$ для $i \ge 2$, то имеем

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty}c'_k v^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k w^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[Q_k(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}) - c_k\gamma_0\right]v^k \Rightarrow$$

$$c'_k = -c_k\gamma_0 + Q_k \Rightarrow c_k = \Delta^{-1}\left(\int_{\tau}^{t}Q_k\Delta dt + N_k\right), \qquad (8)$$

где $Q_k = Q_k(c_1, c_2, \ldots c_{k-1})$ содержит только суммы произведений c_i и γ_j, причем $Q_0 \equiv 0$, $N_1 = 1$ и $N_i = 0$ $(i \ge 2)$.

---

* *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.: ОНТИ, 1936. Т.2. 311 с.

Следовательно, по (8) решение $w = w(v,t)$ уравнения (1) мажорируется решением $\tilde{w} = \tilde{w}(|v|,t)$ этого уравнения с функцией $\tilde{p}(w,t)$, которое находится следующим образом:

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = -\frac{g(t)\tilde{w}}{1-a\tilde{w}} \Rightarrow \tilde{w}e^{-a\tilde{w}} = |v|e^{-a|v|}e^{-\int_{\tau}^{t} g(t)dt} \le |v|e^{-a|v|}.$$

Так как $\tilde{w} \ge 0$, $|v| < \frac{1}{a}$ и функция xe^{-ax} возрастает для $x \in \left[0; \frac{1}{a}\right]$, то необходимо $|\tilde{w}| = \tilde{w} < \frac{1}{a}$. Отсюда также следует существование $\tilde{w}(|v|;T) = \lim\limits_{t\to T} \tilde{w}(|v|,t)$ и по мажорации на всем интервале $[\tau, T]$ имеем $|w(v;t)| < \frac{1}{a}$ и существует $V = \lim\limits_{t\to T} w(v;t)$.

Если $\mu = \mu(w,t)$ – интегрирующий множитель для уравнения (1), то по (4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{\mu}(w;t) = \mu(w;t)p(w;t) - \mu(0;t)p(0;t) =$$

$$= \mu(w;t)p(w;t) \Rightarrow$$

$$F_{\mu}(v;t) - F_{\mu}(v;\tau) = \int_{\tau}^{t} \mu(v;t)p(v;t)dt,$$

и, следовательно, интегрируя уравнение (1), получаем

$$\int_{v}^{w} \frac{\mu(w;t)}{w}dw + \int_{\tau}^{t} \mu(v;t)p(v;t)dt = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\mu}(w;t) - F_{\mu}(v;t) + F_{\mu}(v;t) - F_{\mu}(v;\tau) =$$

$$= 0 \Rightarrow F(w;t) = F(v;\tau).$$

Переходя к пределу при $t \to T$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\lambda_n \int_{\tau}^{T} \gamma_0(t)dt\right)\frac{D_n}{\lambda_n}V^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau)v^{\lambda_n},$$

где $y_n' = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k(t)\gamma_{n-k}(t)\Delta^{-(n-k)}(t)$; $y_n(T) = \frac{D_n}{\lambda_n}$.

Доказательство. Так как $F_{\mu}(w;t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(t)}{\lambda_n} w^{\lambda_n}$, по теореме (2) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{\lambda_n}(T)D_n}{\lambda_n}V^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(\tau)}{\lambda_n}v^{\lambda_n}. \qquad (9)$$

Приняв

$$y_n = \frac{\Delta^{-\lambda_n}(t)\alpha_n(t)}{\lambda_n},$$

по выражениям (3) и (9) получаем требуемое утверждение.