УДК 539.3

С.Е. МАНСУРОВА, *канд. физ.-мат. наук, доцент, kaf-math-spmi@rambler.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный институт (*технический университет*)

S.E. MANSUROVA, *PhD in phys. and math. sc., associate professor, kaf-math-spmi@rambler.ru*
Saint Petersburg State Mining Institute (*Technical University*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА ВБЛИЗИ ТРЕЩИНЫ

Рассматривается поведение материала вблизи трещины при нелинейной деформации сдвига. Решается плоская задача нелинейной теории упругости в вариационной форме с несколькими вариантами граничных условий. Приводятся численные результаты, полученные с помощью метода конечных элементов.

Ключевые слова: трещина, нелинейная деформация, метод конечных элементов.

NUMERICAL MODELLING OF SHEAR STRAIN NEAR TO THE CRACK

The behaviour of a material near to a crack is considered at nonlinear shear strain. The plane problem of the nonlinear theory of elasticity in the variation form is solved. Some variants of boundary conditions are used. The numerical results received by a finite element method are presented.

Key words: a crack, nonlinear shear strain, finite element method.

На основе аппарата нелинейной теории упругости и численных методов решения нелинейных краевых задач предлагается моделировать поведение эластичного материала вблизи трещины при нелинейных деформациях сдвига. В качестве модели рассматривается плоская задача теории упругости (рис.1). Твердое тело (заштриховано) жестко соединено с плоским слоем эластичного материала толщиной h. На участке длиной $2b$ связи между слоем и основанием нарушаются – появляется трещина BB_1. Исследуем две ситуации:

- на участке длиной $2a$ происходит обрушение основания и сближение точек K и M под воздействием поперечных нагрузок (задача 1);
- в основании по линии CD образуется трещина, которая затем раздвигается на величину $2a$ (задача 2).

Для численных расчетов принято, что движение точек K и M строго горизонтально, участок обрушения симметричен относительно трещины и задача симметрична относительно плоскости $x = 0$ (рис.1).

Математическая постановка обеих задач имеет вид

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F} = 0;\ S^{+} : s_{31} = s_{33} = 0;$$

$$\Gamma :\ x = 0 : s_{13} = 0,\ u = \pm a;$$

$$x = l : u = w = 0,$$

где $\boldsymbol{S}$ – тензор условных напряжений; $\boldsymbol{F}$ – вектор плотности объемных сил, S^{+} и S^{-} – верхняя и нижняя поверхности слоя; Γ – боковая поверхность, состоящая из двух частей ($x = 0$ и $x = l$); u и w – смещение точек относительно осей x и y соответственно.

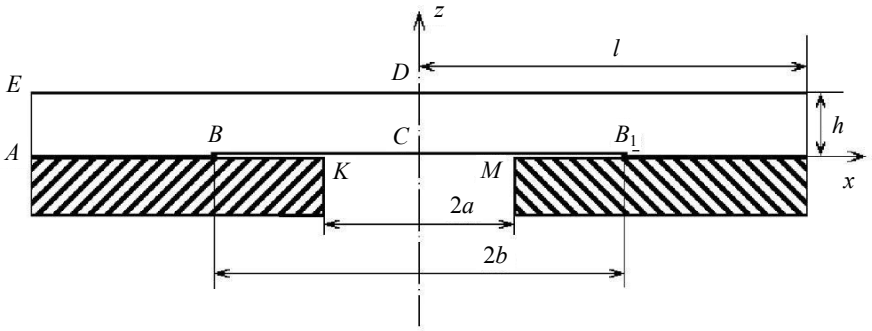


Рис.1. Схема задачи

Верхняя поверхность эластичного слоя свободна от напряжений. На нижней поверхности для обеих задач даны два варианта граничных условий, которые отличаются только условиями на участке $0 \le x \le b$. Вариант 1 (задачи 1.1 и 2.1) предполагает отсутствие на участке трещины вертикальных перемещений w, вариант 2 (задачи 1.2 и 2.2) – отсутствие нормальных напряжений s_{33}. Таким образом, граничные условия запишем в виде:

для варианта 1

$$S^{-}: 0 \le x < b : s_{31} = 0,\ w = 0;$$

$$x \ge b : u = w = 0;$$

для варианта 2

$$S^{-}: 0 \le x < b : s_{31} = s_{33} = 0;$$

$$x \ge b : u = w = 0.$$

Длина l много больше толщины слоя h, так что деформация в сечении $x = l$ практически отсутствует.

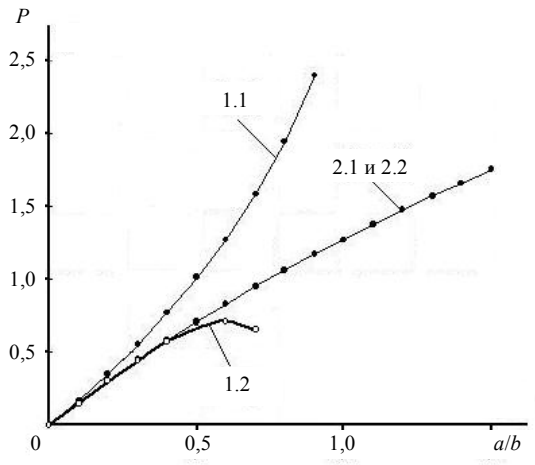


Рис.2. Диаграмма сила – смещение (здесь и далее на кривых указаны номера задач)

Для численного решения задача формулируется в вариационной форме как задача минимизации функционала потенциальной энергии деформации [1, 2]:

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{\Phi}\, dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{U}\, dV + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{U}\, dS,$$

где $\delta\boldsymbol{U}$ – вариация вектора перемещений; Ω и $\partial\Omega$ – область, занимаемая телом, и ее граница, $\boldsymbol{\sigma}$ – поверхностная нагрузка.

Предполагается, что упругий потенциал $\mathbf{\Phi}$ известен как функция инвариантов тензоров деформаций Коши или Грина [2].

Для описания механических свойств эластичного слоя применяется неогуковский потенциал для сжимаемого материала [1, 2]:

$$d\mathbf{\Phi} = \mu\left[de + q(\nu, J)\, dJ\right],$$

$$q = \frac{1}{1-2\nu}\left[\nu J - (1-\nu)J^{-1}\right],$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $e = \mathrm{tr}\mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ – тензор деформации Грина; $q = q(J)$ – функция кратности изменения объема J.

Численная реализация осуществляется методом конечных элементов [3]. Тело разбивается на четырехугольные изопараметрические элементы, позволяющие описывать произвольную геометрию [1]. При этом длина трещины принимается равной толщине слоя ($b = h$), а общая длина участка меняется в пределах $l = (5 \div 20)h$. Упругие свойства эластичного слоя соответствуют параметрам $\mu = 1$ MPa, $\nu = 0{,}324$.

Вычислены значения горизонтальной силы реакции F_x, возникающей в сечении

CD при различных значениях параметра a. На рис.2 приведены значения безразмерной величины $P = F_x(\mu h)$ в зависимости от величины относительного сдвига a/b для задач 1 и 2. Отметим, что для вариантов граничных условий 2.1 и 2.2 графики практически совпадают. Для задачи 1.2 при сдвиге концов участка обрушения на величину, большую половины трещины, решение теряет устойчивость. Это говорит о том, что при $a \geq 0{,}5b$ модель перестает адекватно описывать поведение материала (вероятно, происходит его разрушение).

На рис.3, *а* и 4, *а* показаны деформированные конфигурации эластичного слоя. Параметр δ определяет размер области отслоения: $\delta = b - a$. Легко видеть, что в задаче 1.2 расчетная деформация слоя значительно больше, чем в задаче 1.1. При этом происходит сильное выпучивание слоя вверх, а при значительных сближениях частей основания ($a \geq 0{,}5b$) возможно образование складки (рис.3, *а*). Необходимо отметить, что граничные условия задачи 1.2 ближе к реально происходящим процессам, чем условия задачи 1.1. Деформации для задач 2.1 и 2.2 близки по величине и характеру (рис.4, *а*).

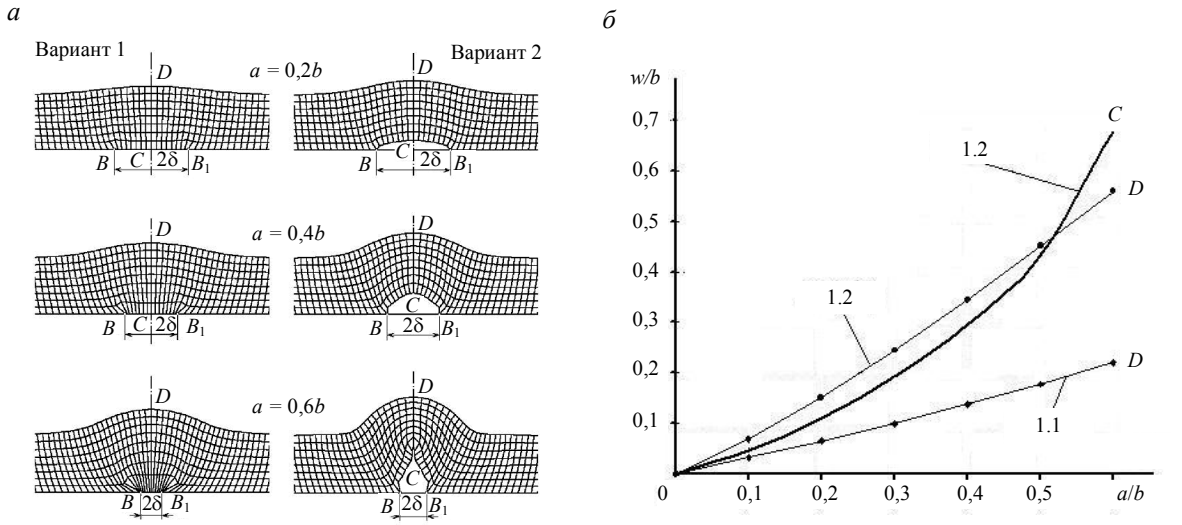


Рис.3. Деформация эластичного слоя (а) и перемещения точек C и D (*б*) в задаче 1

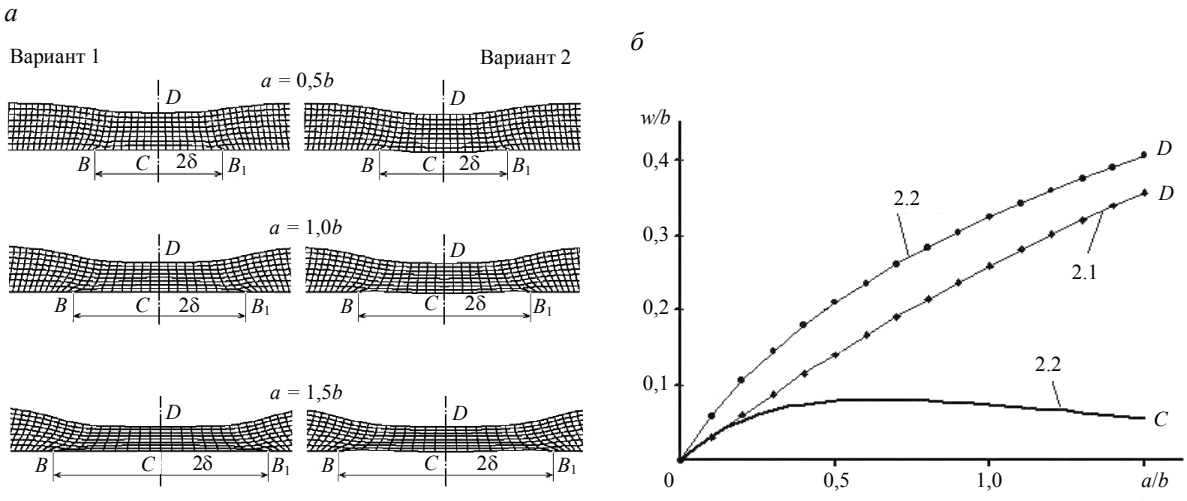


Рис.4. Деформация эластичного слоя (*а*) и перемещения точек C и D (*б*) в задаче 2

Анализ диаграмм вертикального смещения крайних точек сечения *CD* (рис.3, *б* и 4, *б*) показал, что смещение точки *D* в задачах 1.1 и 1.2 линейно зависит от параметра *a*, хотя во втором случае его величина в 2,5 раза больше (рис.4, *а*). Смещение точки *C* в задаче 1.2 имеет сильно выраженный нелинейный характер зависимости от параметра *a*, причем при больших *a* оно превышает смещение точки *D*, что вызывает утонение слоя на участке *CD*. Показанные на рис.4, *б* смещения точек *D* и *C* достаточно близки по характеру для двух типов граничных условий. Смещение точки *C* значительно меньше (по абсолютной величине) смещения точки *D*. Оно имеет максимум при $a \approx 0{,}6b$ и уменьшается при дальнейшем увеличении параметра *a*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабриц С.А.* Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала / С.А.Кабриц, В.М.Мальков, С.Е.Мансурова // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С.38-47.

2. *Мальков В.М.* Основы математической нелинейной теории упругости. СПб, 2002. 212 с.

3. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., 1976. 464 с.

REFERENCES

1. *Kabrits S.A., Malkov V.M., Mansurova S.E.* Nonlinear equations of a plane layer for three models of an elastic material // News of the Russian Academy of Science, the Mechanic of a solid body. 2001. № 1. P.38-47.

2. *Malkov V.M.* Bases of the mathematical nonlinear theory of elasticity. Saint Petersburg, 2002. 212 p.

3. *Oden G.* Finite element method in the nonlinear mechanics of continua. Moscow, 1976. 464 p.