УДК 539.3

В.В.ТАРАБАН
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)
Ю.В.ПЕТРОВ
Санкт-Петербургский государственный университет

ОПТИМИЗАЦИЯ УДАРНОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНАМИ

Исследуется задача оптимизации ударного разрушения материалов с трещинами. Получены представления для пороговых характеристик нагружения. Изучено влияние длины трещины на размер и длительность минимального разрушающего импульса.

The problem of optimization of pulse fracture of materials with crack is investigated. The expressions of threshold characteristics of impact loading were received. The influence of length of a crack on magnitude and duration of the minimal fracture pulse is studied.

Пусть в неограниченном упругом однородном изотропном пространстве содержится прямолинейная трещина длиной $2a$. К поверхности трещины прикладывается внешний импульс напряжений прямоугольного профиля (постоянное давление в течение промежутка времени T). Граничные условия на линии $y = 0$

$$\sigma_{yy}(x,0,t) = -\sigma\left[H(t) - H(t-T)\right] \text{ при } |x| < a;$$

$$\tau_{xy}(x,0,t) = 0 \text{ при } 0 < |x| < \infty; \qquad (1)$$

$$V(x,0,t) = 0 \text{ при } |x| > a,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда; σ = const.

Требуем, чтобы на бесконечном удалении от трещины выполнялись условия затухания $U(x, y, t) \to 0$, $V(x, y, t,) \to 0$ при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Компоненты тензора напряжений σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} и компоненты вектора перемещения U, V могут быть представлены через две скалярные функции $\phi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$c_1^2\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \quad c_2^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

так, что

$$U = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}; \qquad (3)$$

$$\sigma_{xx} = -\rho c_1^2\Delta\phi + 2\rho c_2^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\right);$$

$$\sigma_{yy} = -\rho c_1^2\Delta\phi - 2\rho c_2^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\right); \qquad (4)$$

$$\tau_{xy} = -\rho c_1^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right),$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; c_1 и c_2 – скорость продольных и поперечных волн соответственно; ρ – плотность материала.

Решение уравнений (1)-(4) может быть получено методами преобразования Лапласа. Воспользуемся некоторыми результатами работы [3]. Тогда исследуемая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма

$$F(\xi,\overline{p}) - \int_0^1 F(\eta,\overline{p})L(\xi,\eta,\overline{p})d\eta = \sqrt{\xi}$$

$$(0 \le \xi, \eta \le 1) \qquad (5)$$

с ядром

$$L(\xi,\eta,\overline{p}) = \frac{\sqrt{\xi\eta}}{(1-c^2)}\left[\int_0^\infty w(z,\overline{p})J_0(z\eta)J_0(z\xi)dz - \right.$$

$$\left. - m\overline{p}^2 I_0(n\overline{p}\xi)K_0(n\overline{p}\eta)\right], \qquad (6)$$

где

$$w(z,\bar{p}) = z\left(1 - c^2 + \frac{m\bar{p}^2}{1+n^2\bar{p}^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\bar{p}^2}\left(4z^2\sqrt{z^2+\bar{p}^2} - \frac{(2z^2+\bar{p}^2)^2}{\sqrt{z^2+c^2\bar{p}^2}}\right); \quad (7)$$

$c = c_2/c_1$; $\bar{p} = pa/c_2$; $m = (3c^4 - 4c^2 + 3)/4$; $n = (5c^6 - 6c^4 + 2c + 1)/8m$; J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины

$$K_I(\bar{t}) = \sigma\sqrt{\pi a}\left[g(\bar{t})H(\bar{t}) - g(\bar{t}-\bar{T})H(\bar{t}-\bar{T})\right], \quad (8)$$

где $\bar{t} = tc_2/a$; $\bar{T} = Tc_2/a$; $g(\bar{t})$ – оригинал функции $F(1,\bar{p})/\bar{p}$.

Тогда

$$\frac{F(1,\bar{p})}{\bar{p}} = \int_0^{+\infty} e^{-\bar{p}\bar{t}}\, g(\bar{t})\, d\bar{t}. \quad (9)$$

Интегральное уравнение (5) было решено численно с помощью квадратурных формул Симпсона и метода исключения Гаусса. Численное обращение преобразования Лапласа (9) проводилось методом Беллмана [1] (тестировалась высокопрочная сталь с коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}29$).

Анализ прочностных свойств материала будем проводить на основе структурно-временного подхода [2]. Тогда условие разрушения материала в вершине трещины в момент времени t может быть записано в виде

$$\int_{t-\tau}^{t} K_I(t)\, dt = K_{Ic}\tau, \quad (10)$$

где K_{Ic}, τ – материальные константы: статическая вязкость разрушения и структурное время разрушения соответственно.

Исследуем ситуацию, при которой разрушение материала вблизи вершины трещины происходит непосредственно в момент прекращения действия внешнего импульса, т.е. при $t = T$. Обозначим $U_c = \sigma_c T$ – разрушающий импульс напряжений, амплитуду σ_c которого (разрушающую нагрузку в момент снятия импульса T) определим подстановкой коэффициента интенсивности напряжений из формулы (8) в критерий разрушения (10). Тогда зависимость разрушающего импульса от времени нагружения и длины трещины записывается следующей формулой:

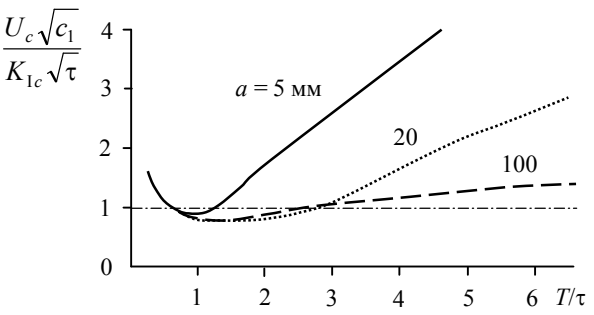


Рис.1. Зависимость разрушающего импульса от времени разрушения

$$U_c(T,a) = \frac{\tau K_{Ic} T}{\sqrt{\pi c_2}}\left[(a/c_2)^{3/2}\int_{(T-\tau)c_2/a}^{Tc_2/a} g(\bar{t})\, d\bar{t}\right]^{-1}. \quad (11)$$

Были проведены расчеты зависимости разрушающего импульса от времени разрушения по формуле (11) для различных значений длины трещины в материале (рис.1). Материал – высокопрочная сталь, для которой $\nu = 0{,}29$, $\tau = 7$ мкс, $c_1 = 6$ мм/мкс, $K_{Ic} = 47$ МПа$\sqrt{\text{м}}$. Рассмотрены случаи, когда длина трещины изменяется от нескольких миллиметров до десятков сантиметров (5-100 мм). Как видно из рис.1, полученные диаграммы имеют точки минимума, что указывает на возможность оптимизации процесса разрушения с целью определения минимального разрушающего импульса. Исследованы две задачи оптимизации ударного разрушения материалов с трещинами.

Первая задача связана с определением минимального разрушающего импульса U_c^* и соответствующей ему длительности нагружения T^* при заданной длине трещины: $U_c^*(a) = \min_T U_c(T,a)$ (рис.2, 3).

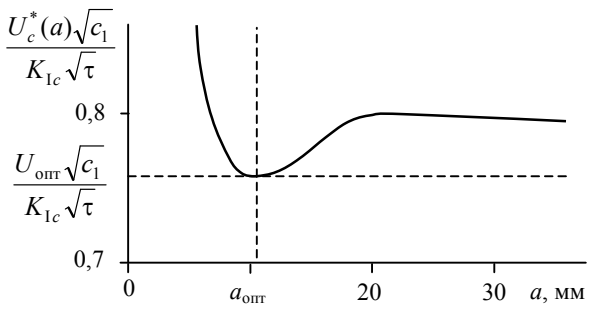


Рис.2. Зависимость минимального разрушающего импульса от длины трещины

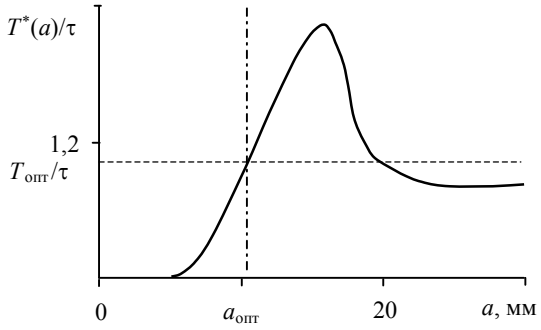


Рис.3. Зависимость длительности минимального разрушающего импульса от длины трещины

Вторая оптимизационная задача позволяет определить оптимальную длину трещины $a_{опт}$ и соответствующую оптимальную длительность нагружения $T_{опт}$, при которых разрушение материала производится наименьшим (оптимальным) разрушающим импульсом: $U_{опт} = \min_a U_c^*(a)$. Для исследуемой высокопрочной стали численные расчеты показали, что $U_{опт} = 0{,}1217$ Па·мкс при $a_{опт} = 10{,}553$ мм, $T_{опт} = 8{,}353$ мкс. Отметим, что оптимальная длительность нагружения оказалась сопоставимой со структурным временем разрушения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellman R.* Numerical inversion of the Laplace transform / R.Bellman, R.Kalaba, J.Lockett // Amsterdam. 1966. 249 p.

2. *Petrov Y.V.* On the modeling of fracture of brittle solids / Y.V.Petrov, N.F.Morozov // ASME J. Appl. Mech. 1994. Vol.61. P.710-712.

3. *Sih G.C.* Impact response of a finite crack in plane extension / G.C.Sih, G.T.Embley, R.S.Ravera // Int. J. Solids Structures. 1972. Vol.8. P.977-993.