УДК 539.218

Г.Н.ЖУРОВ, В.Н.КОВАЛЕВСКИЙ
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет), Россия

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ С УЧЕТОМ ТОЛЬКО ЗАПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрено упругопластическое равновесие горного массива с учетом только запредельного состояния. Получены формулы для определения напряжений и смещений в упругой и запредельной зонах. Найдены границы раздела запредельной зоны от упругой.

It is considered (examined) упругопластическое elastic plastic balance of a hills with the account only an other-wordly condition. Formulas for definition of pressure and displacement in elastic and other-wordly zones are received. Borders of the unit other-wordly zones from elastic are found.

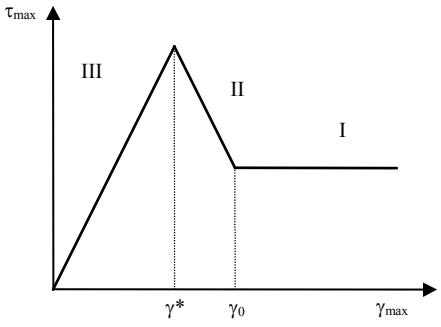
Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса R, сжимаемую на бесконечности усилиями $\sigma_x = \sigma_y = q \equiv \gamma H$, где H – глубина заложения выработки; γ – объемный вес горных пород.

Условие разрушения, учитывающее «запредельное состояние» [3] (см. рисунок, участок II):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = H + (\sigma_1 + \sigma_3)\cos 2\mu - 2M(\gamma_{\max} - \gamma_*),$$

где $H = 2K\cos\rho;\ 2\mu = \pi/2 - \rho;\ K, \rho$ – соответственно сцепление и угол внутреннего трения горной породы; M – модуль спада; γ_* – значение $\gamma_{\max}$ на пределе упругости.

Предположим, что зона пластичности полностью охватывает контур, на границе которого приложены усилия $\sigma_r = p = \text{const}$, $\tau_{r\theta} = 0$, моделирующие реакцию крепи. Тогда в соответствии с зависимостями между напряжениями и деформациями для горных пород вокруг контура образуются три зоны: I – остаточной прочности; II – запредельного состояния; III – линейной упругости.



Зависимость между напряжениями и деформациями для горных пород

В такой постановке задача рассматривалась в работе [1]. Однако при деформировании пород вокруг выработки зона I может не образовываться, тогда возникают только две зоны: запредельного состояния и упругая. В данной работе построено решение задачи для этого случая.

1. Во всей пластической области выполнено условие $\sigma_\theta - \sigma_r \geq 0$.

Представим напряжения σ_r, σ_θ через главные напряжения σ_1, σ_3 по формулам

$$\sigma_r = s - t; \quad \sigma_\theta = s + t,$$

где $s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3);\ t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, и подставим их в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \qquad (1)$$

Между s и t существует связь [2]:

$$s=\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2bh-\cos 2\mu-\sqrt{a}}{2bh-\cos 2\mu+\sqrt{a}}\right)^{\frac{\cos 2\mu}{2\sqrt{a}}}}{\sqrt{3kM-h\cos 2\mu+bh^2}}\quad (a>0);$$

$$s=\frac{\operatorname{ch}\exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\dfrac{2bh-\cos 2\mu}{\sqrt{-a}}\right)}{\sqrt{3kM-h\cos 2\mu+bh^2}}\quad (a<0);$$

$$s=\frac{\operatorname{ch}\exp\left(\dfrac{\cos 2\mu}{\cos 2\mu-2bh}\right)}{\sqrt{3kM-h\cos 2\mu+bh^2}}\quad (a=0), \qquad (2)$$

где $b=kM-1;\ a=\cos^2 2\mu-12kMb;\ c=\text{const};$

$$h=\frac{3kMs}{H+M\gamma_*+s\cos 2\mu+bt}. \qquad (3)$$

Здесь $k=\dfrac{(1-2\nu)}{E}$, ν, E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга среды. Тогда уравнение равновесия (1) можно представить в виде

$$\frac{3kM(1+h)s\,dh}{\left(3kM-h\cos 2\mu+bh^2\right)ht}+\frac{2dr}{r}=0.$$

Интегрируя это уравнение и определяя произвольную постоянную из условия $\sigma_r=p$ при $r=R$, получим, что h находится из уравнения

$$\frac{1}{2}\int_{h_0}^{h}\frac{3kM(1+h)s}{\left(3kM-h\cos 2\omega+bh^2\right)ht}dh=\ln\frac{R}{r},$$

где h_0 – неопределенная пока постоянная.

Перемещение u определим из соотношения

$$u=\frac{u_0t_0^2R}{t^2r}, \qquad (4)$$

где u_0, t_0 – неопределенные пока постоянные, а t определим из (3):

$$t=\frac{1}{bh}\left[(3kM-h\cos 2\mu)s-(H+M\gamma_*)h\right].$$

Постоянные t_0 и h_0 находим из соотношений

$$t_0=s_0-p;$$

$$h_0=\frac{3kMs_0}{\left(1+\dfrac{M}{G}\right)+\left(\dfrac{Mq}{G}+s_0\right)\cos 2\mu+b(s_0-p)},$$

где G – модуль упругости;

$$s_0=\frac{1}{\cos 2\mu+b}\left(\Gamma\Delta-\Pi+bp\right),$$

где

$$\Gamma=M\left(\frac{1}{G}+k\right)\left(H+q\cos 2\mu\right);$$

$$\Pi=\left(1+\frac{M}{G}\right)H-\frac{Mq}{G}\cos 2\mu;$$

$$\Delta=\left[\frac{(2bh_p-\cos 2\mu+\sqrt{a})(2bh_0-\cos 2\mu-\sqrt{a})}{(2bh_p-\cos 2\mu-\sqrt{a})(2bh_0-\cos 2\mu+\sqrt{a})}\right]^{\frac{\cos 2\mu}{2\sqrt{a}}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{3kM-h_p\cos 2\mu+bh_p^2}{3kM-h_0\cos 2\mu+bh_0^2}};$$

$$h_p=\frac{3kq}{\left(\dfrac{1}{G}+k\right)\left(H+q\cos 2\mu\right)}. \qquad (5)$$

Компонента напряжения определяется по формуле

$$\sigma_z=\frac{\Psi-k}{2\Psi+k}\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right), \qquad (6)$$

где

$$\Psi=\frac{u}{(1+h)tr}. \qquad (7)$$

В упругой зоне компоненты напряжений σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$ и перемещение u определяются по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=q\left(1\mp\frac{\beta}{r^2}\right);\quad \sigma_z=\nu\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right);$$

$$\tau_{r\theta}=0;\ u=r\varepsilon_\theta=\frac{r}{E}\left[\sigma_\theta-\nu\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right)\right]. \qquad (8)$$

Неизвестная постоянная β, найденная из условия непрерывности напряже-

ний на контуре $r = R_p$ зоны предельных деформаций

$$\beta = \left(\frac{H}{q} + \cos 2\mu \right) R_p^2 ,$$

где радиус зоны предельных деформаций R_p

$$\frac{R_p}{R} = \exp\left[\frac{1}{2} \int_{h_0}^{h_p} \frac{3kM(1+h)s}{(3kM - h\cos 2\mu + bh^2)ht} dh \right].$$

Здесь h_p определено формулой (5).

На контуре зоны предельных деформаций $r = R_p$ функция $\Psi = 1/2G$.

Отсюда согласно (7) имеем

$$u_p = u\Big|_{r=R_p} = \frac{R_p}{2G}\left[H + q\cos 2\mu + \frac{3kq}{\left(\frac{1}{G} + k\right)} \right].$$

Тогда начальное смещение контура $u_0 = u\big|_{r-R}$

$$u_0 = \frac{u_p(H + q\cos 2\mu)}{t_0}\left(\frac{R_p}{R} \right). \qquad (7)$$

2. Во всей пластической области выполнено условие $\sigma_\theta - \sigma_r < 0$.

Выражая компоненты напряжений σ_r, σ_θ через s и t:

$$\sigma_r = s + t; \quad \sigma_\theta = s - t$$

и подставляя их в уравнение равновесия (1), получим

$$\frac{3kM(1-h)s\,dh}{\left(3kM - h\cos 2\mu + bh^2\right)ht} - \frac{2dr}{r} = 0 .$$

Интегрируя это уравнение и определяя произвольную постоянную из условия $\sigma_r = p$ при $r = R$, получим h из уравнения

$$\frac{1}{2}\int_{h_0}^{h} \frac{3kM(1-h)s}{\left(3kM - h\cos 2\omega + bh^2\right)ht} dh = \ln\frac{r}{R},$$

где h_0 – неопределенная пока постоянная.

Перемещение u в пластической зоне определим по формуле (4).

Постоянные t_0 и h_0 находим из соотношений

$$t_0 = p - s_0 ;$$

$$h_0 = \frac{3kMs_0}{\left(1 + \frac{M}{G}\right)H + \left(\frac{Mq}{G} + s_0\right)\cos 2\mu + b(p - s_0)},$$

где $s_0 = \dfrac{1}{\cos 2\mu - b}\left(\Gamma\Delta - \Pi - bp\right)$.

Компоненту напряжения σ_z получим по формуле (6).

В упругой зоне имеют место формулы (8), где β находим из соотношения

$$\beta = -\left(\frac{H}{q} + \cos 2\mu \right) R_p^2 .$$

Радиус зоны предельных деформаций R_p

$$\frac{R_p}{R} = \exp\left[\frac{1}{2} \int_{h_0}^{h_p} \frac{3kM(1-h)s}{(3kM - h\cos 2\mu + bh^2)ht} dh \right].$$

Начальное смещение контура u_0 определим по формуле (7), где u_p имеет вид

$$u_p = \frac{R_p}{2G}\left[H + q\cos 2\mu - \frac{3kq}{\left(\frac{1}{G} + k\right)} \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журов Г.Н.* Упругопластическая задача о распределении напряжений вокруг горной выработки с учетом запредельного состояния // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. сб. тр. / СПбГАСУ. СПб, 2000. Вып.6. С.100-106.

2. *Протосеня А.Г.* Напряженно-деформированное состояние вокруг выработок при разупрочнении горных пород / А.Г.Протосеня, Г.Н.Журов // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. Новосибирск, 1985. С.21-26.

3. *Ставрогин А.Н.* Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1985. 272 с