УДК 517.9

И.А.ЛЕБЕДЕВ
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Описано решение обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются уравнениями в полных дифференциалах второго порядка.

The article describes a decision of ordinal differential equations, which is an equation in full differentials of second degree.

Многие физические процессы (в том числе горного дела) описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, поэтому возможность решения даже частных случаев таких уравнений точно (например, в квадратурах) имеет большое значение для теории и практики. Мы показываем, что уравнения в полных дифференциалах второго порядка (как и уравнения в полных дифференциалах первого порядка) могут быть решены в квадратурах.

Если $F = F(x, y)$, где $y = y(x)$ – искомая функция, то уравнением в полных дифференциалах второго порядка будет уравнение вида $d(dF) = 0$. В силу зависимости $y = y(x)$ получаем общее решение такого уравнения

$$D(dF) = 0 \Rightarrow dF = C_1 dx \Rightarrow F(x, y) = = C_1 x + C_2. \quad (1)$$

Найдем вид такого уравнения в предположении непрерывной дифференцируемости всех функций необходимое число раз в соответствующей области и в силу зависимости $y = y(x)$:

$$d(dF) = d\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial F}{\partial y}d^2 y = d^2 F + \frac{\partial F}{\partial y}y'' dx^2 = 0,$$

где $dy^2 = y'^2 dx^2$ и $d^2 y = y'' dx^2$.

Следовательно, уравнение

$$y'' + ay'^2 + 2by' + c = 0, \quad (2)$$

где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ и $c = c(x, y)$, является уравнением в полных дифференциалах, если для $\mu = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ имеем:

$$(\mu a y'^2 + 2\mu b y' + \mu c)dx^2 = \mu a dy^2 + 2\mu b dxdy + \mu c dx^2 = d^2 F \Rightarrow$$

$$\mu a = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial \mu}{\partial \mu};\ \mu b = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x};\ \mu c = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y};\ b = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \Rightarrow bdx + ady = d\ln\mu.$$

Для выполнения этих равенств необходимо (и достаточно), чтобы

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (3)$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial(\mu b)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu c)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}b + \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}c + \frac{\partial c}{\partial y} \Rightarrow$$

$$b^2 + \frac{\partial b}{\partial x} = ac + \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (4)$$

Условия (3)-(4) являются условиями полного дифференциала для $bdx + ady = d\ln\mu$ и $\mu c dx + \mu b dy = d\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)$, в силу чего для некоторой начальной точки (x_0, y_0) из рассматриваемой области получаем

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial y} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mu(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} a(x, y) dy \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{x_0}^{x} \mu(x, y_0) c(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \mu(x, y) b(x, y) dy,$$

а значит, функция, задающая общее решение (1),

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \mu(x, y_0) c(x, y_0) dx \right) dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \mu(x, y) dx, \quad (6)$$

где по (4) имеем

$$c(x, y) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(x, y) dy \right) \times$$

$$\times \left(\alpha(x) + \int_{y_0}^{y} \left(b^2(x, y) + \frac{\partial b}{\partial x} \right) \exp\left(\int_{y_0}^{y} a(x, y) dy \right) \right) \quad (7)$$

и $\alpha(x)$ – некоторая произвольная функция от x.

Таким образом, уравнение (2) будет уравнением в полных дифференциалах второго порядка при выполнении условий (3)-(4), тогда его общее решение в квадратурах имеет вид (1), где функцию $F(x,y)$ находят по (5)-(7). Этот класс уравнений, решаемых в квадратурах, является новым (за исключением частных случаев)*.

---

* *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука , 1971.

Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям / В.Ф.Зайцев, А.Д.Полянин. М.: Наука, 1993.