УДК 528.48 (075.8)

ШАХИН АЛИ ФУАД, *аспирант*, *kmd@spmi.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный институт (*технический университет*)

SHAHEEN ALI FUAD, *post-graduate student*, *kmd@spmi.ru*,
Saint Petersburg State Mining Institute (*Technical University*)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ И УРАВНИВАНИЯ СЕТИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Представлен математический аппарат решения линейной засечки для развития сетей трилатерации в условиях г. Хеврон (Палестина). Предложен алгоритм уравнивания и оценки точности вставленных в сеть пунктов. Используя алгоритмы решения линейной засечки, уравнивания и оценки точности вставленных пунктов, написана программа, автоматизирующая эти процедуры. Показано практическое применение этой программы.

Ключевые слова: спутниковые измерения, трилатерация, решение линейной засечки, уравнивание, оценка точности, среда программирования.

SOFTWARE OF AUTOMATION OF THE DECISION OF THE LINEAR NOTCH AND EQUALIZING OF NETWORK TRIANGULATION WITH MEASURED LENGTHS

The mathematical apparatus of the decision of a linear notch for development of networks triangulation with measured lengths in the conditions of Hebron (Palestin) is presented. The algorithm of equalizing and an estimation of accuracy of the points inserted into a network is offered. Using algorithms of the decision of a linear notch, equalizing and an estimation of accuracy of the inserted points, the program automating these procedures is written. Practical application of this program is shown.

Key words: satellite measurements, triangulation with measured lengths, the decision of a linear notch, equalizing, accuracy estimation, the programming environment.

Поскольку на использование спутникового метода создания плановой основы со стороны органов безопасности Израиля наложены ограничения, то при топографическом картографировании города Хеврон (Палестина) [5] плановая основа создавалась и развивается методом трилатерации. Этот метод выбран не случайно, так как из всех существующих неспутниковых методов он наиболее адаптирован к применению современных геодезических средств измерений, таких как электронные тахеометры.

Вследствие того, что реальное расположение пунктов сети трилатерации относится к закрытой информации, изложение материала основывается на макете фрагмента сети трилатерации в форме центральной системы (рис.1). Сеть включает 5 треугольников. Определяемыми точками являются 1, 2, 3, а исходными пунктами 4, 5, 6. Исходный базис R между пунктами 4, 5. В сети измерено 9 сторон (рис.1). Предложенная нумерация диктуется требования разработанного программного продукта, предназначенного для уравнивания и оценки точности сети трилатерации.

В общем случае при измерении $n(i = 1, 2 \ldots n)$ расстояний S_i для нахожде-

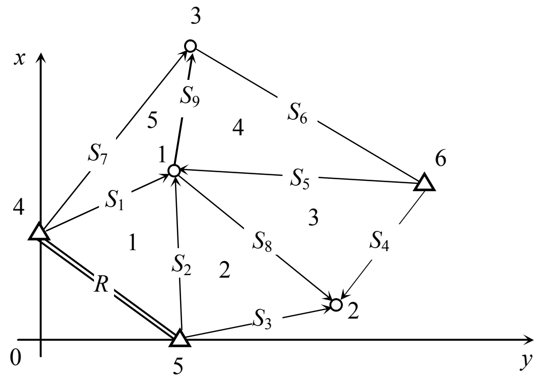

Рис.1. Фрагмент сети трилатерации

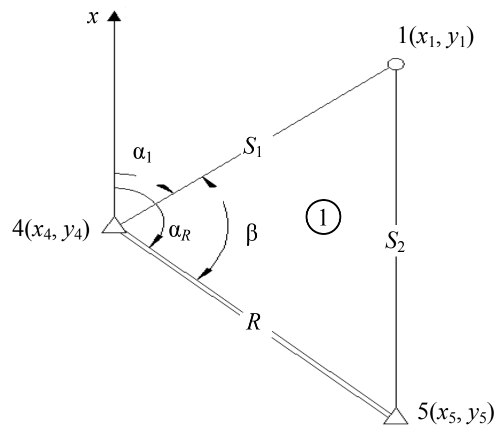

Рис.2. Схема линейной засечки

ния плановых координат определяемых точек $N(j = 1, 2\ldots n)$ при условии $(n \geq 2N)$ система уравнений поправок $\delta xj, \delta yj$ к приближенным значениям координат $\bar{x}_j, \bar{y}_j$ определяемых точек в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 ... g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 ... g_2 & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n ... g_n & h_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \ldots \\ \delta x_N \\ \delta y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \ldots \\ \nu_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$FX + L = V,$$

где F – матрица коэффициентов поправок; X – матрица поправок к приближенным значениям координат определяемых точек; L – матрица свободных членов с элементами $l_i = S_i^{\text{изм}} - S_i^{\text{выч}}$ ($S_i^{\text{выч}}$ находятся с использованием приближенных координат определяемых точек); V – матрица поправок к измеренным расстояниям.

Приближенные координаты определяемых точек вычисляются путем решения линейной засечки. Существует большое число вариантов решения линейной засечки на плоскости [1-4].

Рассмотрим алгоритм решения линейной засечки на примере треугольника 1 (рис. 2), где исходными пунктами являются 4 и 5, а определяемой точкой 1. Путем преобразования известной формулы $\cos$ угла в соответствии с рис.2 получим

$$\beta = \arccos \frac{1}{2}\left(\frac{R}{S_1} + \frac{S_1}{R} - \frac{S_2}{S_1}\frac{S_2}{R}\right). \quad (2)$$

Здесь S_1, S_2 – измеренные линии, приведенные на плоскость; $R = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$ – базис между исходными пунктами; $\alpha_R = \operatorname{arctg}\frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$ – дирекционный угол базиса R (рис. 2).

Координаты определяемой точки 1 находятся по алгоритму:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} \cos(\alpha_L - \beta) \\ \sin(\alpha_L - \beta) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Алгоритм решения линейной засечки реализован в программном продукте, написанном на языке GW Basic B68. Используя эту программу, вычислим координаты определяемых точек. В программе предусмотрено за левый и правый пункты считать пункты, находящиеся соответственно в левом и правом положении исходной базы, с известными координатами левого (Л) и правого (П) пунктов относительно определяемой точки. Соответственно обозначаются левое и правое измеренные расстояния. При этом точки, координаты которых уже определены, могут быть использованы в качестве исходных пунктов для последующих вычислений. Для определения точек 1, 2, 3 (рис.1), используются следующие условные данные: координаты исходных пунктов 4, 5, 6 (табл.1) и измеренные расстояния $S_1 - S_9$ (табл.2).

Таблица 1

Координаты исходных пунктов

Номер пункта	x, м	y, м
4	2000,000	0,000
5	0,000	2000,000
6	3265,000	5000,000

Таблица 2

Измеренные расстояния

Номер пункта	S, м	Номер пункта	S, м
1	2180,000	6	4228,250
2	3272,727	7	4376,300
3	2236,050	8	3174,755
4	2475,930	9	2735,000
5	3224,600		

В табл.3 приведены номера определяемых точек, номера исходных пунктов (точек с известными координатами) (Л и П) и номера расстояний (Л и П), используемых для вычисления координат точек 1, 2, 3.

Таблица 3

Номера исходных пунктов

Номер определяемой точки	Номер исходного пункта (точки с известными координатами)		Номер расстояния	
	Л	П	Л	П
1	4	5	1	2
2	1	5	8	3
3	4	1	7	9

В табл.4 приведены приближенные координаты определяемых точек.

Таблица 4

Приближенные координаты точек

Номер точки	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1	3265,013	1775,421
2	999,978	3999,991
3	6000,013	1775,359

В нашем случае в соответствии с рис.1 имеем: $n = 9$, $N = 3$.

Выполним уравнивание под условием:

$$[pvv] = V^T PV = \min .$$

Здесь

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & p_n \end{bmatrix},$$

$p_i = c / m_{S_i}^2$ – вес измерения расстояния, выполненного с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой $m_{S_i}^2$, устанавливаемой по формуле:

$$m_{S_i} = k_1 = k_2 \cdot 10^{-3} \cdot S_i ,$$

где k_1, k_2– константы для используемого электронного тахеометра; $c = \text{const}$.

Найдем систему нормальных уравнений, соответствующую системе уравнений поправок (1)

$$\begin{bmatrix} [paa][pab]..[pag][pah] \\ [pab][pbb]..[pbg][pbh] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [pag][pbg]..[pgg][pgh] \\ [pah][pbh]..[pgh][phh] \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \dots \\ \delta x_N \\ \delta y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \dots \\ [pgl] \\ [phl] \end{bmatrix} = 0 \cdot \qquad (4)$$

$$F^T PFX - F^T PL = 0$$

Решив систему уравнений (4) относительно искомых поправок, получим:

$$\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \dots \\ \delta x_N \\ \delta y_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} \; Q_{x_1y_1} \dots Q_{x_1x_N} \; Q_{x_1y_N} \\ Q_{x_1y_1} \; Q_{y_1y_1} \dots Q_{y_1x_N} \; Q_{y_1y_N} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_{x_1x_N} \; Q_{y_1x_N} \dots Q_{x_Nx_N} \; Q_{x_Ny_N} \\ Q_{x_1y_N} \; Q_{y_1y_N} \dots Q_{x_Ny_N} \; Q_{y_Ny_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \dots \\ [pgl] \\ [phl] \end{bmatrix};$$

$$X = -QF^T PL ,$$

где

$$\begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} & \cdots Q_{x_1x_N} & Q_{x_1y_N} \\ Q_{x_1y_1} & Q_{y_1y_1} & \cdots Q_{y_1x_N} & Q_{y_1y_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{x_1x_N} & Q_{y_1x_N} & \cdots Q_{x_Nx_N} & Q_{x_Ny_N} \\ Q_{x_1y_N} & Q_{y_1y_N} & \cdots Q_{x_Ny_N} & Q_{y_Ny_N} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [paa][pab]\ldots[pag][pah] \\ [pab][pbb]\ldots[pbg][pbh] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [pag][pbg]\ldots[pgg][pgh] \\ [pah][pbh]\ldots[pgh][phh] \end{bmatrix}^{-1},$$

$Q = (A^T PA)^{-1}$ – матрица весовых коэффициентов

Таким образом, в соответствии с (1) имеем:

$$V = FX + L.$$

Уравненные значения координат определяемых точек

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \ldots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \ldots \\ \bar{x}_N \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \ldots \\ \delta x_N \\ \delta y_N \end{bmatrix}.$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса определяется по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2N}} = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-2N}}.$$

Средняя квадратическая ошибка координат определяемых точек

$$m_{x_i} = \mu\sqrt{Q_{x_ix_i}};\, m_{y_i} = \mu\sqrt{Q_{y_iy_i}}.$$

Средняя квадратическая ошибка планового положения точки определяется по формуле:

$$M_i = \mu\sqrt{Q_{x_ix_i} + Q_{y_iy_i}} = \sqrt{m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2}.$$

Алгоритм уравнивания и апостериорной оценки точности сети трилатерации реализован в программном продукте B9fb написанном на языке GW-Basic. Для начала работы программы необходимо набрать команду RUN или нажать клавишу F2. На экране индицируется название программы. Далее, вводится информация по характеристике сети: число определяемых точек и исходных пунктов, число измеренных расстояний, коэффициенты k_1 и k_2, характеризующие точность измеренных расстояний. Для каждого исходного пункта вводится номер и плоские прямоугольные координаты. Далее, вводятся номера и значения измеренных расстояний. В программе предусмотрен ввод заранее вычисленных значений приближенных координат определяемых точек или их вычисление путем решения линейных засечек. Введенная информация хранится в файле. При выводе информации имеется возможность ее контроля и исправления с клавиатуры. По окончании счета введенная информация и полученные результаты выводятся на монитор, а также могут быть выданы на печать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аксамитов П.Г.* О вычислении координат по измеренным расстояниям //Геодезия и картография. 1962. № 2. С.16-19.
2. *Баландин В.Н.* Решение геодезических и маркшейдерских задач на микрокалькуляторах / В.Н.Баландин, В.М.Кладовиков, А.А.Охотин. М.: Недра, 1992. 128 с.
3. *Полевой В.А.* Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений. М.: Недра, 1971. 342 с.
4. *Проворов К.Л.* Радиогеодезия / К.Л.Проворов, Ф.П.Носков. М.: Недра, 1973. 352 с.
5. *Шахин Али Фуад.* Создние топографического плана г.Хеврон с целью проектирования единой канализационной сети города // Труды Международной научно-практической конференции «Современные проблемы инженерной геодезии». ПГУПС. СПб, 2010. С. 186-189.

REFERENCES

1. *Aksamitov P.G.* About calculation of coordinates on the measured distances // Geodesy and cartography. 1962. N 2. P.16-19.
2. *Balandin V.N.* Decision geodetic and mine surveying problems on microcalculators / V.N.Balandin, V.M.Kladovikov, A.A.Ohotin. Moscow: Nedra, 1992. 128 p.
3. *Polevoy V.A.* Mathematical processing of results of radio geodetic measurements. Moscow: Nedra, 1971. 342 p.
4. *Provorov K.L.* Radiogeodesy / K.L.Provorov, F.P.Noskov. Moscow: Nedra, 1973. 352 p.
5. *Shaheen Ali Fuad.* Create the topographical plan Hebron for the purpose of designing of a uniform sewer network of a city // Works the international scientifically-practical conference «Modern problems of an engineering geodesy»/ Saint Petersburg: The St.-Petersburg state university of tracks of the message, 2010. P. 186-189