УДК 539.218

Г.Н.ЖУРОВ, В.Н.КОВАЛЕВСКИЙ
Санкт-Петербургский государственный горный институт (*технический университет*), *Россия*

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрено упругопластическое равновесие горного массива при условии разрушения А.Н.Ставрогина при симметричных граничных условиях с учетом неоднородности массива, возникающей при искусственном замораживании рыхлых водоносных пород с помощью замораживающих колонок. Получены формулы для определения напряжений и смещений в пластической и упругой областях. Найдена граница раздела упругой и пластической областей. Определена область существования решения.

Elastic – plastic balance of the hills massif is examined under the Stavrogin's condition of destruction under symmetric boundary conditions in view of the heterogeneity of a file arising at artificial freezing of friable watery breeds with the help of freezing columns. Formulas for definition of pressure and movings to plastic and elastic areas are received. The border between elastic and plastic areas is found. The area of existence of the decision is determined.

В работе [4] на основе анализа большого числа экспериментов показано, что наиболее полно предельное состояние всех типов горных пород в областях растягивающих и сжимающих напряжений может быть описано следующим условием:

$$\tau_{\max} = \alpha\, e^{A\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}}, \qquad (1)$$

где $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное главные напряжения; α, A – функции координат, $\alpha = \alpha(x, y)$; $A = A(x, y)$.

В работе [2] исследована основная система уравнений теории предельного равновесия при условии разрушения вида (1). Найдены условия, при которых система принадлежит к гиперболическому, параболическому или эллиптическому типу. Уравнения гиперболического типа численно интегрируются. Проводится преобразование уравнений гиперболического типа невесомой и однородной среды. Основная система уравнений для напряжений и скоростей сводится к канонической системе уравнений для координат и перемещений. Полученная система интегрируется методом, основанным на применении тригонометрических рядов. Построено решение, имеющее период 2π. Найдены интегралы уравнений пластичности.

В данной работе решается задача о растяжении плоскости с круговым вырезом радиуса R, по контуру которого приложено нормальное давление $\sigma_r = p$, касательное $\tau_{r\theta} = 0$, и усилиями на бесконечности $\sigma_x^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = q \equiv \gamma H$, где γ – средняя плотность толщи породы; H – глубина заложения выработки.

Эта задача имеет решение в полярных координатах r и θ, не зависящее от угла θ. Решения будут различны в зависимости от выполнения условий: $\sigma_\theta \ge \sigma_r$ или $\sigma_\theta \le \sigma_r$.

Положим в условии разрушения (1) $A = \text{const}, \alpha = \alpha_9 r^n (\alpha_0 = \text{const})$. Неоднородность такого типа возникает при искусственном замораживании рыхлых водоносных пород с помощью замораживающих колонок, когда вокруг выработки образуется ледопородное ограждение [1]. В данной работе построено решение задачи для этого случая.

1. Во всей пластической области выполнено условие $\sigma_\theta \ge \sigma_r$.

Выразим компоненты напряжений σ_r, σ_θ в пластической зоне через главные напряжения σ_1, σ_3 [4]:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3);$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Введем функцию

$$\chi = \frac{1}{A}\ln\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\alpha}\right) = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

Тогда компоненты напряжений σ_r, σ_θ в пластической зоне можно определить по формулам

$$\sigma_r = \frac{2\alpha\chi e^{A\chi}}{1-\chi}; \sigma_\theta = \frac{2\alpha e^{A\chi}}{1-\chi}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \qquad (3)$$

Отсюда функцию χ можно найти из уравнения

$$\left[\frac{1}{(1-\chi)^2} + \frac{A\chi}{1-\chi}\right]d\chi + \left(\frac{\chi n}{1-\chi} + 1\right)\frac{dr}{r} = 0.$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\left[\frac{1}{n} + \frac{A}{(n+1)^2}\right]\ln\left|(n+1)\chi - 1\right| - \frac{1}{n}\ln|1-\chi| + \frac{A}{n+1}\chi + \ln r = \text{const}.$$

Определяя произвольную постоянную из контурного условия $\sigma_r = p$ при $r = R$, получим

$$\left[\frac{1}{n} + \frac{A}{(n+1)^2}\right]\ln\left|\frac{(n+1)\chi - 1}{(n+1)\chi_0 - 1}\right| - \frac{1}{n}\ln\left|\frac{1-\chi}{1-\chi_0}\right| + \frac{A}{n+1}(\chi - \chi_0) = \ln\left(\frac{R}{r}\right), \qquad (4)$$

где χ_0 найдем из соотношения

$$\frac{2\chi_0 e^{A\chi_0}}{1-\chi_0} = \frac{p}{\alpha_0 R^n}. \qquad (5)$$

Компоненту напряжения $\tau_{r\theta}$ получим из уравнения равновесия и начального условия $\tau_{r\theta} = 0$ при $r = R$

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Получим $\tau_{r\theta} = 0$.

Компоненты деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \text{ и } \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

определяются по формулам

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \varepsilon_3;.$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \varepsilon_1.$$

Учитывая, что [3]

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = h(\varepsilon_1 - \varepsilon_3),$$

где $h = -\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d(\sigma_1 + \sigma_3)}$,

из уравнений равновесия (3) и совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_r}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0,$$

получим

$$\frac{du}{u} + \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} + \frac{dr}{r} = 0. \qquad (6)$$

Так как

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = 2\alpha e^{A\chi},$$

проинтегрируем уравнение (6) и определим произвольную постоянную из контурного условия. Отсюда перемещение u в пластической зоне

$$u = u_0 e^{A(\chi_0 - \chi)}\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1}, \qquad (7)$$

где u_0 – неопределенная пока постоянная.

Компоненты деформаций связаны с компонентами напряжений соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x - \varepsilon = \Psi(\sigma_x - \sigma); \quad -\varepsilon = \Psi(\sigma_z - \sigma); \\ &\varepsilon_y - \varepsilon = \Psi(\sigma_y - \sigma); \quad \gamma_{xy} = 2\Psi\tau_{xy}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\varepsilon = k\sigma; \; k = \frac{(1-2\nu)}{E},$$

где Ψ – скалярная функция инвариантов тензоров напряжений и деформаций; ν, E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга среды

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3}; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Из формул (8) следует, что компоненту напряжения σ_z можно найти по формуле

$$\sigma_z = \frac{\Psi - k}{2\Psi + k}(\sigma_r + \sigma_\theta), \tag{9}$$

а Ψ определить из уравнения

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \Psi(\sigma_\theta - \sigma_r).$$

Учитывая (4), а также то, что на контуре $r = R_\partial$, разделяющем упругую и пластическую зоны, перемещение должно быть непрерывно и функция $\Psi = 1/2G$ (G – модуль сдвига), получим Ψ в виде

$$\Psi = \frac{1}{2G} e^{2A(\chi_\partial - \chi)} \left(\frac{R_\partial}{r}\right)^{2n+2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[2 + n + A(1-\chi^2)][1 + A\chi_\partial(1-\chi_\partial)]}{[2 + n + A(1-\chi_\partial^2)][1 + A\chi_\partial(1-\chi)]} \right\},$$

где χ_∂ – неопределенная пока постоянная, χ определим из уравнения (4).

В упругой зоне компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_z$ и перемещение u известны [1]:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = q\left(1 \mp \frac{\beta}{r^2}\right); \qquad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta); \\ &\tau_{r\theta} = 0; \quad u = r\varepsilon_\theta = \frac{r}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Постоянную β находим из условия непрерывности напряжений на контуре $r = R_\partial$ зоны предельных деформаций

$$\beta = \frac{\alpha_0}{q} e^{A\chi_\partial} R_\partial^{n+2}.$$

Постоянную χ_∂ найдем из условия $\sigma_r + \sigma_\theta = 2q$ при $r = R_\partial$:

$$\chi_\partial = \chi_0 + \frac{n+1}{A}\ln\left|\frac{2q\chi_0}{p}\right| - \left(\frac{n+1}{A} + \frac{n}{n+1}\right) \times$$

$$\times \ln\left|(n+1)\chi_0 - 1\right| - \frac{n+1}{A}\ln\left|1 + \chi_\partial\right| +$$

$$+ \left(\frac{n+1}{A} + \frac{n}{n+1}\right)\ln\left|(n+1)\chi_\partial - 1\right|.$$

Радиус зоны предельных деформаций согласно (4)

$$R_\partial = R\left|\frac{1-\chi_\partial}{1-\chi_0}\right|^{\frac{1}{n}} \times$$

$$\times \left|\frac{(n+1)\chi_0 - 1}{(n+1)\chi_\partial - 11}\right|^{\frac{1}{n} + \frac{A}{(n+1)^2}} e^{-\frac{A}{n+1}(\chi_\partial - \chi_0)}.$$

На контуре $r = R_\partial$ перемещение должно быть непрерывно. Тогда, учитывая (10), имеем

$$u_\partial = u\big|_{r=R_\partial} = \frac{R_\partial q}{2G}\left(1 - 2\nu + \frac{\beta}{R_\partial^2}\right).$$

Теперь определим начальное смещение контура $u_0 = u\big|_{r=R}$:

$$u_0 = u_p e^{A(\chi_\partial - \chi_0)} \left(\frac{R_\partial}{R}\right)^{n+1}. \tag{11}$$

Полученное решение справедливо, если пластическая зона полностью охватывает отверстие. Это условие накладывает на параметры χ_0, χ_∂ следующее ограничение:

$$\left[\frac{1}{n} + \frac{A}{(n+1)^2}\right]\ln\left|\frac{(n+1)\chi_\partial - 1}{(n+1)\chi_0 - 1}\right| - \frac{1}{n}\ln\left|\frac{1-\chi_\partial}{1-\chi_0}\right| +$$

$$+\frac{A}{n+1}(\chi_\partial-\chi_0)<0,$$

где χ_0, χ_∂ связаны с p и q формулами (4) и (5).

2. Во всей пластической области выполнено условие $\sigma_\theta \le \sigma_r$.

В пластической области компоненты напряжений

$$\sigma_r=\frac{2\alpha\, e^{A\chi}}{1-\chi};\ \sigma_\theta=\frac{2\alpha\chi e^{A\chi}}{1-\chi};\ \tau_{r\theta}=0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в дифференциальное уравнение равновесия (3) и интегрируя его (при $\sigma_r = p$ и $r = R$), получим для определения χ следующее соотношение:

$$\left(\frac{1}{n}-A\right)\ln\left|\frac{n+1-\chi}{n+1-\chi_0}\right|-\frac{1}{n}\ln\left|\frac{1-\chi}{1-\chi_0}\right|=\ln\left(\frac{R}{r}\right),$$

где χ_0 определяется из выражения

$$\frac{2\,e^{A\chi_0}}{1-\chi_0}=\frac{p}{\alpha_0 R^n}.$$

Перемещение u в пластической области определяется по формуле (7), а u_0 по (11).

Постоянную χ_∂ в данном случае получим из уравнения

$$\chi_\partial=\chi_0+\frac{1}{A}\ln\left|\frac{2q}{p}\right|-\left(\frac{1}{A}-n\right)\times$$

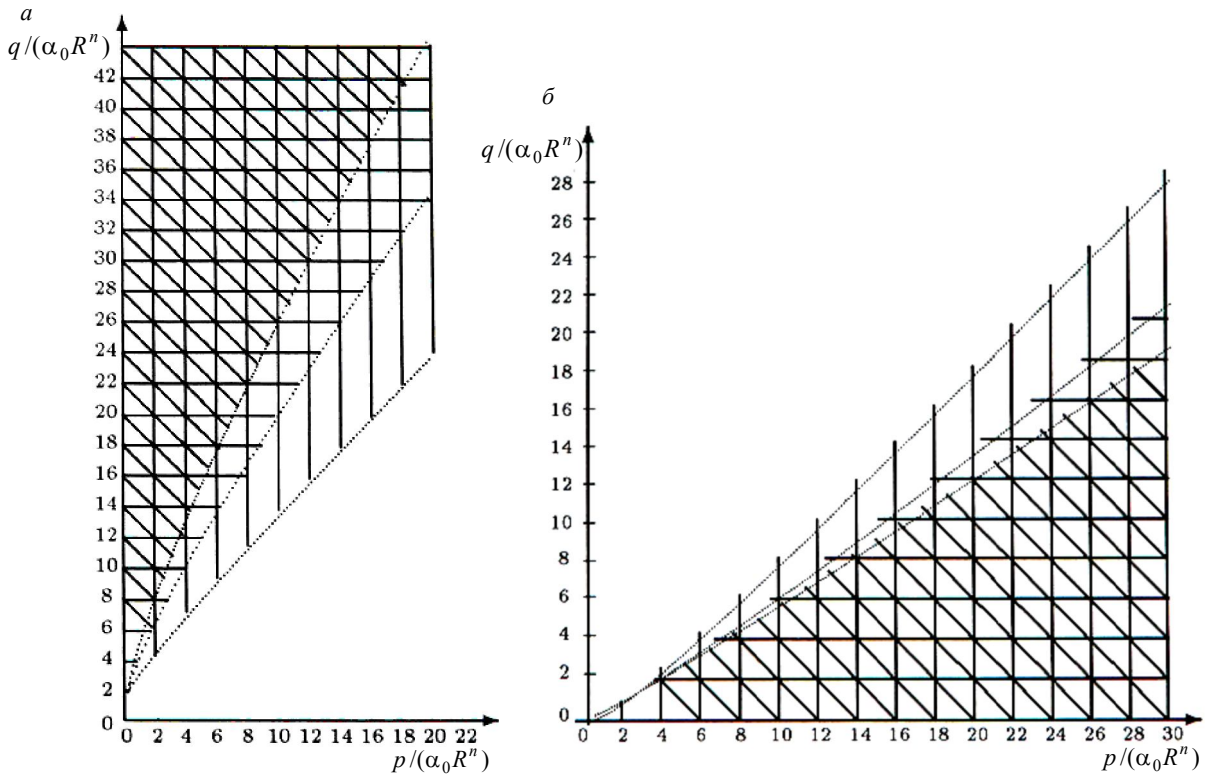
$$\times\ln\left|n+1-\chi_0\right|-\frac{1}{A}\ln\left|1+\chi_\partial\right|+$$

$$+\left(\frac{1}{A}-n\right)\ln\left|n+1-\chi_\partial\right|.$$

Радиус R_∂, разделяющий упругую и пластическую зону,

$$R_\partial=R\left|\frac{1-\chi_\partial}{1-\chi_0}\right|^{\frac{1}{n}}\left|\frac{n+1-\chi_0}{n+1-\chi_\partial}\right|^{\frac{1}{n}-A}.$$

Компонента напряжения σ_z определяется по формуле (9), где функция Ψ имеет вид



Область существования решения: *а* – $\sigma_\theta \ge \sigma_r$; *б* – $\sigma_\theta \le \sigma_r$

A = 1 (вертикальные линии); A = 5 (горизонтальные линии); A = 9 (наклонные линии)

$$\Psi = \frac{1}{2G} e^{2A(\chi_\partial - \chi)} \left(\frac{R_\partial}{r} \right)^{2n+2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{[2+n+A(1-\chi^2)][1+A(1-\chi_\partial)]}{[2+n+A(1-\chi_\partial^2)][1+A(1-\chi)]} \right\}.$$

Компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_z$ и перемещение u в упругой области определяются по формулам (10), где

$$\beta = -\frac{\alpha_0}{q} e^{A\chi_\partial} R_\partial^{n+2}.$$

Так как пластическая зона должна полностью охватывать отверстие, на параметры χ_0, χ_∂ накладывается ограничение

$$\left| \frac{1-\chi_\partial}{1-\chi_0} \right|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{n+1-\chi_0}{n+1-\chi_\partial} \right|^{\frac{1}{n}-A} > 1.$$

Установлено, что в случаях $\sigma_\theta \geq \sigma$ и $\sigma_\theta \leq \sigma$ с ростом коэффициента A область существования решения сужается (см. рисунок). На рисунке для безразмерных величин $p/(\alpha_0 R^n)$ и $q/(\alpha_0 R^n)$ показаны области существования решения, при которых данное неравенство выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов Т.В* Механика горных пород / Т.В.Баклашов, Б.А.Картозия. М.: Недра, 1975. 272 с.

2. *Журов Г.Н.* Интегрирование основной системы уравнений теории предельного равновесия неоднородной связной и сыпучей среды при условии разрушения А.Н.Ставрогина // Известия вузов. Горный журнал. 1983. № 3. С.18-23.

3. *Соколовский В.В*. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

4. *Ставрогин А.Н.* Пластичность горных пород / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1979. 301 с.