УДК 622.273.2:622.831

А.П.ГОСПОДАРИКОВ
профессор кафедры высшей математики
Л.А.БЕСПАЛОВ
Горный факультет, группа ТПМ-01,
ассистент профессора

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТОК РАЗЛИЧНОГО ОЧЕРТАНИЯ

При ведении горных работ в массиве горных пород происходит нарушение естественного напряженно-деформированного состояния (НДС). Для расчета параметров НДС в массиве горных пород могут применяться эффективные численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод граничных элементов. Реализация последнего и была рассмотрена в работе. Произведен анализ решения задачи о распределении напряжений в окрестности горизонтальных выработок различной формы поперечного сечения, пройденных в упругом, однородном и изотропном массиве горных пород. При решении данной задачи были использованы два варианта метода граничных элементов: непрямой метод фиктивных нагрузок и прямой метод граничных интегральных уравнений.

The natural stress-strain state of mining massif is disrupted while mining works is carried on. Different numerical methods can be applied for calculation of parameters stress and strain state in the mining massif: the finite difference method, the finite-element method, the boundary element method, the application of the last of these methods is described in this work. The problem of distribution strains around entries of different configuration, drifted in elastic, homogeneous, isotropic mining massif is described. The indirect method of fictitious stresses and the boundary integral method are used for solution this problem.

Ведение горных работ сопровождается нарушением естественного напряженно-деформированного состояния массива (НДС) горных пород, вследствие которого могут возникать различного рода негативные процессы: горные удары, внезапные выбросы угля (пород) и газа, раздавливание горных выработок, пучение пород, завалы лав и т.д. Для большинства задач, возникающих в горной геомеханике, характерна значительная нерегулярность границ областей, отвечающих рассматриваемым объектам, что затрудняет получение аналитических результатов. Поэтому при решении таких задач наиболее перспективно использование различных приближенных методов, наиболее распространенные из которых (метод конечных разностей и метод конечных элементов) требуют достаточно мелкого разбиения области решения. Метод граничных элементов нуждается в дискретизации только границы рассматриваемой области, что, естественно, существенно уменьшает порядок системы линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать для получения численного результата.

Поле напряжений и смещений, формирующееся в массиве пород после проведения выработки, можно представить в виде суммы начального поля в невозмущенном массиве горных пород и дополнительного, вызванного проведением выработки. В случае одиночной протяженной выработки, у которой длина во много раз превосходит два других ее поперечных размера, объемная задача по определению компонентов напряжений и смещений на основе упругой, изотропной и однородной моделей сводится к плоской. Иначе говоря, при численном решении поставленной задачи рассматриваются поля напряжений и смещений только вокруг поперечного сечения выработки.

Метод граничных элементов подразделяется в своей реализации на прямые и непрямые варианты. В первом случае неизвестные функции, входящие в интегральные уравнения, являются реальными, имеющими физический смысл переменными задачи. Так, в задачах теории упругости такое решение интегрального уравнения приводит к определению всех усилий и смещений на границе, а внутри рассматриваемой области они могут быть получены из граничных значений на основе численного интегрирования. При использовании непрямых методов интегральные уравнения полностью выражаются через фундаментальное сингулярное решение исходных дифференциальных уравнений, распределенное с неизвестной плотностью по границам рассматриваемой области. Сами по себе функции плотности не имеют определенного физического смысла, но когда они найдены (посредством численного решения интегральных уравнений), параметры решения внутри рассматриваемой области могут быть получены из них обычным интегрированием[*]. В частности, в методе фиктивных нагрузок фиктивные нагрузки и являются этими функциями плотности.

В качестве исходных данных для задачи были приняты: коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}25$, модуль сдвига $G = 4 \cdot 10^9$ Па, поле напряжений в нетронутом массиве $\sigma_{xx}^{\infty} = -6{,}25 \cdot 10^5$ Ïà , $\sigma_{yy}^{\infty} = -1{,}25 \cdot 10^6$ Ïà .

Полные касательные и нормальные напряжения в i-м элементе

$$\sigma_s^i = (\sigma_s^i)^{\infty} + (\sigma_s^i)'; \;\; \sigma_n^i = (\sigma_n^i)^{\infty} + (\sigma_n^i)',$$

где $(\sigma^i)^{\infty}$ – напряжения в нетронутом массиве; $(\sigma^i)'$ – дополнительные напряжения.

В элементах, принадлежащих границе выработки, полные напряжения равны нулю; так как для условий рассматриваемой задачи касательные напряжения в нетронутом массиве равны нулю, зависимости для дополнительных напряжений получим в виде

$$(\sigma_s^i)' = 0; \;\; (\sigma_n^i)' = -(\sigma_n^i)^{\infty}.$$

Система уравнений метода фиктивных нагрузок[**] имеет вид

$$\begin{aligned} (\sigma_s^i)' &= \sum_{j=1}^{N} A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{ij} P_n^j; \\ (\sigma_n^i)' &= \sum_{j=1}^{N} A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij} P_n^j, \end{aligned} \qquad (1)$$

где N – число граничных элементов; P_s^j и P_n^j – касательная и нормальная фиктивные нагрузки на i-м элементе; A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij} – граничные коэффициенты влияния.

При решении системы (1) определяются фиктивные нагрузки на всех элементах. Напряжения в произвольной i-й точке массива (в задаче определялась только нормальный вертикальный компонент тензора напряжений)

$$\sigma_{yy}^i = \sum_{j=1}^{N} B_s^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^{N} B_n^{ij} P_n^j + \sigma_{yy}^{\infty},$$

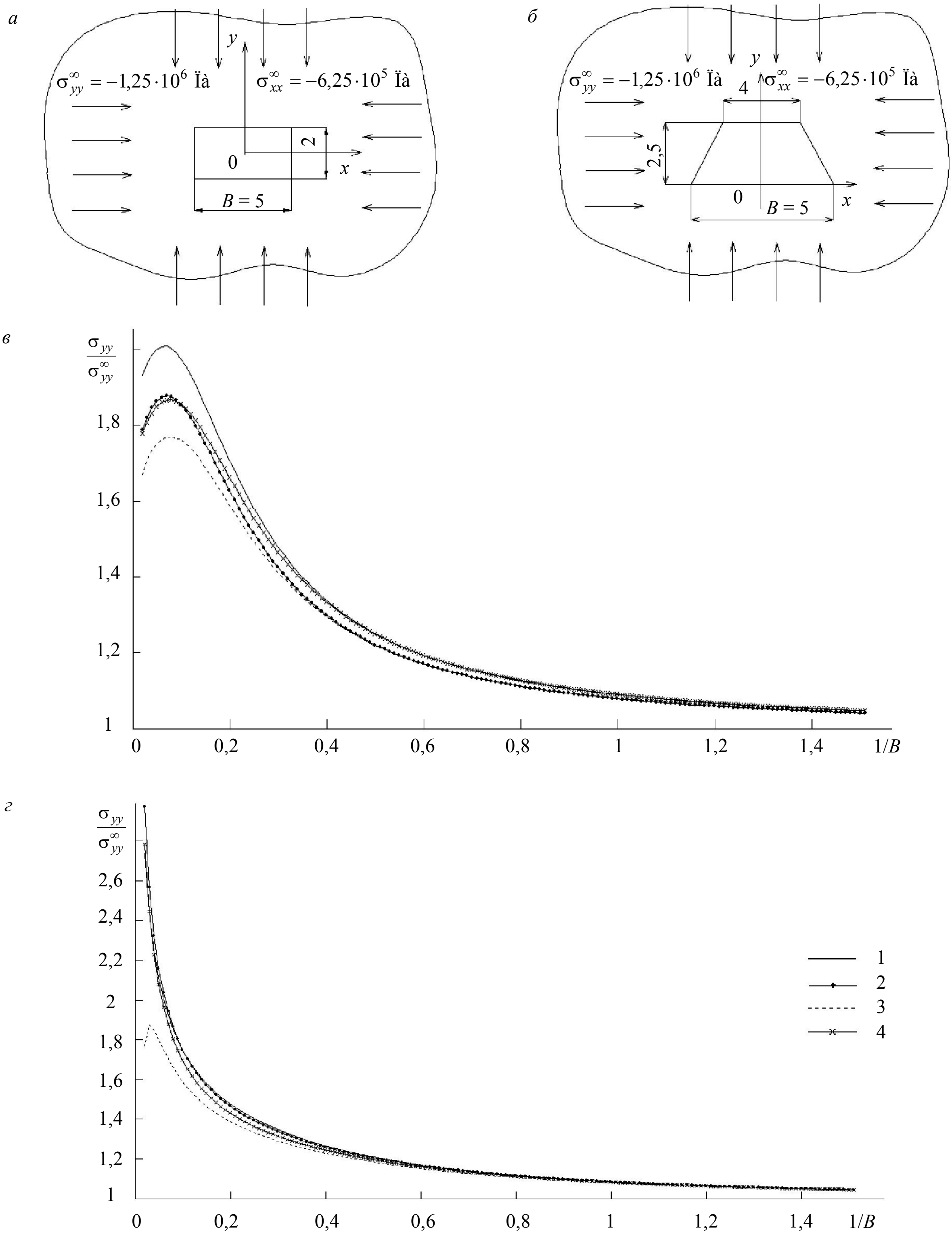
где B_s^{ij} и B_n^{ij} – коэффициенты влияния для i-й точки.

Система линейных алгебраических уравнений метода граничных интегральных уравнений[**] запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} C_{ss}^{ij} (\sigma_s^j)' + \sum_{j=1}^{N} C_{sn}^{ij} (\sigma_n^j)' = \\ &= \sum_{j=1}^{N} D_{ss}^{ij} (u_s^j)' + \sum_{j=1}^{N} D_{sn}^{ij} (u_n^j)'; \\ &\sum_{j=1}^{N} C_{ns}^{ij} (\sigma_s^j)' + \sum_{j=1}^{N} C_{nn}^{ij} (\sigma_n^j)' = \\ &= \sum_{j=1}^{N} D_{ns}^{ij} (u_s^j)' + \sum_{j=1}^{N} D_{nn}^{ij} (u_n^j)', \end{aligned} \qquad (2)$$

[*] *Бенерджи П.* Методы граничных элементов в прикладных науках / П.Бенерджи, Р.Баттерфилд. М.: Мир, 1984.

[**] *Крауч С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С.Крауч, А.Старфилд. М.: Мир, 1987.



Схемы нагружения выработок прямоугольной (*а*) и трапециевидной (*б*) форм поперечного сечения и распределение коэффициентов концентрации напряжений вблизи выработок указанного сечения (*в* и *г* соответственно)

1 и 2 – метод фиктивных нагрузок при использовании 100 и 300 элементов соответственно; 3 и 4 – метод граничных интегральных уравнений при использовании 100 и 300 элементов соответственно

где C_{ss}^{ij}, C_{sn}^{ij}, C_{ns}^{ij}, C_{nn}^{ij} – граничные коэффициенты влияния для напряжений; D_{ss}^{ij}, D_{sn}^{ij}, D_{ns}^{ij}, D_{nn}^{ij} – граничные коэффициенты влияния для смещений; $(u_s^j)'$ и $(u_n^j)'$ – соответственно дополнительные касательное и нормальное смещения на i-м элементе.

При решении системы (2) определяются неизвестные смещения для элементов границы. Напряжения в произвольной i-й точке массива

$$\sigma_{yy}^i = \sum_{j=1}^{N} T_{\sigma s}^{ij} \sigma_s^j + \sum_{j=1}^{N} T_{\sigma n}^{ij} \sigma_n^j + \sum_{j=1}^{N} T_{us}^{ij} u_s^j + \sum_{j=1}^{N} T_{un}^{ij} u_n^j + \sigma_{yy}^{\infty},$$

где $T_{\sigma s}^{ij}$, $T_{\sigma n}^{ij}$, T_{us}^{ij}, T_{un}^{ij} – коэффициенты влияния для i-й точки.

Распределение коэффициентов концентрации нормального вертикального компонента тензора напряжений для прямоугольного и трапециевидного поперечного сечения выработки соответственно представлено на рисунке.