УДК 66-93

И.Н.БЕЛОГЛАЗОВ, В.А.ИВАНОВ, И.И.БЕЛОГЛАЗОВ
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ПОГЛОЩЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В РЕАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Предложенное уточненное уравнение при определенных условиях может совпадать с известным уравнением Бугера – Бера, но в то же время более точно отражает особенности реальных систем. Уравнение может быть применено для определения значений обобщенных оптико-геометрических характеристик потока излучения и моделирования тепловых потоков технологических процессов.

The updated equation under certain conditions that is offered hereinafter can coincide with the known equation of Bugera-Baire, but it also represents peculiarities of actual systems more precisely. The equation can be applied for determination of values of the generalized optico-geometrical parameter of a radiation flux and simulation of heat flows of technological processes.

Для описания закономерностей изменения потока излучения, движущегося в излучающей, поглощающей и рассеивающей среде, применяется закон Бугера – Бера*.

В частном случае для оценки изменения потока излучения, обусловленного поглощением и рассеянием энергии, используется закон Бугера, согласно которому относительное изменение интенсивности излучения при прохождении через элементарный слой при определенной концентрации поглощающего вещества пропорционально длине пути луча в этом слое.

Если интенсивность собственного излучения среды много меньше излучения, ослабленного средой ($Q_{соб} << Q_{осл}$), то уравнение переноса упрощается и принимает форму закона Бугера:

$$dI = I = -k_{о}dl$$

или

$$I = I_{\text{íà÷}} \exp(-k_{\hat{\imath}} l), \quad (1)$$

где I – интенсивность излучения, м$^{-1}$; $k_о = k_a + k_s$, k_a и k_s – соответственно коэффициент поглощения и рассеяния.

Величина $I_{нач}$ определяет значение падающего на поверхность слоя излучения. Энергия, поглощенная в слое толщиной l, равна $I_{нач} - I$. В итоге поглощательную способность слоя (среды) можно представить в виде

$$a = \frac{I_{\text{íà÷}} - I}{I_{\text{íà÷}}} = 1 - \exp(-k_{\hat{\imath}} l),$$

где $k_о l$ – оптическая толщина (плотность) слоя.

Если поток излучения ослабляется в результате изменения концентрации вещества, то в соответствии с законом Бера относительное ослабление монохроматического луча в слое заданной толщины пропорционально концентрации поглощающего вещества c в данном слое.

Закон Бера соблюдается при малых концентрациях поглощающего вещества. С ростом концентрации возможно взаимодействие между частицами и молекулами, меняющее свойства среды, не учитываемые этим законом. Следует также отметить, что закон Бера соблюдается строго для монохроматического излучения. В противном случае коэффициенты ослабления зависят от длины волны излучения, природы поглощающего вещества и других факторов.

В расчетной практике используют объединенный закон Бугера – Бера, в соответ-

---

* Общий курс процессов и аппаратов химической технологии / Под ред. *В.Г.Айнштейна*. М.: Логос, 2001.
Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981.

ствии с которым относительное изменение интенсивности излучения при прохождении через поглощающую среду, пропорционально произведению концентрации поглощающего вещества на длину луча в поглощающей среде:

$$a = \varepsilon = 1 - \exp(-kcl)\,. \qquad (3)$$

Закон Бугера – Бера и выводы из него справедливы для газового излучения, запыленной среды, состоящей из абсолютно черных сферических частиц одинакового диаметра, подчиняющихся также законам геометрической оптики. В этом случае $k_{о}l = 0{,}25F_n cl$, где F_n – удельная свободная поверхность частиц.

В других случаях, когда частицы неправильной формы (разных размеров) при ослаблении излучения наблюдаются, кроме поглощения, рассеяние и дифракция. Это приводит к необходимости учета физических свойств, геометрической структуры и размера частиц, спектрального состава падающего на частицы излучения и замены числового коэффициента 0,25 на экспериментально, а в некоторых задачах и аналитически определяемые коэффициенты ослабления $k_{о}$.

В уравнении Бугера и уравнении Бугера – Бера переменной величиной могут являться параметры c, l и ckl .

Уравнение Бугера – Бера может быть приведено в инвариантную форму, для этого определим среднее значение пути теплового луча по формуле

$$\bar{l} = \int_0^{\infty} l da\,.$$

Например, в случае, когда переменной величиной является $\bar{l}$, уравнение примет вид

$$\bar{l} = \int_0^{\infty} l d(1 - \mathrm{e}^{-kcl}) = -\frac{1}{kc}\,.$$

Тогда

$$a = \varepsilon = 1 - \mathrm{e}^{-kcl} = 1 - \mathrm{e}^{l/\bar{l}}\,. \qquad (4)$$

В формуле величина a инвариантна $l/\bar{l}$.

Особенностью использования формулы (4) является то, что все экспериментальные точки в системе координат для любых сред будут ложиться на одну кривую.

Известно, что широко используемое на практике уравнение Бугера – Бера имеет ряд ограничений, среди которых одним из наиболее существенных является то, что оно применимо только в том случае, если в слое находятся частицы сферической формы.

Для описания закономерностей ослабления теплового потока излучения в реальных средах, в которых пылевидные частицы могут иметь неправильную форму и широкий диапазон крупности на основании проведенного исследования, предлагается использовать уточненное уравнение

$$\grave{a} = 1 - \mathrm{e}^{-k_1 l^n}\,. \qquad (5)$$

где $k_1 = kc$ – константа; n – показатель степени, учитывающий отклонение формы частиц от сферической и влияние распределения частиц по крупности.

Для описания закономерностей процесса ослабления теплового потока и возможности применения зависимость (5) преобразуем к виду

$$\ln\ln\left[\frac{1}{(1-a)}\right] = \ln k + n\ln l\,. \qquad (6)$$

Для установления возможности применения (6) экспериментальные данные представим в системе координат

$$\ln\ln\left[\frac{1}{(1-a)}\right] = \varphi(\ln l)\,.$$

Аналитические уравнения для нахождения численных значений параметров k и n могут быть найдены при использовании симплексно-интервального метода. Согласно методу, уравнение кривой может быть преобразовано в безразмерную форму при использовании симплексов подобия, отвечающих нескольким значениям $1 - a$ и l, выбранным на экспериментальной кривой, где любое значение $(1 - a)$ соответствует длине пути теплового луча l.

В общем виде для двух любых значений $1-a_i$ и $1-a_{i+1}$ (соответствующих величинам l_i и l_{i+1}) на экспирементальной кривой получим:

- для длины теплового луча $l_i=\varphi[(1-a)_i]$;

• для длины теплового луча $l_{i+1}=\varphi[(1-a)_{i+1}]$.

Для любого интервала Δl запишем

$$\Delta l_i = l_{i+1} - l_i = \varphi_1[(1-a)_i;\ (1-a)_{i+1}];$$

$$S_l = \frac{l_{i+1}}{l_i} = \varphi_2\left[(1-a)_i;\ (1-a)_{i+1}\right],$$

где Δl_i – интервал времени между двумя моментами l_i и l_{i+1}; S_i – симплекс геометрического подобия.

В результате решения уравнений $\Delta l_i=$ $=\varphi_1[(1-a)_i;\ (1-a)_{i+1}]$ и $S_l=\varphi_2\,[(1-a)_i;\ (1-a)_{i+1}]$ определим вид критериальной зависимости, описывающей закономерности процесса ослабления потока теплового излучения.

Согласно рассмотренному выше методу, для двух любых значений l_i и l_{i+1} ($\Delta l_i =$ $= l_{i+1} - l_i$) уравнение (1) примет вид:

• для длины теплового луча l_i

$$\ln^{1/n}\left[\frac{1}{(1-a)_i}\right] = k^{1/n} l_i; \tag{7}$$

• для длины теплового луча l_{i+1}

$$\ln^{1/n}\left[\frac{1}{(1-a)_{i+1}}\right] = k^{1/n} l_{i+1}. \tag{8}$$

Из уравнений (7) и (8) получим

$$\Delta l k^{1/n} = (S_l - 1)\left(\frac{1 - S_{\ln(a)}}{S_l^n - 1}\right)^{1/n} \ln^{1/n}(1-a)_i, \tag{9}$$

где $S_{\ln(a)} = \dfrac{\ln(1-a)_{i+1}}{\ln(1-a)_i}$ – симплекс подобия.

Величину S_l–1 в (9) представим в виде

$$S_l - 1 = \frac{l_{i+1}}{l_i} - 1 = \frac{l_{i+1} - l_i}{l_i} = \frac{\Delta l_i}{l_i}. \tag{10}$$

Подставляя выражение (9) в (10), имеем

$$k\Delta l_i^n = \frac{(S_l - 1)^n}{(S_l^n - 1)} \ln S_{(a)}, \tag{11}$$

где $S_a = \dfrac{(1-a)_i}{(1-a)_{i+1}}$ – симплекс концентрационного подобия.

Для определения значений параметров n, k, $\dfrac{1}{(1-a)}$, входящих в (11), в результате несложных преобразований были получены следующие зависимости:

$$n = \frac{\ln(\ln S_{a,i+1} / \ln S_{c,i})}{\ln S_l}; \tag{12}$$

$$k = \frac{1}{l_i^n} \frac{\ln S_{a,i}}{(S_l^n - 1)},$$

где $S_{a,i} = \dfrac{(1-a)_i}{(1-a)_{i+1}}$ и $S_{a,i+1} = \dfrac{(1-a)_{i+1}}{(1-a)_{i+2}}$ – соответственно симплексы концентрационного подобия для интервалов времени Δl_i и Δl_{i+1} ($S_{l,i+1} = S_{l,i} = S_l$).

Из рассмотренного метода следует, что для определения значений параметров k и n по экспериментальной кинетической кривой достаточно определить не более двух или трех значений концентраций $1-a$, отвечающих соответственно двум или трем моментам времени l_i. Кроме того, предлагаемый метод позволяет последовательно рассчитывать значения параметров n и k независимо друг от друга.

Предложенный метод позволяет свести к минимуму объем исходных данных, необходимых для отыскания значений параметров n и k.

При значении $n = 1{,}0$ полученное выражение преобразуется к уравнению Бугера – Бера (3).

Наряду с (5), учитывающим отклонение экспериментальных данных от зависимости (1), практический интерес представляет случай, при котором учитывается ограниченность длины пути теплового луча. В реальных процессах толщина слоя, в котором распространяется тепловой луч, может иметь даже очень большое, но ограниченное значение l_0, в то время как для (3) $l_0 \to \infty$.

С учетом введения параметра l_0, уравнение для расчета степени ослабления потока теплового изучения, примет вид

$$a = 1 - \text{å}^{-\frac{k_2 l}{l_0 - l}} = 1 - \text{å}^{-\frac{k2L}{1-L}}, \tag{13}$$

где $k_2 = kc$ – константа; l_0 – максимально возможная длина пути теплового луча; $L = l/l_0$ – относительная (безразмерная) величина пути теплового луча.

Применение уравнения (13) в практике инженерных расчетов позволяет находить максимально возможную длину пути теплового луча l_0, что особенно важно для определения показателей исследуемого процесса, так как именно эта величина необходима для проведения расчетов по определению значений показателя a при его осуществлении в слое конечной толщины.

Следует отметить, что зависимость (13) может быть преобразована к виду (1) при $l_0 >> l$. Тогда $(l_0 - l) \approx l_0$

$$a = 1 - e^{-\frac{k_2 l}{l_0 - l}} \approx 1 - e^{-\frac{k_2}{l_0} l} = 1 - e^{-k_1 l},$$

где k_1 – константа.

Таким образом, уравнение (3) является частным случаем предложенной зависимости (13), которая при определенных частных условиях может совпадать с последним.

В отличие от формулы (3) уравнение (13) хорошо описывает не всю кривую, а только ее часть, для которой $a(l) < 0{,}8 - 0{,}9$. Полученные расчетом по формуле (3) значения обычно занижены. Это объясняется тем, что для зависимости (3) всегда $a(l) < 1$ и функция не имеет конечного предельного максимального значения, а только асимптотически приближается к прямой $a(l) = 1$.

Когда на изменение теплового потока оказывает влияние форма твердых частиц и, кроме того, учитывается ограниченность пути теплового потока излучения, математическая модель процесса

$$a = 1 - e^{-\frac{k_5 l^m}{l_0^m - l^m}} = 1 - e^{-\frac{k_5 (l/l_0)^m}{l - (l/l_0)^m}} = \\ = 1 - e^{-\frac{k_5 t^m}{1 - t^m}}. \qquad (14)$$

При $l_0 >> l$ разность $l_0^m - l^m \approx l_0$, тогда (14) примет вид

$$a = 1 - e^{-\frac{k_5 l^m}{l_0^m - l^m}} = 1 - e^{-\frac{k_5 l^m}{l_0}} = 1 - e^{-k_2 l^m}.$$

Таким образом, уравнение (5) является частным случаем предложенной зависимости (14).

При помощи несложных преобразований, возможно из зависимости (14) получить уравнение Бугера – Бера. При значении $n = 1{,}0$ полученное выражение преобразуется к уравнению Бугера – Бера.

Следовательно, уравнения (1), (5), (13) являются частными случаями обобщенной зависимости (14), которая имеет универсальный характер и позволяет более точно описывать особенности процесса изменения теплового потока, движущегося в излучающей, поглощающей и рассеивающей среде.

Уточненное уравнение Бугера – Бера было использовано для определения значений обобщенных оптико-геометрических характеристик потока излучения и моделирования тепловых потоков технологических процессов.

Из приведенного анализа следует, что зависимость (14) может быть широко использована в практике инженерных расчетов.