УДК 532.591

С.И. ПЕРЕГУДИН, *д-р физ.-мат. наук, профессор, peregudinsi@yandex.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)
С.Е. ХОЛОДОВА, *канд. физ.-мат. наук, доцент, kholodovase@yandex.ru*
Санкт-Петербургский государственный университет

S.I. PEREGUDIN, *Dr. in phys. and math. sc., professor, peregudinsi@yandex.ru*
Saint Peterburg State Mining Institute (*Technical University*)
S.E. KHOLODOVA, *PhD in phys. and math. sc., associate professor, kholodovase@yandex.ru*
Saint Petersburg State University

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Исследование посвящено построению аналитических, в частности, точных решений задачи о движении электропроводной идеальной вращающейся жидкости, моделирующей волновые движения в жидком ядре Земли. Рассматривается задача об излучении волн во вращающуюся несжимаемую электропроводную жидкость плоской стенкой, совершающей, начиная с начального момента, гармонические колебания. Такая постановка задачи может служить первым шагом к исследованию влияния неоднородности жидкой среды на генерацию и поддержание магнитного поля Земли.

***Ключевые слова*:** идеальная электропроводная вращающаяся жидкость, волновые движения, магнитное поле Земли.

THE WAVE MOTIONS CAUSED BY OSCILLATIONS OF A FLAT WALL

The research is devoted construction analytical, in particular, exact solution of a problem on movement of the electrically conducting ideal rotating liquid modeling wave movements in a liquid kernel of the Earth. Namely, the problem about radiation of waves in rotating incompressible electrically conducting liquid by the flat wall making, since the initial moment, harmonious fluctuations is considered. Such statement of a problem can serve as the first step to research of influence of heterogeneity of the liquid environment on generation and maintenance of a magnetic field of the Earth.

Key words: the electrically conducting ideal rotating liquid, wave motions, the magnetic field of the Earth.

Земное ядро оказывает существенное влияние на многие геофизические явления и процессы, происходящие и происходившие в Земле. Согласно общепризнанным представлениям, магнитное поле Земли возбуждается движением в жидкой части земного ядра, но детали этого процесса все еще не выяснены.

Изучение динамики глубоких недр Земли является важнейшей и вместе с тем труднейшей проблемой, которая решается, прежде всего, методами геофизики с использованием сейсмических и гравитационных методов. Непосредственно проникнуть в земные недра трудно, в связи с чем большое значение приобретают теоретические исследования.

Вопросам о движении электропроводной жидкости посвящено множество работ. Основополагающие из них выполнены У. Эльзассером [8, 9], Э. Буллардом [5], которым удалось доказать существование стационарных и нестационарных решений уравнения магнитной индукции при задании некоторого специального вида поля скоростей.

Вопросам о крупномасштабных движениях электропроводной жидкости посвящены работы [6, 7, 10-12], в которых рассматривалась модель, построенная в приближении быстрого вращения. В рамках этой теории в уравнении движения силой инерции пренебрегается и инерциальные, альфвеновские волны и волны Россби отфильтровываются. Кроме того, в пределе быстрого вращения скорость $\boldsymbol{v}$ определяется с точностью до слагаемого, представляющего собой геострофическую скорость. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что геострофическая скорость не удовлетворяет магнитострофическому уравнению. Для преодоления указанных трудностей привлекаются вязкие силы и пренебрегается вязкостью, когда это допустимо.

В работах [6, 7] анализировалась соответствующая задача в слое, заключенном между плоскостями $z = 0$ è $z = d$. Здесь мы предполагаем, что границы слоя представляют собой поверхности, изменяющиеся в пространстве и во времени. Кроме того, в уравнении движения учитываются инерционные силы.

Будем использовать прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Под объемной силой понимается вектор $\boldsymbol{g}$, перпендикулярный поверхности $z = 0$ и направленный в сторону, противоположную вертикальной оси. Ось вращения жидкости совпадает с осью z, т.е. $\boldsymbol{w} = k\omega$, где $\boldsymbol{w}$ – угловая скорость вращения Земли.

Рассмотрим вращающийся слой электропроводной идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху твердой непроницаемой поверхностью $z = -Z(x, y)$ мантии Земли, а снизу поверхностью $z = -h_B(x, y, t)$ твердого ядра Земли. Система уравнений для описания движения невязкой электропроводящей несжимаемой вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{w}$ жидкости в магнитной гидродинамике в переменных Эйлера имеет вид [1-3]

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0;\quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{w}\times$$

$$\times\boldsymbol{v} - g\boldsymbol{z} + \frac{1}{\mu\rho}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B});\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

где $\boldsymbol{B}$ – вектор магнитной индукции; $\boldsymbol{v}$ – скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{w}$; p – давление; ρ – плотность; g – ускорение свободного падения; μ – магнитная проницаемость, предполагается постоянной.

В статье [4] была проведена редукция нелинейной векторной системы уравнений в частных производных, моделирующей возмущение в слое идеальной электропроводной жидкости, к скалярному уравнению для функции ζ, имеющему вид

$$\left(b_{0x}\frac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^6\Delta_2\zeta}{\partial t^6} + 2\alpha^2\frac{\partial^4\Delta_2\zeta}{\partial t^4} + \alpha^4\frac{\partial^2\Delta_2\zeta}{\partial t^2}\right) -$$

$$-\frac{\left(b_{0x}\dfrac{\partial}{\partial x} + b_{0y}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3}{\mu\rho}\left(\frac{\partial^4\Delta_2\zeta}{\partial t^4} + 2\alpha^2\frac{\partial^2\Delta_2\zeta}{\partial t^2} + \alpha^4\zeta\right) =$$

$$= \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}, \qquad (2)$$

и доказано утверждение, что любое решение $\boldsymbol{v}(x, y, t)$, $\boldsymbol{b}(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$ задачи о малых возмущениях в слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\boldsymbol{b}(x, y, t) = \mu\rho D_t\left(D_t^2 + \alpha^2\right)\tilde{\boldsymbol{b}};$$

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} D_t \left(D_t^{\,2} + \alpha^2 \right) \tilde{\eta} \, ;$$

$$\tilde{\tilde{\eta}} = D_t \tilde{\eta}; \; \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}} = D_t \tilde{\boldsymbol{b}} \, ;$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t & \alpha \\ -\alpha & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\eta}}_x + D_t \tilde{\tilde{b}}_x \\ \tilde{\tilde{\eta}}_y + D_t \tilde{\tilde{b}}_y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_x \\ \tilde{\tilde{b}}_y \end{pmatrix} = D D_t \left(D_t^{\,2} + \alpha^2 \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu\rho D_t^{\,2} - D^2 & \alpha\mu\rho D_t \\ -\alpha\mu\rho D_t & \mu\rho D_t^{\,2} - D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{\eta}}(x, y, t) = D_t \left(D_t^{\,2} F^2 + \left(\alpha D^2 \right)^2 \right) \xi(x, y, t) \, ;$$

$$F = \mu\rho D_t \left(D_t^{\,2} + \alpha^2 \right) - D^2; \; D = b_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + b_{0y} \frac{\partial}{\partial y},$$

где функция $\zeta = D_t \xi$ – решение уравнения (2); $\boldsymbol{b}$ – вектор магнитной индукции поля, обусловленного волновым движением жидкости; $\boldsymbol{b}_0$ – вектор магнитной индукции невозмущенного однородного постоянного магнитного поля; $H_0(x,\ y)$ – толщина жидкого слоя в состоянии покоя; $b_{z0}(x,\ y,\ t)$ и $b_{z0}^{(l)}$ – компоненты магнитного поля на границах слоя.

Верно также и обратное утверждение, что любое решение уравнения (2) порождает решение системы уравнений (1), моделирующей малые возмущения в тонком слое идеальной несжимаемой однородной электропроводной вращающейся жидкости, если построенные по приведенным выше формулам функции $\boldsymbol{v}(x, y, t)$, $\boldsymbol{b}(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$ удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

Исследуем волновые движения малой амплитуды в полуплоскости $R_+^2 = \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0 \right\}$, ограниченной горизонтальной стенкой $y = 0$. Направим ось Oy параллельно $\boldsymbol{b}_0$ и, полагая значение поля на вертикальных границах слоя и функцию глубины слоя не зависящими от x и введя обозначение $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} = \tilde{\zeta}$, получим математическую постановку данной задачи в виде начально-краевой задачи относительно функции $\tilde{\zeta}$:

$$b_{0y} \left(\frac{\partial^6 \Delta_2 \tilde{\zeta}}{\partial t^6} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 \Delta_2 \tilde{\zeta}}{\partial t^4} + \alpha^4 \frac{\partial^2 \Delta_2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} \right) - \frac{b_{0y}}{\mu\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^4 \Delta_2 \tilde{\zeta}}{\partial t^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 \tilde{\zeta}}{\partial t^2} + \alpha^4 \tilde{\zeta} \right) = \frac{b_{z0} - b_{z0}^{(e)}}{(\mu\rho)^2 H_0}; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^4} \tilde{\zeta}(x, y, 0) = 0, \; k = \overline{0,5}, \; \tilde{\zeta}(x, y, t)\Big|_\Gamma =$$

$$= \tilde{\zeta}(x, y, t)\Big|_{y=0} = \theta(t) \exp(-i\omega t), \qquad (4)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Решение поставленной задачи зависит от одной пространственной координаты y и от времени t, т.е. $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(y, t)$. В дальнейшем изложении знак тильды опущен.

С помощью преобразования Лапласа по времени t, получим решение задачи (3)-(4) в явном виде:

$$\zeta(y, t) = \theta\left(t - \frac{\sqrt{\mu\rho}}{b_{0y}} y \right) \exp\left(-i\omega \left(t - \frac{\sqrt{\mu\rho}}{b_{0y}} y \right) \right).$$

Из этого выражения следует, что гармонические колебания плоской стенки излучают в электропроводную жидкость горизонтально распространяющуюся нестационарную плоскую волну с волновым числом $\kappa = \omega\sqrt{\mu\rho} / b_{0y}$.

Изучим поведение решения $\zeta(y, t)$ при $t \to \infty$. Так как

$$\lim_{t \to \infty} \zeta(x, t) \exp(-i\omega t) = \exp\left(i\omega \frac{\sqrt{\mu\rho}}{b_{0y}} y \right),$$

то в рассматриваемой задаче существует режим установившихся колебаний с предельной амплитудой, описывающей установившуюся плоскую волну. Таким образом, проведенный анализ позволяет судить о предельном поведении решения при больших временах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алешков Ю.З.* Математическое моделирование физических процессов. СПб, 2001. 264 с.

2. *Гунько Ю.Ф.* Электромагнитная газодинамика плазмы / Ю.Ф.Гунько, А.В.Норин, Б.В.Филиппов. СПб, 2003. 176 с.

3. *Ландау Л.Д.* Электродинамика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц // Теоретическая физика. М., 1992. Т.8. 664 с.

4. *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. № 5. С.151-167.

5. *Bullard E.C.* The magnetic field withing the Earth // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1949. Vol.197. P.433-453.

6. *Busse F.H.* A model of the geodynamo // Geophys. J. Roy. Asron. Soc. 1975. Vol.42. P.437-459.

7. *Busse F.H.* Generation of planetary by convection // Phys. Earth Planet. Inter. 1976. Vol.12. P.350-358.

8. *Elzasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism. Part I: Theory // Phys. Rev. 1946. Vol.69. P.106.

9. *Elzasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism, Part II: The secular variation // Phys. Rev. 1946. Vol.70. P.202.

10. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Finite amplitude convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1988. Vol.44. P.33-54.

11. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1989. Vol.49. P.97-116.

12. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.59. P.208-222.

REFERENCES

1. *Aleshkov Yu.Z.* Mathematical modeling of physical processes. Saint Petersburg, 2001. 264 p.

2. *Gun'ko Yu.P., Norin A.V., Philippov B.V.* Electromagnetic gas-dynamic of the plasma. Saint Petersburg, 2003. 176 p.

3. Landau L.D., Liphshits E.M. Electrodynamics of the continuous mediums // Theoretical Physics. Moscow, 1992. Vol.8. 664 p.

4. *Kholodova S.E.* Dynamics of a rotating layer of an ideal electrically conducting incompressible fluid // Journal of computational mathematics and mathematical phisics. 2008. Vol.48. N 5. P.151-167.

5. *Bullard E.C.* The magnetic field withing the Earth // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1949. Vol.197. P.433-453.

6. *Busse F.H.* A model of the geodynamo // Geophys. J. Roy. Asron. Soc. 1975. Vol.42. P.437-459.

7. *Busse F.H.* Generation of planetary by convection // Phys. Earth Planet. Inter. 1976. Vol.12. P.350-358.

8. *Elzasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism. Part I: Theory // Phys. Rev. 1946. Vol.69. P.106.

9. *Elzasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism, Part II: The secular variation // Phys. Rev. 1946. Vol.70. P.202.

10. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Finite amplitude convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1988. Vol.44. P.33-54.

11. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shell // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1989. Vol.49. P.97-116.

12. *Zhang K.-K., Busse F.H.* Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol.59. P.208-222.