УДК 622.648.23

В.И.АЛЕКСАНДРОВ, В.П.ПИРОЖЕНКО, П.Б.ГУРКИН
Санкт-Петербургский государственный горный институт (*технический университет*)

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА ГИДРОСМЕСЕЙ С ВЫСОКИМИ КОНЦЕНТРАЦИЯМИ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ

Предпринята попытка на теоретическом уровне оценить величину начального напряжения сдвига при гидравлическом транспортировании высококонцентрированных гидросмесей хвостов обогащения руды. Используются отдельные положения теории подобия при сочетании чисел Рейнольдса, Фруда и Эйлера, совокупность которых привели к новому безразмерному критерию, характеризующему начальное напряжение сдвига.

In this paper the results theoretical estimation of value yield shear stress at the hydraulic transportation of poly-metallic ore tailings are presented. In basis of a method separate positions of the similarity theory are used thus in consideration the combination of numbers of Reynolds, Froud and Euler which set have led to the new dimensionless criterion describing the yield shear stress is accepted.

В работах было показано, что математическая модель вязкопластичного потока с переменными реологическими параметрами выражается системой

$$\rho\frac{dv_x}{dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 v_x+A_x;$$

$$\rho\frac{dv_y}{dt}=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v_y+A_y; \qquad (1)$$

$$\rho\frac{dv_z}{dt}=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 v_z+A_z,$$

где ρ – плотность среды; X,Y,Z – проекции ускорений массовых сил; p – давление среды; μ – динамический коэффициент вязкости; ∇ – оператор Лапласа; v_x,v_y,v_z – компоненты скорости среды; A_x,A_y,A_z – компоненты аддитивного члена в проекциях на оси координат,

$$A_x=\frac{\partial\tau(p)}{\partial y}+\frac{\partial\tau(p)}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right);$$

$$A_y=\frac{\partial\tau(p)}{\partial x}+\frac{\partial\tau(p)}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right);$$

$$A_z=\frac{\partial\tau(p)}{\partial x}+\frac{\partial\tau(p)}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right).$$

Если $A_x = A_y = A_z = 0$, то система приводится к известным уравнениям вязкой жидкости Навье – Стокса. Если компоненты A_x, A_y, A_z не равны нулю, то система уравнений значительно усложняется и решение ее сопряжено с непреодолимыми трудностями, обусловленными определением краевых условий.

Для решения конкретной задачи течения вязкопластичных жидкостей, описываемой системой (1), можно использовать приемы теории подобия.

Запишем систему (1) в следующем виде, (в проекции на ось *x*):

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial\tau(p)}{\partial y} + \frac{\partial\tau(p)}{\partial z} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right). \qquad (2)$$

Аналогичные уравнения можно написать в проекциях на оси *y* и *z*.

Для подобной гидродинамической системы можно записать соответствующие уравнения, которые будут отличаться обозначением параметров, например, скорость обозначим с индексом – v'_x, плотность ρ' и т.д.

На основании подобия потоков жидкости сходственные величины связаны попарно множителями подобного преобразования:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = C_l;\ \frac{t'}{t} = C_t;$$

$$\frac{v'_x}{v_x} = \frac{v'_y}{v_y} = \frac{v'_z}{v_z} = C_v;\ \frac{\rho'}{\rho} = C_\rho;$$

$$\frac{g'}{g} = C_g;\ \frac{p'}{p} = C_p;\ \frac{\mu'}{\mu} = C_\mu..$$

Выразим все переменные в уравнениях для второй системы (с индексами) через переменные первой системы и множители подобного преобразования и подставим их во вторую систему. После группировки коэффициентов получим следующее уравнение в проекциях на ось *x*.

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t}\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{C_\rho C_v^2}{C_l}\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) =$$

$$= C_\rho C_g\rho g_x - \frac{C_p}{C_l}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_\mu C_v}{C_l^2}\mu\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{C_p}{C_l}\left[\frac{\partial\tau(p)}{\partial y} + \frac{\partial\tau(p)}{\partial z}\right] + \frac{C_\mu C_v}{C_l^2}\left[\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]. \qquad (3)$$

Полученные уравнения (3) тождественно равны второй системе (с параметрами, с обозначенными индексами), следовательно, комплексы из множителей подобного преобразования равны:

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = C_\rho C_g =$$

$$= \frac{C_P}{C_l} = \frac{C_\mu C_v}{C_l^2} = \frac{C_P}{C_l} = \frac{C_\mu C_v}{C_l^2}.$$

Будем группировать члены этих соотношений по два, получим:

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} \Rightarrow \frac{C_v C_t}{C_l} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{vt}{l} = \text{idem} = \text{Ho};$$

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_p}{C_l} \Rightarrow \frac{C_l C_\rho C_v}{C_P C_t} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \text{idem} = \text{Eu};$$

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_\mu C_v}{C_l^2} \Rightarrow \frac{l^2\rho}{t\mu} = \frac{vl\rho}{\mu} = \text{idem} = \text{Re};$$

$$\frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = C_\rho C_g \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{gl} = i\text{dem} = \text{Fr};$$

$$\frac{C_p}{C_l} = \frac{C_\mu C_v}{C_l^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P l}{\mu v} = \text{idem}.$$

Остальные комбинации приводят к таким же комплексам. Среди полученных безразмерных соотношений интерес представляет последний комплекс, который обозначим

$$As = \frac{\Delta p l}{\mu v}. \qquad (4)$$

Число As по формуле (4) выражает собой отношение сил давления к силам вязкости и характеризует собой сопротивления, обусловленные наличием начального напряжения сдвига, при деформации вязкопластических жидкостей. Число As зависит от безразмерных чисел Eu и Re. Следовательно, часть сопротивлений течению вязкопластичной жидкости, обусловленная наличием статического напряжения сдвига, будет определяться тремя безразмерными комплексами (числами подобия):

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = f\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{vl\rho}{\mu}, \frac{\Delta p l}{\mu v}\right) = f(\text{Eu}, \text{Re}, \text{As}). \quad (5)$$

Функцию (5) можно записать в следующем виде:

$$\rho g = f(\text{Eu}, \text{Re}, \text{As});$$

$$\frac{\Delta P}{l} = f(\text{Eu}, \text{Re}, \text{As}) \Rightarrow i_{\text{îò}} = (\text{Eu}, \text{Re}, \text{As}), \quad (6)$$

где $i_{\text{îò}}$ – потери давления по длине трубопровода, Па/м.

Подобные результаты можно получить непосредственно из уравнения Бингама:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dn} = \tau_0 + \mu\dot{\gamma}.$$

Если принять $\dot{\gamma} = \frac{dv}{dn} = \frac{8v}{D}$, $\sigma = \frac{\tau_0}{\tau}$, $\tau = \frac{\Delta P D}{4l}$, то уравнение Бингама преобразуется к виду:

$$\frac{\Delta P}{v^2 \rho} \frac{Dv\rho}{\mu} \frac{D}{l} = \frac{32}{1-\sigma}. \quad (7)$$

Окончательно получаем:

$$\text{Eu} \cdot \text{Re} = \frac{32}{(1-\sigma)} \frac{l}{D} \Rightarrow \text{As} = \frac{32}{(1-\sigma)} \frac{l}{D}. \quad (8)$$

Полученная формула (8) справедлива для неньютоновских жидкостей, для которых $\sigma > 0$. Если $\sigma = 0$ (ньютоновские жидкости), формула (8) получает вид:

$$\text{As} = 32 \frac{l}{D}. \qquad (9)$$

Существует зависимость As от величины σ. С увеличением σ число As возрастает, причем при значениях σ до 0,5 увеличение относительного напряжения сдвига практически линейно, а при $\sigma > 0{,}5$ число As возрастает по степенному закону.

По величине числа As можно судить о степени проявления жидкостями реологических свойств. Покажем это на конкретном примере. Для однозначности зададим произвольный диаметр трубопровода D=0,1 м и рассчитаем величину числа As по формуле (9), предполагая, что рассматриваемая жидкость – ньютоновская. Для длины трубопровода $l = 1$ м получим число $\text{As} = 320$. С другой стороны, в соответствии с формулой (4)

$$\text{As} = \frac{\Delta p l}{\mu v} = \frac{i\rho g l^2}{\mu v} = \frac{0{,}001 \cdot 1200 \cdot 9{,}81 \cdot 1}{1{,}23 \cdot 10^{-3} 1{,}5} = 6380.$$

Далее используем формулу (8):

$$\text{As} = \frac{320}{1-\sigma} = 6380 \Rightarrow 320 = 6380 - 6380\sigma \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{6380 - 320}{6380} = 0{,}95.$$

Следовательно, для относительного напряжения сдвига можно записать:

$$\sigma = \frac{\tau_0}{\tau} = 0{,}95 \Rightarrow \tau_0 = 0{,}95\tau.$$

В общем случае течения стратифицированного потока справедливо выражение для напряжения на стенке трубопровода

$$\tau = \frac{i_{\text{ïîò}}\, D}{4},$$

в соответствии с которым получаем значение начального напряжения сдвига потока реологической жидкости (гидросмеси)

$$\tau_0 = 0{,}95\frac{i_{\text{ïîò}}\, D}{4} = 0{,}95\frac{i\rho g D}{4} =$$

$$= \frac{0{,}001 \cdot 1200 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}{4} = 1{,}695 \text{ Па}.$$

Фактически число As позволяет на стадии проектирования гидротранспортных систем вычислить величину начального напряжения сдвига, а при известной значении вязкости гидросмеси замкнуть уравнение Бингама – Шведова для вязкопластичных гидросмесей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асатур К.Г.* Математическая модель вязкопластического течения с переменными параметрами / К.Г.Асатур, В.И.Александров // Сборник докладов республиканской научно-практической конференции «Человек на Севере в XXI веке: горное дело, ТЭК, экология, гародонаселение». Воркута, 2001.

2. *Александров В.И.* Снижение энергоемкости гидравлического транспортирования гидросмесей при высоких концентрациях твердой фазы: Автореф. дис. … доктора техн. наук / СПГГИ(ТУ). СПб, 2000.

3. *Alexangrov V.I.* The Calculation of the Parameters of Pipeline Transport of High Concentrated Mixtures / V.I.Alexangrov, A.A.Kuleshov, B.S.Makhovikov // 11-th International Conference on Transport and Sedimentation of Solid Particles. Ghend. Belgium, 2002.