



УДК 622.023.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Я.И.РУДАЕВ¹, Д.А.КИТАЕВА², М.А.МАМАДАЛИЕВА³

¹ Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

³ Научная станция Российской академии наук, Бишкек-49, Кыргызстан

Рассмотрена задача моделирования деформационного поведения геоматериалов при сжатии с учетом запредельной ветви. Физическая природа изменчивости свойств горных пород как начально неоднородных материалов обусловлена суперпозицией деформации и структурных переходов эволюционного типа в открытых неравновесных системах. В соответствии этому описание деформации и разрушения горных пород связывается с иерархией неустойчивостей, реализуемой в системе, находящейся вдали от термодинамического равновесия. Считается, что энергетическая функция текущего напряженно-деформированного состояния представляется суперпозицией потенциальной составляющей и возмущения, в которое входит параметр несовершенства, ответственный за дефекты не только исходного состояния, но и появившиеся в процессе нагружения. Уравнение состояния получено минимизацией энергетической функции по параметру порядка. Параметр несовершенства выражен через параметр повреждаемости, который рассматривается как внутренний параметр состояния. Для оценки эволюции параметра повреждаемости привлечено уравнение Фоккера – Планка, стационарная форма которого соответствует статическому нагружению горных пород. Здесь коэффициент диффузии считается постоянным, а функция, ответственная за внутреннее скольжение и разрыхление геоматериалов, принимается в форме антиградиента элементарной катастрофы сборки. Так уравнение состояния дополняется соотношением, устанавливающим связь между параметрами несовершенства и повреждаемости. При этом процесс деформации отождествляется со сменой диссипативных сред, сопровождаемых необратимыми структурными флуктуациями. Теоретические данные подтверждаются известными экспериментами при сжатии образцов некоторых горных пород.

Ключевые слова: деформация, разрушение, напряжение, горные породы, неустойчивость, параметры несовершенства и повреждаемости.

Как цитировать эту статью: Рудаев Я.И. Моделирование деформационного поведения горных пород / Я.И.Рудаев, Д.А.Китаева, М.А.Мамадалиева // Записки Горного института. 2016. Т. 222. С. 816-822. DOI 10.18454/PMI.2016.6.816

Введение. Следуя [2], считаем, что моделирование реальной физико-механической системы динамического типа начинается с введения координат состояния $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, называемых параметрами порядка. К ним прибавляется дополнительное множество параметров $T_1, T_2, \dots, T_k$, имитирующих отклик на изменение параметров η_k и представляющих собой внешние воздействия. Кроме того, предполагается наличие параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, ответственных за дефекты исходного состояния системы и появившихся в процессе ее нагружения.

Горные породы относятся к начально-неоднородным материалам и в стационарном состоянии, устойчивом относительно малых возмущений, могут быть интерпретированы как диссипативные структуры [3, 4]. В соответствии с известной [8, 9] классификацией пространственно-временных структур, горные породы на больших глубинах могут считаться автоструктурами – локализованными пространственными образованиями, устойчиво существующими в диссипативных неравновесных средах и не зависящими от изменения начальных и граничных условий. Именно поэтому процесс деформации и разрушения горных пород может рассматриваться как иерархия неустойчивостей, обусловленных самоорганизацией, реализуемой в системе, находящейся вдали от термодинамического равновесия. Приведенные рассуждения свидетельствуют о полезности привлечения синергетических представлений [15] к описанию равновесия и устойчивости горных пород.

В качестве исходной информации принимаются паспортные зависимости [16] максимального касательного напряжения T и относительного изменения объема θ от максимального сдвига Γ , построенные на основании известных опытов на одноосное сжатие [13] (рис.1).

Упругий участок диаграммы деформаций $T = T(\Gamma)$ ($T \leq T_e$; $\Gamma \leq \Gamma_e$) сменяется областью упрочнения, переходящей при $T \geq T_0$, $\Gamma \geq \Gamma_0$ в зону разупрочнения. После достижения критического сдвига Γ_c наступает разрушение. Опытными данными [12-14] установлено, что вблизи предела прочности ($T = T_0$) изменение объема близко к нулю (материал несжимаем). Здесь же происходит смена знака объемной деформации. Последнее означает активизацию дилатансионной составляющей деформации.

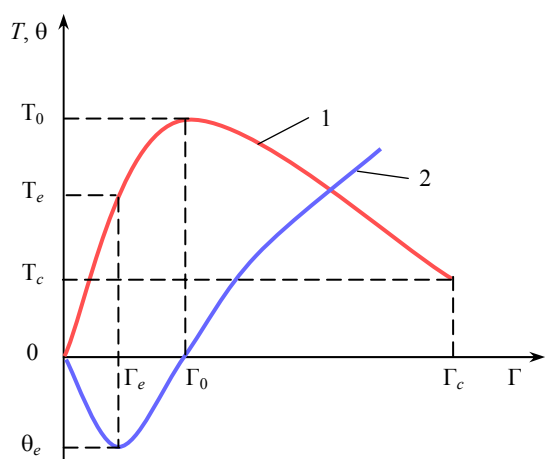


Рис.1. Схематическое представление паспортных зависимостей: 1 – $T = T(\Gamma)$; 2 – $\theta = \theta(\Gamma)$

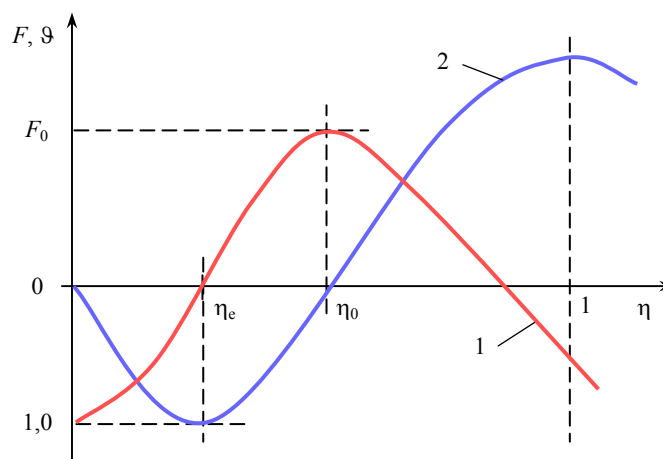


Рис.2. График закономерностей деформирования горных пород: 1 – $F = F(\eta)$; 2 – $\Theta = \Theta(\eta)$

Для описания закономерностей деформирования горных пород введем нормировку координат [5, 7]

$$F = \frac{T}{T_e} - 1; \eta = \frac{\Gamma}{\Gamma_c}; \Theta = \frac{\theta}{\theta_e}, \quad (1)$$

где θ_e – объемная деформация, соответствующая пределу упругости.

На основании зависимостей (1) на рис.2 представлены схематизированные паспортные диаграммы.

Уравнение состояния. Пусть текущему напряженно-деформированному состоянию отвечает энергетическая функция [17] вида

$$V = V(F, \eta, \beta), \quad (2)$$

где β – параметр, ответственный за дефекты не только исходного состояния, но и появившиеся в условиях нагружения.

В процессе деформирования горные породы испытывают ряд состояний, смена которых имеет место в критических точках. Так, при $\eta = \eta_e$ (рис.2) наступает пластичность и формируется диссипативная структура, которая при $\eta = \eta_0$ (запредельная область) сменяется еще одной диссипативной структурой. По существу, в деформируемом материале возникают синергетические эффекты [8]. Поскольку в процессе эксперимента на сжатие реализуется медленное внешнее воздействие, указанные эффекты можно отнести к самоорганизации через управляющие параметры β .

Функцию (2) представим суперпозицией потенциала $V_p(F, \eta)$, ответственного за обратимые процессы, и возмущения $S(\eta, \beta)$. Имеем

$$V = V(F, \eta, \beta) = V_p(F, \eta) + S(\eta, \beta).$$

Потенциальная составляющая энергетической функции записывается в виде разложения в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия

$$V = V_0 + V_1(\eta - \eta_e) + \frac{1}{2}V_2(\eta - \eta_e)^2 + \frac{1}{3!}V_3(\eta - \eta_e)^3 + \dots$$

Функция V_p выбирается так, чтобы состоянию равновесия соответствовало $\eta = \eta_e$ и, следовательно, имело место равенство

$$\frac{dV_p}{d\eta} = V_1 + V_2(\eta - \eta_e) + \frac{1}{2}V_3(\eta - \eta_e)^2 + \dots = 0.$$

Таким образом, приходим к условию $V_0 = V_1 = 0$. Если предположить, что изменение совершенной системы связано с возрастающим нормированным напряжением $F \rightarrow F_0$, то

моделирующая ее потенциальная функция путем переноса начала координат может быть записана (рис.2) в виде

$$V_p = \frac{1}{2}(F_0 - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3 + \dots$$

Для возмущения примем морсовское разложение [1]

$$S(\eta, \beta) = \beta_0\eta + \frac{1}{2}\beta_2\eta^2 + \frac{1}{3}\beta_3\eta^3 + \dots \quad (3)$$

Зависимость (3) путем соответствующей нелинейной замены может принять каноническую форму катастрофы [2]. Но такое преобразование приведет к сложной нелинейной связи между нормированным напряжением F и параметром β . Можно показать, что чувствительность материала к несовершенствам вполне определяется первым слагаемым разложения (3) и позволяет исключить все возмущения, кроме линейного.

С учетом сказанного для функции $V(F, \eta, \beta)$ можно записать

$$V(F, \eta, \beta) = \beta\eta + \frac{1}{2}(F_0 - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3,$$

где $F_0 = F|_{\eta=\eta_0}$ (рис.2).

Равновесному состоянию отвечает уравнение

$$F = \frac{\beta}{\eta} + \eta + F_0, \quad (4)$$

где $\beta = \beta_1$ ($\beta < 0$), $\eta \in (0, 1)$.

Уравнение (4) с позиций теории катастроф можно рассматривать как двумерное многообразие, включенное в пространство R^3 с координатными осями η, F, β . Состояния равновесия будут найдены для каждого $\beta = \text{const}$. Свойства устойчивости критических точек при этом легко определяются: все точки левее $\eta = \eta_0$, $\eta \in (0, \eta_0)$ есть локально устойчивые критические точки, все точки $\eta \in (\eta_0, 1)$ – неустойчивые критические точки.

Таким образом, получено уравнение состояния (4), устанавливающее связь между нормированными максимальными касательными напряжениями F и сдвиговой деформацией η . В уравнение (4) входит управляющий параметр β , названный [2] параметром несовершенства.

Эволюционное уравнение. В статье [10] впервые введено представление о повреждаемости материала в процессе деформации и его характеристика – параметр повреждаемости. Указанная характеристика ω рассматривается как внутренний параметр состояния, эволюция которого определяется соответствующим кинетическим уравнением $\dot{\omega} = f(\omega)$, где $\dot{\omega} = d\omega/dt$; t – время. Удобным представляется связать параметры β и ω между собой, полагая параметр ω ответственным за текущее структурное состояние материала.

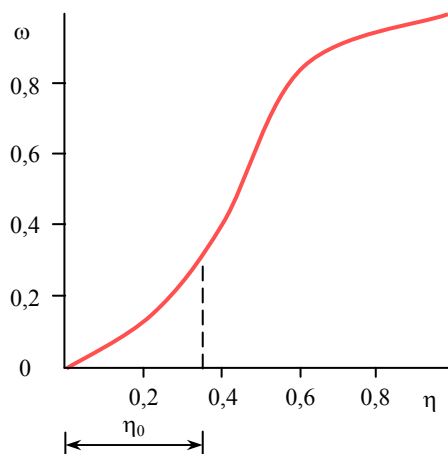


Рис.3. Схематическое представление параметра повреждаемости от деформации

Для анализа физической природы повреждаемости обратимся к опытам, проведенным на различных геоматериалах в Институте физики и механики горных пород НАН Кыргызской Республики. При испытании на осевое сжатие осуществлялась регистрация акустической эмиссии образцов как результат трещинообразования. На рис.3 дано схематическое представление характера процесса образования микротрещин. Здесь по оси абсцисс отложена нормированная деформация η , а по оси ординат – отношение текущего количества трещин в образце (N) к максимальному ($N_{\max}$), отвечающему моменту разрушения. Отождествляя параметр повреждаемости ω с $N/N_{\max}$ и анализируя его эволюцию, приходим к выводу, что процесс деформирования может рассматриваться как многостадийный размытый необратимый фазовый переход [11]. На графике $\omega \sim \eta$ наблюдаются

характерные для размытого фазового перехода особенности. Понятно, что переходу материала в запредельную область сопутствует смена типа устойчивости, обусловленная сильными структурными флуктуациями. Поэтому появление на графике $\omega \sim \eta$ точки перегиба, соответствующей пределу прочности материала ($\eta = \eta_0$), вполне предсказуемо.

Отметим, что в области упругих деформаций параметр ω возрастает слабо. При переходе в пластическое состояние ω начинает интенсивно расти. Это объясняется природой остаточных деформаций начально неоднородных материалов, к которым, как указывалось выше, относятся горные породы. Здесь помимо чисто сдвиговых процессов существенный вклад в деформацию дает разрыхление, сопровождающееся потерей связности, наличием поверхностей отрыва [6].

Кроме того, на участке упрочнения следует ожидать появления локализованных областей, в которых частицы материала измельчаются. Тем самым в образовавшейся структуре зарождается новая, более сложная структура, переход к которой совершается при смене типа устойчивости. В новом состоянии, при котором напряжение уменьшается с ростом деформаций, отмечается быстрое возрастание повреждаемости, а при появлении магистральной трещины $\omega \rightarrow 1$.

В рамках неравновесной статистической механики для описания повреждаемости горных пород может быть привлечен вариант уравнения Фоккера – Планка [1] в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[R(\eta) - \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (5)$$

Здесь $R = R(\eta)$ – функция, ответственная за внутреннее скольжение и разрыхление в материале (коэффициент «дрейфа»); λ – коэффициент диффузии, принимаемый для горных пород постоянным.

С механических позиций уравнение (5) может быть рассмотрено как равенство изменения плотности вероятности параметра $\omega = \omega(\eta)$ дивергенции потока вероятности, взятой со знаком минус.

Статическое нагружение горных пород соответствует стационарному состоянию. При этом из (10) при определенных условиях [15] имеем

$$\lambda \frac{d\omega}{d\eta} = 2R(\eta)\omega. \quad (6)$$

Решение уравнения (6), следуя [15], будем искать в виде

$$\omega(\eta) = A \exp \left(- \frac{2\Phi(\eta)}{\lambda} \right), \quad (7)$$

где интеграл

$$\Phi(\eta) = - \int_0^{\eta} R(\eta) d\eta \quad (8)$$

имеет смысл потенциала, а нормировочный множитель A определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) d\eta = 1.$$

Введением потенциала $\Phi(\eta)$ обуславливается привлечение методов теории катастроф к моделированию деформационных процессов горных пород с включением запредельной ветви. В таком случае очевидна ассоциация процесса с градиентной динамической системой [2]. Учитывая сильную нелинейность зависимости $\omega = \omega(\eta)$ (рис.3), потенциальную функцию $\Phi(\eta)$ и антиградиент $R(\eta)$ этой функции можно представить в виде элементарной катастрофы сборки. Имеем

$$\Phi(\eta) = \frac{a\eta^2}{2} + \frac{b\eta^4}{4}; \quad (9)$$

$$R(\eta) = -a\eta - b\eta^3,$$

где a, b – постоянные, подлежащие определению.

Теперь понятно, что функция параметра повреждаемости на основании (7)-(9) определяется выражением

$$\omega = A \exp \left[\frac{1}{\lambda} \left(-a\eta^2 - \frac{1}{2}b\eta^4 \right) \right]. \quad (10)$$

Временная эволюция параметра повреждаемости будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = -\frac{2}{\lambda} (a\eta + b\eta^3) \frac{d\eta}{dt}.$$

Подставив результат (10) в условие нормировки и вычислив соответствующий интеграл, получим

$$A \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \sqrt{\exp \lambda} K_{1/4}(\lambda) = 1, \quad (11)$$

где $m = a/b$; $\lambda = a^2/4\lambda b = m^2 b/4\lambda$; $K_{1/4}(\lambda)$ – модифицированная функция Ганкеля.

Перейдем теперь к установлению параметров A, a, b, λ . Для этого примем, что переход геоматериалов в диссипативное состояние обусловлен достижением предела упругости $T = T_e$ (см. рис.1), а смена диссипативных состояний (фазовая трансформация) происходит на пределе прочности $T = T_0$. Будем считать, что именно последнему утверждению отвечает точка перегиба на зависимости $\omega = \omega(\eta)$ (рис.3).

Полагая, с учетом сказанного, $\left. \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \right|_{\eta = \eta_0} = 0$, будем иметь

$$\frac{2b}{\lambda} (m\eta_0 + \eta_0^3)^2 - m_0 - 3\eta_0^2 = 0. \quad (12)$$

Воспользовавшись очевидным фактом, в соответствие которому $\omega|_{\eta=1} = 1$, можно записать

$$\ln \frac{1}{A} = -\frac{2b}{\lambda} (2m^2 + 1). \quad (13)$$

Таким образом, установлено, что три параметра геосреды (A, a и b/λ) связаны между собой уравнениями (11)-(13).

Остановимся теперь на определении зависимости между параметрами повреждаемости и несовершенства.

Пусть при некотором значении параметра повреждаемости $\omega = \omega_e$ параметр несовершенства получит значение $\beta = \beta_e$, причем ω_e, β_e соответствуют пределу упругости горной породы. Допустим, что на изменение ω на малое значение $d\omega$ параметр β откликается уменьшением на величину, пропорциональную β , поэтому можно положить

$$d\beta = -\beta K(\omega - \omega_e) d\omega, \quad (14)$$

где $K(\omega - \omega_e)$ – ядро, убывающее с ростом $\omega - \omega_e$.

Решение дифференциального уравнения (14) представим в форме

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_e) Q(\omega, \omega_e), \quad (15)$$

причем

$$Q(\omega, \omega_e) = \exp \left[- \int_{\omega_e}^{\omega} K(\omega - \omega_e) d\omega \right]. \quad (16)$$

Ядро оператора (14) примем в виде

$$K(\omega - \omega_e) = \frac{1-n}{(\omega - \omega_e)^n}, \quad (17)$$

где n – безразмерная постоянная величина.

Подставив (17) в (16), после вычисления интеграла можно записать $Q(\omega, \omega_e) = \exp[-(\omega - \omega_e)^{1-n}]$. Теперь решение (15) уравнения (14) примет вид

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_e) \exp[-(\omega - \omega_e)^{1-n}], \quad (18)$$

причем $\beta(\omega_e) = -\beta_e(F_0 + \eta_e)$.

Таким образом, сформулирована модель, включающая уравнение состояния (4), дополненное условием (18), устанавливающим связь между параметрами несовершенства и повреждаемости, с определением четырех материальных констант m , $b/2\lambda$, A , n . Указанная модель пригодна для описания деформационного поведения геоматериалов вплоть до разрушения.

Не останавливаясь подробно на численной процедуре решения системы уравнений (11), (12), (13), (18), приведем в таблице полученные значения материальных постоянных для некоторых горных пород.

Параметры констант, полученные при решении системы уравнений

Горная порода	m	$b/2\lambda$	A	n	Рис.4
Песчаник невыбросоопасный	0,098	225,3	1,046	-2,64	<i>a</i>
Песчаник выбросоопасный	0,131	99,792	5,525	-2,81	<i>б</i>
Коелганский мрамор	0,139	96,349	1,132	-3,089	<i>в</i>
Биотитовый гранит	0,113	159,36	1,082	-2,17	<i>г</i>

Сопоставление теоретических и опытных данных. Результаты экспериментальных и теоретических исследований приведены на графиках (рис.4). Здесь точками показаны экспериментальные значения параметра несовершенства β в зависимости от деформации η , полученные из

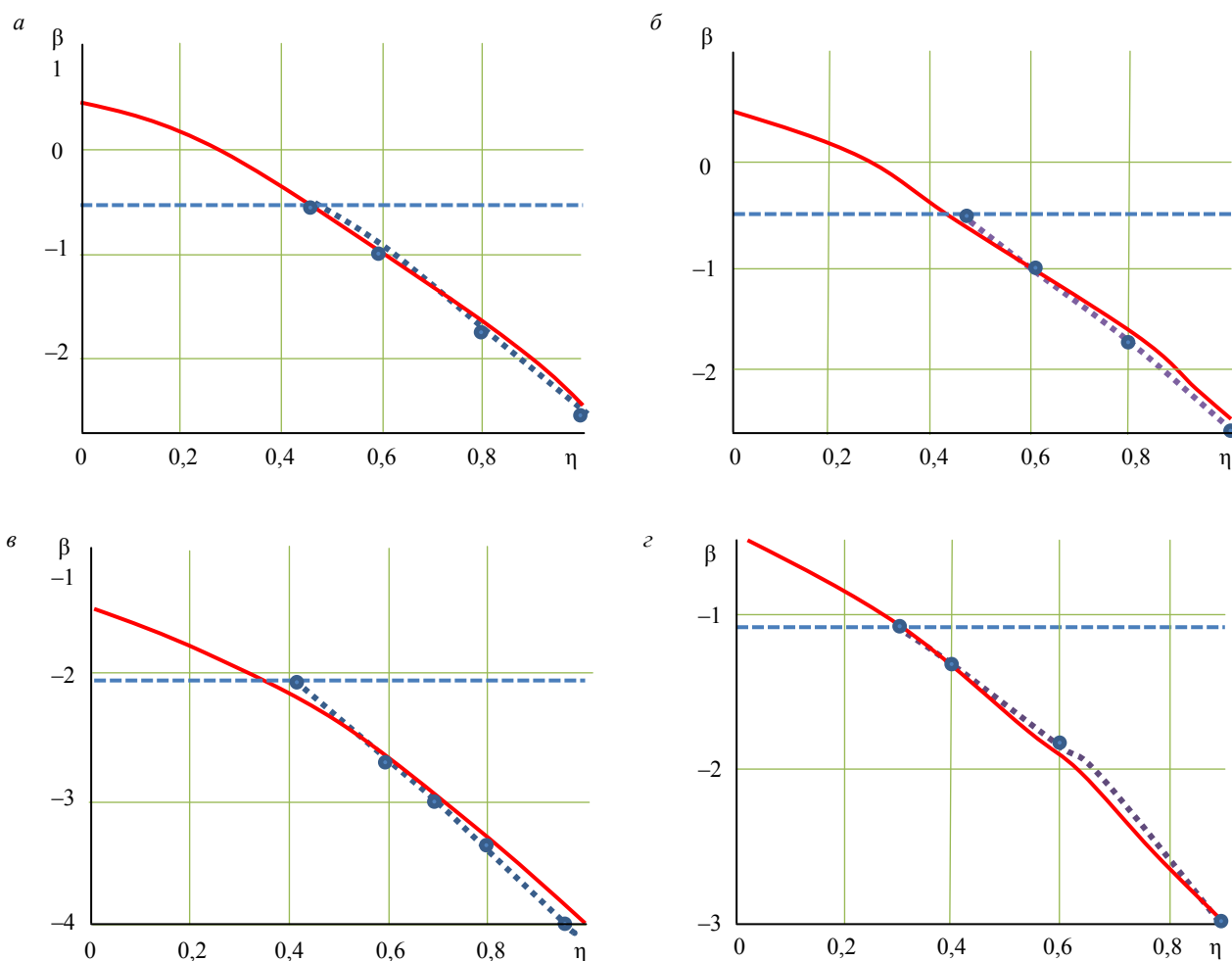


Рис.4. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных



сопоставления диаграмм «напряжение – деформация» [13] и найденные из уравнения состояния (4). Сплошные линии соответствуют теоретическим значениям β , установленным по формуле (18).

Заключение. Предположенную модель, включающую уравнение состояния (4) и выражение для параметра несовершенства (18), можно считать, с учетом обобщения на пространственный случай, приемлемой для постановки и решения задач анализа напряженно-деформированного состояния в окрестности горных выработок и бурении скважин. Перспективность применения методов синергетики к задачам построения физически обоснованных нелинейных определяющих соотношений вполне оправдана. Это относится к описанию сред, для деформационного поведения которых характерна иерархическая необратимая смена диссипативных структур [5, 18-20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 2. 399 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Кн. 1. 350 с.
3. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости, флуктуаций / П.Гленсдорф, И.Пригожин. М.: Мир, 1973. 208 с.
4. Китаева Д.А. О приложениях методов нелинейной динамики в механике материалов / Д.А.Китаева, Ш.Т.Пазылов, Я.И.Рудаев // Вестник Пермского государственного технического ун-та. Математическое моделирование систем и процессов. 2007. № 15. С. 46-70.
5. Комарцов Н.М. Концепция скольжения и механика горных пород / Н.М.Комарцов, Т.А.Лужанская, Б.А.Рычков // Ученые записки Казанского ун-та. Серия «Физико-математические науки». 2015. Т. 157, кн. 3. С. 54-58.
6. Леонов М.Я. Механика деформации и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981. 236 с.
7. Маматов Ж.Ы. О необратимой деформации горных пород // Проблемы естественно-технических наук, информационных технологий и управления на современном этапе. Бишкек: Изд-во Кыргызского государственного ун-та строительства, транспорта и архитектуры, 2003. С. 222-232.
8. Нелинейные волны, структуры и бифуркации / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова, М.И.Рабиновича. М.: Наука, 1983. 263 с.
9. Пригожин И.Р. Неравновесная статистическая механика. Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. 314 с.
10. Работнов Ю.Н. О разрушении вследствие ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1963. № 2. С. 113-123.
11. Ролов Б.Н. Физика размытых фазовых переходов / Б.Н.Ролов, В.Э.Юркевич. Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. 320 с.
12. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1979. 301 с.
13. Ставрогин А.Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н.Ставрогин, А.Г.Протосеня. М.: Недра, 1985. 271 с.
14. Ставрогин А.Н. Запредельные характеристики хрупких горных пород / А.Н.Ставрогин, Б.Г.Тарасов, Е.Д.Певзнер // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1981. № 4. С. 8-15.
15. Хакен Г. Информация и самоорганизация: макроскопический подход к сложным системам. М.: URSS: Ленанд, 2014. 320 с.
16. Шемякин Е.И. Задача о «хрупком шарнире» // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 138-144.
17. Adigamov N.S. Equation of state allowing for loss strength of material / N.S.Adigamov, Ya.I.Rudayev // Journal of Mining Science. 1999. Vol.35. N 4. P. 353-360.
18. Dovgan V.I. About structure formation self-organization at loading of quasibrittle materials / V.I.Dovgan, D.A.Kitaeva, Ya.I.Rudayev // Proceeding of the XXXIII International Summer School-Conference «Advanced problems in mechanics» (APM'2005). Editor D.A.Indeitsev. St. Petersburg: Polytechnical Publishing House, 2005. P. 61-66.
19. Melnikov B.E. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures / B.E.Melnikov, A.S.Semenov // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). 1996. Vol. 76 (SUPPL. 2). S. 615-616.
20. Modeling of concrete behavior under compression / D.A.Kitaeva, Ya.I.Rudayev, B.S.Ordobaev, Sh.S.Abdykееva // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 725-726. P. 623-628.

Авторы: Я.И.Рудаев, д-р физ.-мат. наук, профессор, rudaev36@mail.ru (Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан), Д.А.Китаева, канд. физ.-мат. наук, доцент, dkitaeva@mail.ru (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия), М.А.Мамадалиева, младший научный сотрудник, merivanakilbekovna@uandex.ru (Научная станция Российской академии наук, Бишкек-49, Кыргызстан).

Статья принята к публикации 25.05.2016.