УДК 622.273.2:622.831

А.П. ГОСПОДАРИКОВ, *д-р техн. наук, профессор, kaf_math_spmi@rambler.ru*
М.А. ЗАЦЕПИН, *ассистент, michael_zatsepin@mail.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет)

A.P. GOSPODARIKOV, *Dr. in eng. sc., professor, kaf_math_spmi@rambler.ru*
M.A. ZATSEPIN, *assistant lecturer, michael_zatsepin@mail.ru*
Saint Petersburg State Mining Institute (Technical University)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ РАЗРАБОТКЕ ПОЛОГИХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Отработка запасов связана с техногенным «возмущением» специфической среды – массива горных пород. Данный объект весьма сложен по строению, различен по механическим свойствам и характеризуется широким разнообразием законов изменения его напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: математическое моделирование, геомеханика, массив горных пород, напряженно-деформированное состояние, численные и аналитические методы.

MATHEMATICAL MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF THE MINED SEAM DEPOSITS

Development of bedded deposits is associated with man-caused distortion of specific environment – the rock massifs, which are very complicated in their composition, can vary significantly in mechanical properties and is characterized with a wide variety of laws and techniques to assess its stress-strain state.

Key words: mathematical modeling, geomechanics, rock massif, stress-strain state, analytical and numerical methods.

В настоящее время разработка пологих месторождений полезных ископаемых приводит исследователей к необходимости решения важных прикладных задач геомеханики, охватывающей изучение вопросов проявления горного давления и напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород в окрестности выработок различного назначения и произвольной конфигурации. Указанная необходимость обусловлена требованием иметь информацию о разнообразных физико-механических процессах в этих массивах. Процессы эти зависят не только от специфики горно-геологических условий отработки различных месторождений полезных ископаемых, но и от изменчивости этих условий в пределах шахтных полей.

Вышесказанное позволяет говорить о целесообразности и необходимости разработки новых либо дальнейшего совершенствования уже известных вычислительных методов, призванных помочь выбору оптимальных решений производственных инженерных задач, а также реализации таких решений для обеспечения технически и экологически безопасной отработки запасов.

Очевидно, что изучение параметров механических процессов в массивах горных пород не может быть однозначно определено только на основе данных натурных экспериментов, данных лабораторных исследований

или результатов аналитических расчетов. По-видимому, постановка такой задачи и нецелесообразна, так как даже ведущим представителям горной науки, специализирующимся в области горной геомеханики, не удалось до сих пор установить общие физико-механические законы, адекватно отвечающие реальному поведению массива горных пород. Поэтому по-прежнему остается актуальной задача исследования механических процессов в породных массивах различными методами (от экспериментальных натурных измерений до вычислительных процедур).

Особенности массива горных пород как объекта изучения протекающих в нем механических процессов, обусловливают и различия общих методологических подходов при постановке задач горной геомеханики и реализации результатов их решения на практике. Определяющее значение в этом плане имеет натурный эксперимент, позволяющий проследить все особенности развития реальных механических процессов, уточнить их характер и формы применительно к различным условиям ведения подземных горных работ с учетом фактических данных о геологическом строении массивов. Инструментальные наблюдения, проводимые при этом, позволяют определить основные параметры изучаемых процессов, т.е. получить данные о компонентах тензоров напряжений, деформаций и перемещений, а также об их изменчивости в исследуемых условиях, вызванной влиянием целого ряда основных факторов техногенной природы. Шахтные эксперименты позволяют классифицировать протекающие в массиве механические процессы. Обобщающим результатом таких исследований будет разработка адекватной горно-геомеханической модели того или иного механического процесса в конкретных условиях горного подземного предприятия.

Поскольку в рамках натурных экспериментов в значительном количестве случаев невозможно выявить необходимый спектр факторов, определяющих закономерности механических процессов в массивах горных пород, то в горной геомеханике широко применяются и методы моделирования, дающие возможность с высокой достоверностью решить указанную проблему. Помимо этого, исследования на моделях позволяют изучать механизмы процессов с большей их схематизацией и соответственно возможностью относить полученные результаты на достаточно широкий круг горных задач. Однако даже этих результатов недостаточно для получения необходимой информации, отражающей условия протекания целого класса механических процессов, характеризуемого некоторыми принципиально общими закономерностями. Последнее может быть реализовано с помощью аналитических методов, допускающих абстрагирование от конкретики натурно-модельного экспериментирования механических процессов. Требуемые для данного метода параметры берутся по результатам шахтных либо модельных исследований. При использовании в горной практике аналитических методов приходится прибегать к целому ряду гипотез и допущений относительно исследуемой среды и имеющих в ней место физико-механических процессов. Так, например, некоторые прикладные задачи механики горных пород удалось при помощи вариационного метода Бубнова – Галеркина свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и впоследствии решить их аналитически. Однако, как правило, полученные решения не всегда точно отражают реальное поведение массива горных пород и, в конечном счете, их практическое значение невелико. Кроме того, получение решений в аналитической форме большинства задач горной геомеханики, связанных с определением НДС массива горных пород в окрестности очистных выработок, сопряжено с большими вычислительными трудностями, как правило, неразрешимыми. Поэтому дальнейшее совершенствование различных вычислительных, в том числе и численных методов, является актуальным. Обобщая роль и значимость вычислительных методов изучения механических процессов, отметим, что для неоднородного слоистого массива горных пород получение решений с высокой точностью затруднительно. Поэтому решение задач геомеханики должно строится на комбинации различных аналитических и численных методов, ибо их сочетание может

обеспечить точность решения и достоверность научных исследований.

Для количественного описания какого-либо физического явления, в том числе и в геомеханике, обычно вводится в рассмотрение математическая модель с системой обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливая в определенной области, с соответствующими краевыми и начальными условиями. На этой стадии математическая модель замкнута, и для ее дальнейших практических применений требуется найти решение. При этом и возникают основные вычислительные трудности, так как точное решение не всегда удается получить даже с привлечением современных математических методов. Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться мощным средством вычислений – ПК, поставленная задача преобразуется к чисто алгебраической форме, реализация которой включает только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации. Среди различных возможных видов дискретизации поставленной задачи одним из простых и эффективных приемов является переход к методу конечных разностей (МКР).

При математическом моделировании физических задач часто приходится иметь дело с нелинейностью [1]. Аналитические методы решения линейных задач, как правило, не применимы к нелинейным, а метод конечных разностей без каких-либо значительных модификаций может быть использован и для решения нелинейных задач.

Многими исследователями достаточно эффективно применяются программные продукты, основанные на методе конечных разностей. Одним из таких продуктов является программный пакет FLAC, разработанный в США компанией «Itasca Consulting Group». Этот пакет модифицируется с 1986 г. и является одним из самых мощных и широко распространенных геомеханических пакетов в современной горной практике. За основу в этой вычислительной программе взят метод конечных разностей, что позволило получить решение многих важных геомеханических задач.

К недостаткам вычислительных программ, в том числе и программного пакета FLAC, можно отнести отсутствие обоснований применяемого математического аппарата, заложенного в программе. Отметим также и достаточно сложный интерфейс, не позволяющий инженерам быстро овладеть техникой решения задач геомеханики с помощью данной программы. К тому же использование данной программы предполагает рассмотрение задач только в пределах действия линейного закона Гука (глубины заложения выработок 200-300 м). Для глубин 800 м и более, где процесс деформирования горных пород уже не подчиняется линейному закону Гука, необходимы модернизация и улучшение вычислительных средств для решения задач геомеханики в рамках нелинейного закона деформирования горных пород.

Среди численных методов, помимо МКР, широко также известны метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и другие, которые получают все большее распространение в инженерной и научной среде при повсеместном распространении мощной вычислительной техники. Эффективное применение указанных методов для решения важных прикладных задач геомеханики напрямую зависит от разработки вычислительных универсальных программ и их реализации на ЭВМ [2].

В настоящее время широкую известность получил среди механиков-прикладников метод конечных элементов. Этот метод относится к числу вариационно-разностных методов. В нем осуществляется дискретизация области, занимаемой телом, на конечные элементы. Для плоских фигур чаще всего это треугольники и параллелограммы, а для пространственных – тетраэдры и параллелепипеды. Внутри каждого элемента задаются функции формы, которые определяют перемещения произвольной точки внутри элемента по перемещениям узловых точек (точки стыковки конечных элементов). Координатные функции, в этом случае, будут всюду равны нулю, кроме конечного элемента, внутри которого

они будут совпадать с функциями формы. В качестве неизвестных коэффициентов берутся узловые перемещения. Далее задача сводится к чисто алгебраической форме (процесс минимизации функционала энергии), т.е. к алгебраической системе уравнений.

Метод конечных элементов, хотя и является в настоящее время эффективным методом исследования НДС конструкций разнообразных форм, имеет существенный недостаток. Проверка надежности полученных на его основе результатов пока осуществляется только их сопоставлением с точными или известными решениями. По сути МКЭ сводится к аппроксимации сплошной среды с бесконечным числом степеней свободы совокупностью подобластей (или элементов), имеющих конечное число степеней свободы. Затем между этими элементами каким-либо способом устанавливается взаимосвязь. Таким образом, МКЭ представляет собой попытку преодолеть трудности, связанные с проблемой сплошности среды (получение численного решения задач теории упругости в этом случае весьма затруднительно), путем его разбиения на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в выбранных (узловых) точках. В этих точках вводятся фиктивные силы, эквивалентные поверхностным напряжениям, распределенные по границам элементов. Если такая идеализация допустима, то любая задача сразу приводит исследователя к стандартной задаче строительной механики, а техника решения таких задач хорошо известна многим инженерам.

На основе МКЭ был разработан и реализован алгоритм численного решения задач теории упругости на основе вариационного принципа Лагранжа. Задача с помощью метода конечных элементов сводится к определению узловых перемещений при заданном внешнем давлении на контур исследуемой выработки. Сравнение результатов расчета по разработанной вычислительной программе и по другим методам указывает на их вполне пригодную сопоставимость.

Так же как и метод конечных разностей, метод конечных элементов позволяет решать нелинейные задачи (в нашем случае учитывается только физическая нелинейность). В реализованной на ЭВМ программе, это делается достаточно просто, нужно лишь задать вид упругого потенциала Π, определяющего связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij}, и организовать общий итерационный процесс.

Критерием выбора вида упругого потенциала является адекватность математического описания процесса деформирования реальному поведению массива горных пород. Предпочтение при конкретном выборе потенциала отдается, как правило, потенциалу наиболее простой формы. На практике, чаще всего используют представление потенциала Π по степеням его инвариантов.

В настоящее время удалось получить аналитические или численные решения лишь для плоских задач (рис.1-5), которые всегда выделяются отдельно, так как, во-первых, они уже в первом приближении могут быть примером успешного применения численных методов; во-вторых, решение плоских краевых задач геомеханики имеет значительные математические упрощения, по сравнению с пространственными; в-третьих, существующие точные аналитические решения ряда двумерных задач позволяют оценить эффективность и точность самих численных методов.

Для выработок различной геометрии определяются компоненты указанных полей, и выполняется оценка необходимых параметров крепи или оценка устойчивости незакрепленных сечений (рис.1). Аналогичные задачи решаются для условий заложения выработки в неоднородном массиве с возможностью дифференцированной оценки компонентов в почве, кровле и боках выработки (рис.2). При исследовании напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки, пройденной в неоднородном массиве, может быть решена задача о пучении почвы в выработку и дана оценка возможной интенсивности развития этого процесса в зависимости от сочетания механических характеристик вмещающего массива E_{i+1}, ν_{i+1} и E_i, ν_i, где E_i è E_{i+1} – модуль упругости слоев i и $i + 1$; ν_i и ν_{i+1} – коэффициент Пуассона слоев i и $i + 1$.

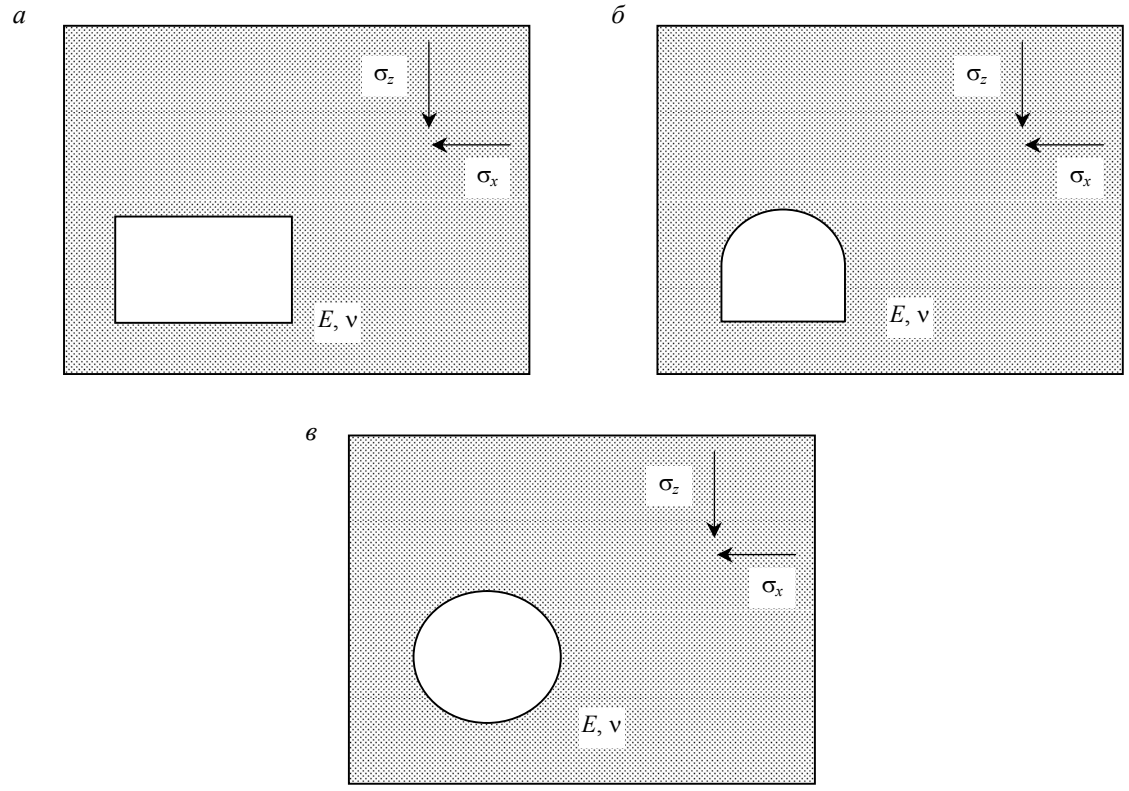


Рис.1. Однородный массив горных пород, вмещающий подземную горную выработку прямоугольного (*а*), арочного (*б*) и кругового (*в*) сечения

σ_x и σ_z – напряжение по соответствующим осям

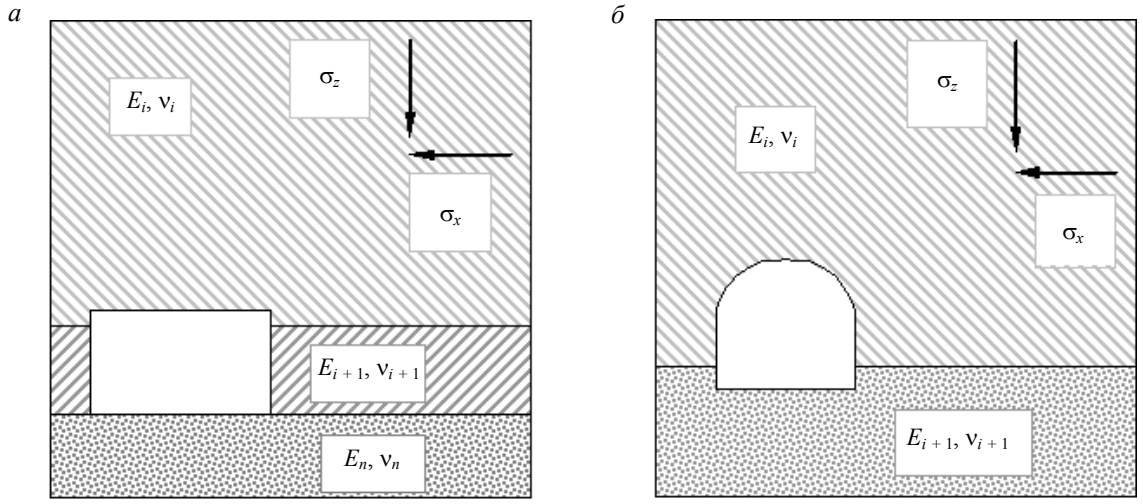


Рис.2. Неоднородный массив горных пород, вмещающий подземную горную выработку прямоугольного (*а*) и арочного (*б*) сечения

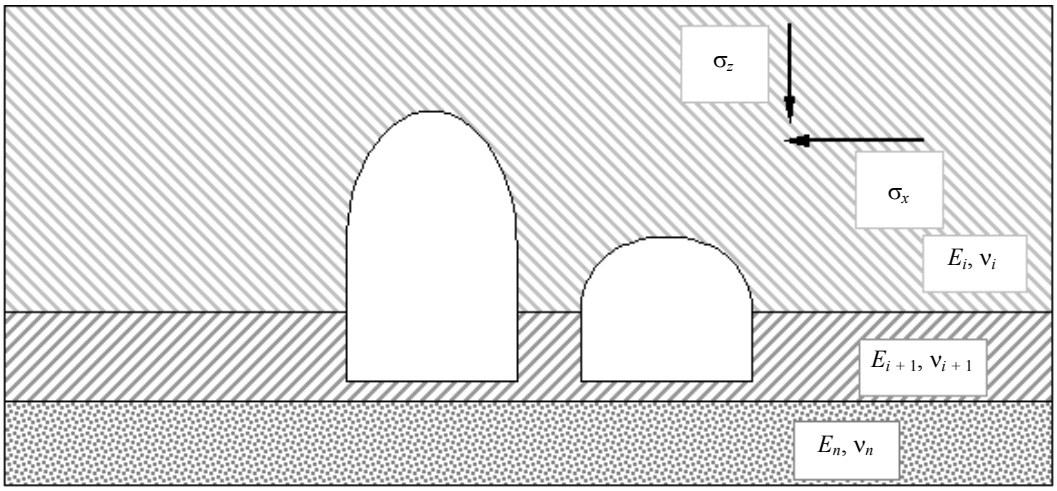


Рис.3. Неоднородный слоистый массив с «разгружающей выработкой»

Актуальной является задача выбора необходимых параметров щели, с доведением ее до инженерных зависимостей применительно к неоднородному массиву.

В качестве щели рассматривается проходка в зоне защищаемой выработки «разгружающей выработки», изменяющей компоненты напряжений σ_{ij}, деформаций ε_{ij} и смещений u, ν è w по координатным осям x, y и z соответственно в окрестности первого объекта (рис.3).

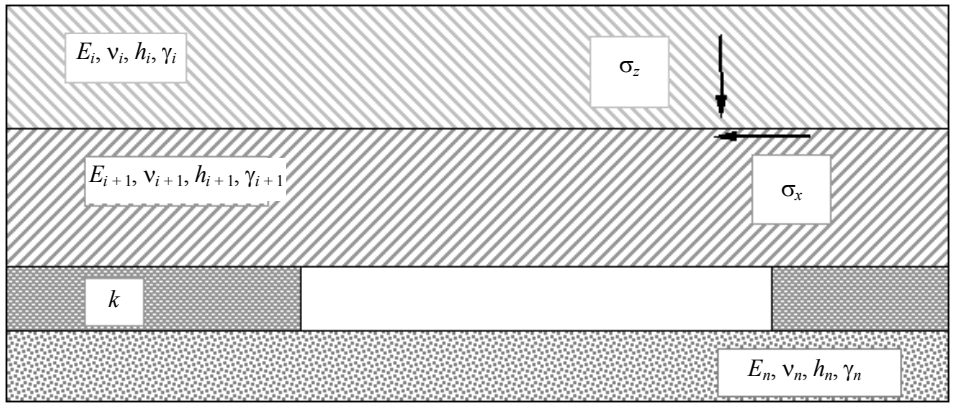
Широкий круг проблем управления механическими процессами в массиве горных пород связан с очистными выработками и следствием выемки полезного ископаемого из недр – наличием в пределах выемочных участков выработанных пространств. Решаемые здесь задачи геомеханики позволяют не только обеспечивать безопасность работ в таких забоях, но определяют и выбор оптимальных технологических решений. Отмеченное достигается исследованием НДС пород непосредственной и основной кровли пластов, представленной неоднородными элементами массива. Исследуются также НДС призабойных зон пласта, определяющие условия управления состоянием массива непосредственно в лаве и эффективность выемки полезного ископаемого добычными комплексами (рис.4).

Для условий эксплуатации различных пластовых месторождений практическую значимость имеют решения по оценке эффекта влияния неотработанной части пласта на расположенные в прилегающей к этой зоне конструктивные элементы массива (систему целиков и выработок). Правильная оценка геомеханической ситуации в данном случае (рис.5) будет обеспечивать необходимую эффективность принятия проектных решений, определяющих, в том числе, и оптимизацию технологических показателей шахты (рудника).

Круг задач, требующих для своего решения применения численных подходов и методов, не ограничивается только рассмотренными выше схемами. Однако последние достаточно полно отражают значимость получения аналитических или численных решений для условий пологих месторождений полезных ископаемых.

Однако реальное поведение массива в условиях увеличения глубины отработки и постоянно усложняющихся горно-геологических условий приводят исследователя к необходимости решения задач в трехмерной и четырехмерной (с учетом динамических явлений) постановках. Несмотря на сложность получения решений в этих случаях, метод конечных элементов может также оказаться эффективным. Отметим, что в геомеханике, как правило, не рассматривается геометрическая нелинейность, учет которой необходим во многих случаях горного производства. Метод конечных элементов является настолько универсальным, что позволяет преодолевать и эту трудность [3].

а



б

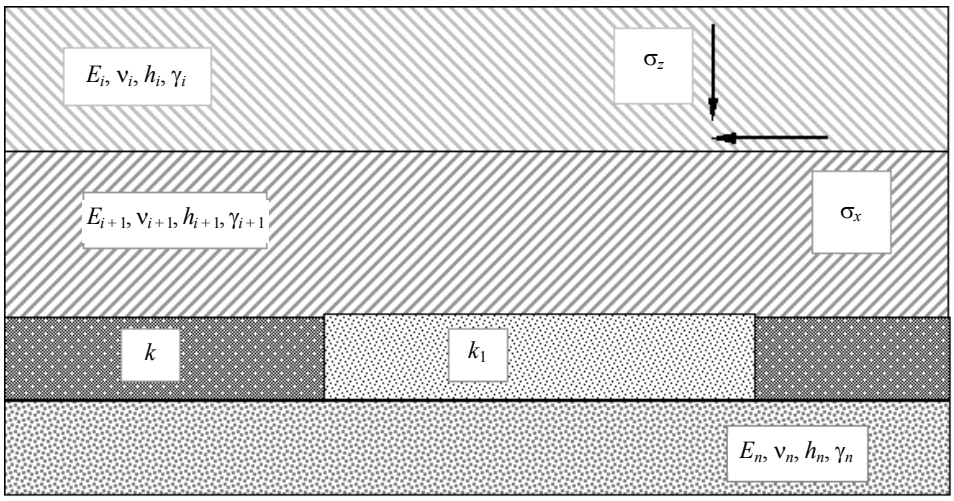


Рис.4. Неоднородный слоистый массив в зоне влияния выработанного пространства без закладки (*а*) и с закладкой (*б*)

h – мощность слоя; γ – объемный вес пород; k и k_1 – коэффициенты жесткости упругого основания и закладки соответственно

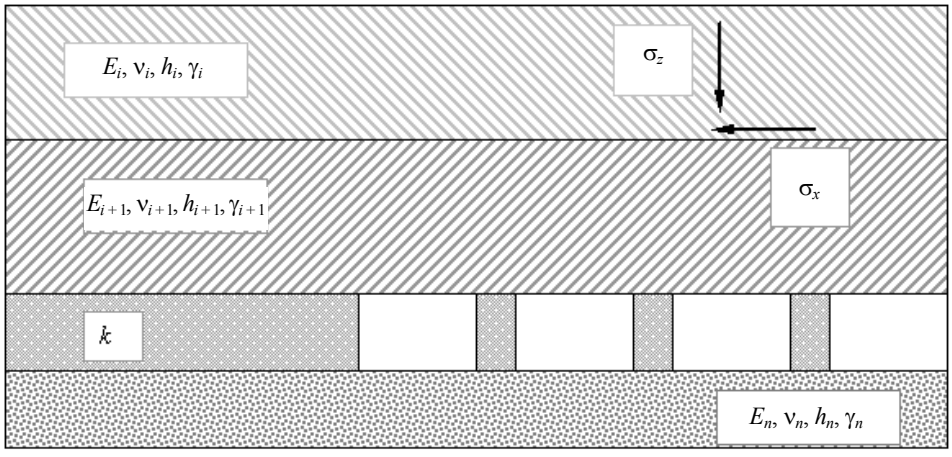


Рис.5. Неоднородный слоистый массив горных пород в зоне влияния неотработанного участка пласта

Таким образом, применение универсальных численных методов: метода конечных элементов и метода конечных разностей – и разработка эффективных вычислительных программ в прикладном аспекте позволяет не только своевременно предотвращать опасные проявления горного давления в выработках, но и позитивно решать вопросы безопасности ведения горных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений / Санкт-Петербургский горный ин-т. СПб, 1999. 127 с.

2. *Zatsepin M.* Development of mathematical models to assess stress and strain state in rock massifs containing mining openings // Materialy XLVI Sesji Pionu Gorniczego, Krakow, 2005. P.99-100.

3. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol.2. Solid Mechanics. N-Y, 2000. P.312-364.

REFERENCES

1. *Gospodarikov A.P.* The method of the computation of the nonlinear problems of massif rocks. Saint Petersburg, 1999. 127 p.

2. *Zatsepin M.* Development of mathematical models to assess stress and strain state in rock massifs containing mining openings // Materialy XLVI Sesji Pionu Gorniczego, Krakow, 2005. P.99-100.

3. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol.2. Solid Mechanics. N-Y, 2000. P.312-364.