УДК 537.876

А.В. ДЕНИСОВ, *канд. физ.-мат. наук, доцент, rectorat@spmi.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)

A.V. DENISOV, *PhD in phys. and math. sc., associate professor rectorat@spmi.ru*
Saint Petersburg State Mining Institute (Technical University)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ С МАКСИМУМОМ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Рассмотрена одномерная задача рассеяния плоской волны вертикальной поляризации симметричным плазменным слоем с максимумом электронной концентрации и бесконечно-малыми потерями. Новым способом доказано, что волна вертикальной поляризации не пройдет за точку с максимальной концентрацией электронов, если потери в слое устремить к нулю.

Ключевые слова: экранирование вертикально-поляризованной волны, задача рассеяния.

DISTRIBUTION OF THE WAVE OF VERTICAL POLARIZATION IN THE INFINITE PLASMA LAYER WITH THE MAXIMUM OF THE ELECTRONIC CONCENTRATION

The problem of dispersion of a flat wave of vertical polarisation by a plasma layer with a maximum of electronic concentration and infinitesimal losses is considered. With use of the theorem of an average in the new way it is proved that the wave of vertical polarisation will not pass for a point with the maximum of electronic concentration if loss in layer to direct to zero.

Key words: shielding of the vertically-polarised wave, a dispersion problem.

В радиофизике хорошо известен эффект экранирования волны вертикальной поляризации (другие названия *TM*-волна, волна *p*-поляризации) плазменными слоями конечной толщины* и бесконечно протяженными**. Он состоит в том, что на частоте поля, равной максимальной плазменной частоте, наклонно падающая на плазменный слой плоская вертикально-поляризованная волна не пройдет за точку с максимальной концентрацией электронов, если потери в слое устремить к нулю. Этот эффект имеет место в случае, когда в окрестности точки максимума электронной концентрации вещественная часть функции диэлектрической проницаемости имеет нуль четной кратности.

Точное аналитическое решение уравнений Максвелла для поля волны вертикальной поляризации не известно до сих пор ни для одной модели рассматриваемого плазменного слоя, а предложенные приближенные решения очень громоздки, поскольку в них используется метод сжатых отображений для интегрального уравнения, соответ-

* *Живулин В.А.* Эффект экранирования электромагнитного поля неоднородными плазменными слоями / В.А.Живулин, Г.И.Макаров // Проблемы дифракции и распространения волн. 1974. Вып.13. С.120.

Zhivulin V.A., Makarov G.I. Effect of shielding of an electromagnetic field non-uniform plasma layers // Problems of diffraction and distribution of waves. 1974. Issue 13. P.120.

** *Зернов Н.Н.* Построение решения эталонного уравнения для задачи о распространении плоской волны вертикальной поляризации в бесконечном слое с максимумом электронной концентрации / Н.Н.Зернов, Г.И.Макаров // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19. № 1. С.64.

Zernov N.N., Makarov G.I. Construction of the decision of the reference equation for a problem about distribution of a flat wave of vertical polarisation to an infinite layer with a maximum of electronic concentration // Izv. High schools. Radio physics. 1976. Vol.19. № 1. P.64.

ствующего исходному дифференциальному уравнению для магнитного или электрического поля волны в такой среде.

Здесь доказан эффект экранирования волны для случая параболической аппроксимации диэлектрической проницаемости в окрестности точки максимума электронной концентрации. Это доказательство опирается на теорему о среднем значении для определенного интеграла от вещественной функции.

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный бесконечно-протяженный плоскослоистый плазменный слой, выходящий с обеих сторон в вакуум. Выберем декартову прямоугольную систему координат (X, Y, Z) таким образом, чтобы ось Z была перпендикулярна слою. Будем полагать, что тяжелые частицы (ионы и молекулы) в нем неподвижны, а пространственная дисперсия пренебрежимо мала. Диссипативные процессы учтем посредством введения эффективной частоты столкновений электрона $\nu(z)$, которую будем считать постоянной в окрестности точки $z=0$, где достигается максимум электронной концентрации. Отношение ν/ω считаем малым параметром задачи: $\nu/\omega \ll 1$ (здесь ω – частота волны). Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна вертикальной поляризации падает со стороны $z=-\infty$ под углом θ_0 к оси Z и XZ – плоскость падения волны, в которой лежит ее электрический вектор. Будем считать, что частота волны равна максимальной плазменной частоте слоя, а вещественная часть комплексной функции диэлектрической проницаемости ε имеет в точке $z=0$ нуль второй кратности.

Полагая, что магнитное поле волны $H_y = H\exp(ikx\sin\theta_0 - i\omega t)$, для комплексной амплитуды H имеем уравнение

$$H''_{ss} - \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon}H'_s + \eta_0^2(\varepsilon - \theta^2)H = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\theta = \sin\theta_0$, $\eta_0 = \dfrac{\omega}{c}l$, $s = \dfrac{z}{l}$ – независимая безразмерная переменная. Не умаляя общности, в качестве характерного масштаба l выберем толщину слоя на уровне $\mathrm{Re}\,\varepsilon = 0{,}5$.

Функцию комплексной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(s)$ при малых значениях $|s|$ зададим в виде

$$\varepsilon = i\frac{\nu}{\omega} + s^2, \quad |s| \le 1. \qquad (2)$$

Считаем, что плазменный слой при $|s| \ge 1$ достаточно быстро переходит в вакуум, т.е. при $|s| \ge 1$ концентрация электронов и потери в слое с ростом $|s|$ настолько быстро стремятся к нулю, что ВКБ-решения уравнения (1) при $s \to \pm\infty$ имеют вид плоских волн. При этом условии существует решение уравнения (1), удовлетворяющее принципу излучения при $s \to +\infty$. Для определенности положим амплитуду падающей волны равной единице. Тогда граничные условия (на бесконечности) для искомого решения уравнения (1) запишутся при $s \to +\infty$ и $s \to -\infty$ соответственно в виде

$$H \cong T(\nu)\exp(i\eta_0 s\cos\theta_0); \qquad (3)$$

$$H \cong \exp(i\eta_0 s\cos\theta_0) + R(\nu)\exp(-i\eta_0 s\cos\theta_0), \qquad (4)$$

где T и R – коэффициенты прохождения и отражения волны.

На вещественной оси (s) функция $\varepsilon(s)$ не имеет нулей при $\nu \ne 0$. В соответствии с теоремой Коши – Ковалевской существует единственная аналитическая функция, определенная на вещественной оси, которая является решением задачи (1)-(4).

Теорема. При произвольном значении $\theta \ne 0$ $\lim\limits_{\nu\to 0} T(\nu) = 0$.

Доказательство: Как видно из (2), уравнение (1) имеет на комплексной плоскости (s) две регулярные особые точки

$$s_{1,2}^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right),$$

являющиеся нулями функции $\varepsilon(s)$. При стремлении потерь в слое к нулю они вырождаются в одну особую точку $s^{(0)} = 0$, в которой вронскиан дифференциального уравнения (1) обращается в ноль, а его решение перестает быть аналитической функцией в окрестности этой точки.

Чтобы найти коэффициент прохождения волны при потерях, равных нулю, рассмотрим сначала случай, когда потери малы, но не равны нулю. Проведем на комплексной области (s) два разреза из точек $s_{1,2}^{(0)}$ параллельно мнимой оси, которые не пересекают вещественную ось. В такой односвязной области функция $H(s)$ является однозначной аналитической функцией переменной s. Поэтому задачу об отыскании решения на вещественной оси s можно заменить задачей построения решения уравнения (1) на произвольной гладкой кривой, проведенной в комплексной области (s), которая не пересекает эти разрезы. В качестве такой кривой выберем произвольную гладкую кривую $abcd$, в которой точки a и d – это соответственно минус и плюс бесконечность на вещественной оси, а средний участок bc задан в параметрическом виде

$$s = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)t, \tag{5}$$

где t пробегает значения от $t_{\text{ià÷}} = -t_0$ до $t_{\text{êîí}} = t_0$,

$$t_0 = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{\sigma}; \ \frac{1}{4} < \sigma < \frac{1}{2}, \tag{6}$$

На комплексной плоскости (s) участок bc рассматриваемой кривой лежит в круге $K_r(0)$ с центром в точке $s = 0$ и радиусом $r = \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}$, который при $\nu \to 0$ уменьшается до нуля.

Докажем (вспомогательное) утверждение 1: решение $H(s, \nu)$ задачи (1)-(4) в точке $s = 0$ стремится к нулю, если ν устремить к нулю. Перепишем уравнение (1) в дивергентной форме:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{dH}{ds}\right) = -\eta_0^2 \frac{\varepsilon - \theta^2}{\varepsilon} H$$

и проинтегрируем его от точки

$$s_b = -\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)t_0$$

до точки

$$s_c = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)t_0,$$

которые являются концами прямолинейного участка bc. В результате интегрирования вдоль участка bc с учетом (5) получим соотношение

$$H'(s_c) - H'(s_b) + \eta_0^2 i \frac{\nu}{\omega}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{2\sigma}\right] \times$$

$$\int_{s_b}^{s_c} H(\tilde{s})d\tilde{s} = \eta_0^2\theta^2 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{2\sigma}\right] \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \int_{-t_0}^{t_0} \frac{H(t)}{1+t^2} dt.$$

Комплексную функцию $H(t)$ представим в виде суммы ее вещественной $U(t)$ и мнимой $iV(t)$ частей и перепишем интеграл $\int_{-t_0}^{t_0} \frac{H(t)}{1+t^2}dt$ в виде комбинации двух интегралов от вещественных функций: $\int_{-t_0}^{t_0} \frac{U(t)}{1+t^2}dt + i\int_{-t_0}^{t_0} \frac{V(t)}{1+t^2}dt$. Применяя к каждому из них теорему о среднем значении, получим:

$$H'(s_c) - H'(s_b) + \eta_0^2 i \frac{\nu}{\omega}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{2\sigma}\right] \times$$

$$\int_{s_b}^{s_c} H(\tilde{s})d\tilde{s} = \eta_0^2\theta^2 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{2\sigma}\right] \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \left[U(s_1) + iV(s_2)\right] I_0, \tag{7}$$

где $I_0 = \int_{-t_0}^{t_0} \frac{1}{1+t^2} dt$; s_1 и s_2 – «средние» точки, лежащие на отрезке bc. С учетом (6) при малом значении ν/ω интеграл $I_0 \cong \pi$.

Докажем, что левая часть равенства (7) по модулю не превосходит некоторого числа, не связанного с малым параметром задачи.

Чтобы это доказать, будем опираться на следующие соображения. При $\nu \neq 0$ решение дифференциального уравнения $H(s, \nu)$ является аналитической функцией параметра ν, поскольку коэффициенты уравнения (1) для зависимости (2) таковыми являются. Следовательно, имеет место утверждение 2: решение задачи (1)-(4) при малом, но отличном от нуля значении параметра ν должно быть близко к решению в предельном случае, когда $\nu \to 0$.

Если в уравнении положить $\nu = 0$, т.е. рассмотреть в окрестности начала координат зависимость $\varepsilon = s^2$, то на основании приведенных в упомянутой работе Н.Н.Зернова и Г.И.Макарова линейно-независимых решений этого уравнения (когда особые точки уравнения слились в одну точку), которые выражаются через степенные и вырожденные гипергеометрические функции, нетрудно убедиться в том, что как сами два фундаментальных решения (одно из которых удовлетворяет принципу излучения при $s \to +\infty$ и не удовлетворяет ему при $s \to -\infty$, а другое решение обладает противоположными свойствами), так и производные от этих фундаментальных решений конечны в точке $s = 0$. Значит и при не равных нулю, но стремящихся к нулю значениях ν решение задачи (1)-(4) и его производная остаются ограниченными в точке $s = 0$. На основании сказанного левая часть равенства (3) конечна.

В равенстве (7) устремим параметр ν к нулю. Как было сказано выше, радиус r круга K_r, в котором лежит участок bc, при этом стремится к нулю. Следовательно, и значения s_1 и s_2, которые лежат на отрезке bc также стремятся к нулю. Множитель, стоящий перед суммой $[U(s_1) + iV(s_2)]$ в правой части этого равенства, при стремлении потерь в слое к нулю, с учетом (6), стремится к бесконечности, значит, сумма $[U(s_1) + iV(s_2)]$ стремится к нулю. В итоге получим, что решение $H(s, \nu)$ задачи (1)-(4) в точке $s = 0$ будет равно нулю при $\nu \to 0$. При стремлении потерь в слое к нулю вронскиан дифференциального уравнения (1) в точке $s = 0$ для зависимости (2) стремится к нулю и решение перестает быть аналитической функцией в окрестности этой точки, так что продолжение решения при переходе через точку $s = 0$ перестает быть однозначным. Однако мы нашли, что в точке $s = 0$ предел этого аналитического решения при $\nu \to 0$ равен нулю. Получив это условие, мы можем свести задачу о нахождении коэффициента прохождения к решению следующей задачи. Найдем решение уравнения (1) для функции (2) при $\nu = 0$ при неотрицательных значениях s, которое подчиняется принципу излучения при $s \to +\infty$, т.е. условию (3), и удовлетворяет (краевому) условию

$$\lim_{s \to +0} H(s) = 0. \qquad (8)$$

На основании формул, приведенных в той же работе, нетрудно убедиться, что если в коэффициентах уравнения (1) положить $\nu = 0$, то в точке $s = 0$ решение $H_1(s)$ уравнения (1), которое удовлетворяет принципу излучения при $s \to +\infty$, т.е. имеет асимптотику: при $s \to +\infty$ $H_1 \cong \exp(i\eta_0 s \cos\theta)$, оказывается не равным нулю. Поэтому условие (8) для решения этой второстепенной задачи может быть выполнено только в случае $T = 0$. Привлекая упомянутое выше утверждение 2 о близости решения задачи (1)-(4) при малых потерях к предельному значению для ее решения при нулевых потерях, заключаем, что решение исходной задачи характеризуется тем, что при $\nu \to 0$ имеем $T(\nu) \to 0$. На этом доказательство теоремы завершено.

Как было упомянуто, решению этой задачи был посвящен целый ряд исследований. В них очень громоздким и сложным способом был получен порядок стремления к нулю коэффициента прохождения при уменьшении потерь до нуля, и тем самым доказан эффект экранирования.

Применив рассмотренный выше метод к доказательству экранирования, мы не можем получить характер стремления коэффициента T к нулю. Однако само доказательство выглядит элементарным по сравнению со сложными выкладками в работе В.А.Живулина и Г.И.Макарова, занимающими несколько десятков страниц и требующих для обоснования сходимости метода сжатых отображений дополнительных исследований, включая доказательство (квазиравномерной) сходимости ряда последовательных приближений.

При учете пространственной дисперсии коэффициент прохождения вертикально-поляризованной волны уже отличен от нуля, и имеет место ее трансформация в плазменные колебания. Если же пространственная дисперсия пренебрежимо мала, то волна практически полностью отражается от такого слоя. Рассмотрение данной задачи имеет не только физический интерес с точки зрения вопроса о поляризационной фильтрации поля, но и чисто математический интерес в связи с изучением поведения решения дифференциального уравнения с вырождающимися особыми точками.