УДК 519.85

А.П.ГОСПОДАРИКОВ, *д-р техн. наук, профессор, kafmat@spmi.ru*
К.В.ЯКОВЛЕВА, *студентка, kasper4@yandex.ru*
Санкт-Петербургский государственный горный университет

A.P.GOSPODARICOV, *Dr. in eng. sc., professor, kafmat@spmi.ru*
K.V.YAKOVLEVA, *student, kasper4@yandex.ru*
Saint Petersburg State Mining University

МИНИМИЗАЦИЯ СТОИМОСТИ ПЕРЕВОЗОК ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ ГРУППЫ КАРЬЕРОВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ОБОГАТИТЕЛЬНЫМ ФАБРИКАМ

Алмаз по сравнению с другими минералами является особым драгоценным камнем, а также техническим сырьем. Коренными алмазоносными месторождениями ГРО «МИБА» являются кимберлитовые трубки. Оценка целесообразности открытой разработки их группой карьеров в современной экономической ситуации является актуальной научной задачей. Для решения данной проблемы необходимо учитывать возможности минимизации транспортных затрат для обеспечения сырьем несколько обогатительных фабрик.

Ключевые слова: математическое программирование, линейное программирование, оптимизируемая функция, область определений, теорема Вейерштрасса, транспортная задача, метод наименьшей стоимости, метод потенциалов, базисные и опорные клетки, цикл пересчета.

MINIMIZATION OF COST OF TRANSPORTATIONS AT DISTRIBUTION OF CAPACITIES OF GROUP OF OPEN-CAST MINES ON VARIOUS CONCENTRATING FACTORIES

Diamond is special mineral in comparison with others. Diamond is a precious stone and also technical raw material. Native diamond deposits of GRO «MIBA» are kimberlitic pipes. Assess the expediency of cut mines of them by group of open-cast mines in modern economic situation is urgent scientific task. For solving this problem it is necessary to take into account the possibilities of minimization of transport expenses to provide some concentrating mills with raw materials.

Key words: mathematical programming, linear programming, optimized function, domain definitions, the Weierstrass theorem, the transportation problem, the method of least cost method of potentials, the basis and supporting cells, the cycle of conversion.

Интенсивная разработка отдельных коренных алмазоносных месторождений Бакванга в настоящее время является одной из наиболее актуальных проблем конголезского горно-рудного общества (ГРО) «МИБА». Это связано с тем, что запасы россыпных алмазоносных месторождений практически закончились и поэтому компания переживает спад. Производительная мощность снизилась с 7,2 млн карат в 2004 г. до 2,8 млн карат в 2007 г. В районе Бакванга насчитывается 13 кимберлитовых трубок. При обосновании целесообразности разработки их группой карьеров, необходимо также решить вопросы минимизации транспортных затрат для обеспечения сырьем несколько обогатительных фабрик.

Минимизацию стоимости перевозок при распределении производственных мощностей группы карьеров по различным обогатительным фабрика целесообразно осуществлять с помощью решения транспортной задачи линейного программирования (ЛП).

Таким образом, имеется реальная практическая задача, все данные для которой были взяты из документации ГРО «МИБА». Результаты, полученные при решении данной задачи, могут быть использованы для обоснования целесообразности разработки отдельных коренных алмазоносных месторождений Бакванга.

Рассматриваемая транспортная задача о планировании перевозки грузов является частным случаем задачи ЛП (целевая функция $f(\bar{x})$ и функции ограничений $g(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ являются линейными). Математически такие задачи могут быть сформулирована следующим образом.

В пунктах P_1, P_2, …, P_m производится некоторый продукт соответственно в количестве a_1, a_2, …, a_m ($a_i \geq 0$), который следует доставить в пункты Q_1, Q_2, …, Q_n в количестве b_1, b_2, …, b_n ($b_j \geq 0$). Стоимость перевозки единицы продукта из пункта P_i в пункт Q_j равна $c_{ij} \geq 0$, т.е. транспортные расходы задаются матрицей стоимостей $C = (c_{ij})_{mn}$; $x_{ij} = 0$ – количество продукта, перевозимого из пункта P_i в пункт Q_j (план перевозок), задается матрицей $X = (x_{ij})_{mn}$. Тогда соответственно суммарные транспортные расходы

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \qquad (1)$$

Полученную целевую функцию требуется минимизировать при условии удовлетворения потребностей для любого пункта потребления Q_j ($\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j$) и ограничении производства при вывозе из любого пункта производства P_i ($\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_i$).

Таким образом, окончательно имеем постановку транспортной задачи в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_i. \qquad (2)$$

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы в пунктах отправления были равны потребностям в пунктах назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (3)$$

т.е. транспортная задача должна быть закрытого типа.

Если условие (3) не выполняется, то модель транспортной задачи открытого типа, хотя может быть сведена к задаче закрытого типа* введением фиктивного потребителя Q_{n+1} ($\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$), потребность которого определяется по формуле

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (4)$$

или введением фиктивного поставщика P_{m+1} ($\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$), производство которого определяется по формуле

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i. \qquad (5)$$

Таким образом, имеем постановку транспортной задачи в стандартной форме:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \ 1 \leq i \leq m;$$

$$1 \leq j \leq n.$$

---

* *Карпелевич Ф.И.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф.И.Карпелевич, Л.Е.Садовский. М., 1965.

Karpelevich F.I., Sadovskii L.E. Elements of linear algebra and linear programming, Moscow, 1965.

Поскольку транспортная задача является задачей ЛП, то она может быть решена симплекс-методом. Однако система ограничений транспортной задачи имеет ряд особенностей, позволяющих решать ее более рациональным способом – путем преобразований транспортной таблицы (табл.1)

Таблица 1

Транспортная таблица

Поставщики	Потребители				Производство
	Q_1	Q_2	…	Q_n	
P_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
P_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
P_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

В нашем случае решение транспортной задачи сводится к оптимальному распределению руды первой группы карьеров по трем обогатительным фабрикам ГРО «МИБА». На карьерных трубках «Массив 2» и «Массив 5» имеются запасы в размерах соответственно 1811404 и 2130596 м^3. Далее этот продукт следует доставить на три обогатительные фабрики (НКЛ 1, НКЛ 2, ДИЗЕЛЕ) ГРО «МИБА» в количествах соответственно 1533000, 1752000 и 657000 м^3. Матрица стоимостей перевозки имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}267 & 0{,}274 & 0{,}366 \\ 0{,}546 & 0{,}550 & 0{,}623 \end{pmatrix}.$$

Решение транспортной задачи начинаем с нахождения первого опорного плана перевозок. Количество базисных переменных $r = m + n - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ и количество свободных переменных $mn - r = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. В опорном решении свободные переменные в таблицу не записываются, а соответствующие пустые клетки таблицы называются свободными. Заполненные клетки таблицы соответствуют базисным переменным и называются базисными, или опорными клетками. Воспользуемся методом наименьшей стоимости и решим задачу методом потенциалов.

Для перехода от одного базиса к другому при решении транспортной задачи используются так называемые циклы. Циклом пересчета в таблице перевозок называется последовательность неизвестных, удовлетворяющая следующим условиям:

• одно из неизвестных последовательности свободное, а все остальные – базисные;

• каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке;

• три последовательных неизвестных не могут находиться в одном столбце или в одной строке.

Геометрическое изображение цикла – замкнутая ломаная из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев, одна из вершин которой находится в свободной клетке, а остальные – в базисных клетках (табл.2).

Далее построим следующий вариант опорного плана (табл.3) и т.д.

Таким образом, видно, что последний пересчет цикла (табл.4) возвращает нас к исходному варианту. Так как для каждой свободной клетки существует единственная замкнутая ломаная линия, то субоптимальным будет являться опорный план варианта 2 (табл.2).

Затраты на транспортировку 1, 2 и 3-го вариантов соответственно слудующие:

$$f(\bar{x}) = 0{,}267 \cdot 1533000 + 0{,}274 \cdot 278404 + 0{,}55 \cdot 1473596 + 0{,}623 \cdot 657000 = 1705382{,}496 \text{ долларов};$$

$$f(\bar{x}) = 0{,}267 \cdot 1533000 + 0{,}366 \cdot 278404 + 0{,}55 \cdot 1752000 + 0{,}623 \cdot 378596 = 1710672{,}172 \text{ долларов};$$

$$f(\bar{x}) = 0{,}267 \cdot 59404 + 0{,}274 \cdot 1752000 + 0{,}546 \cdot 1473596 + 0{,}623 \cdot 657000 = 1709803{,}284 \text{ долларов}.$$

Отметим, что оптимальное решение не всегда достижимо из-за ограничений ресурсов или уровня современной науки. В таком

Таблица 2

Опорный план. Вариант 1

Поставщики	Потребители			Производство
	ОФ № 1 $\beta_1 = 1533000$	ОФ № 2 $\beta_2 = 278404$	ОФ № 3 $\beta_3 = -538192$	
Карьер трубки «Массив 2» $\alpha_1 = 0$	0,267 $-Q$ 1533000	0,274 $+Q$ 278404	0,366 538191,634 –538192	1811404
Карьер трубки «Массив 5» $\alpha_2 = 1195192$	0,546 –2728191,454 $+Q$ 2728192	0,55 $-Q$ 1473596	0,623 657000	2130596
Потребность	1533000	1752000	657000	3942000

Таблица 3

Опорный план. Вариант 2

Поставщики	Потребители			Производство
	ОФ № 1 $\beta_1 = 59404$	ОФ № 2 $\beta_2 = 1752000$	ОФ № 3 $\beta_3 = -757192$	
Карьер трубки «Массив 2» $\alpha_1 = 0$	0,267 $-Q$ 59404	0,274 1752000	0,366 757191,634 $+Q$ –538192	1811404
Карьер трубки «Массив 5» $\alpha_2 = 1414192$	0,546 $+Q$ 1473596	0,55 –3166191,45 3166192 0	0,623 $-Q$ 657000	2130596
Потребность	1533000	1752000	657000	3942000

Таблица 4

Опорный план. Вариант 3

Поставщики	Потребители			Производство
	ОФ № 1 $\beta_1 = 1533000$	ОФ № 2 $\beta_2 = 1651808$	ОФ № 3 $\beta_3 = 278404$	
Карьер трубки «Массив 2» $\alpha_1 = 0$	0,267 1533000	0,274 –1651807,726 $+Q$ 1651808	0,366 $-Q$ – 278404	1811404
Карьер трубки «Массив 5» $\alpha_2 = 100192$	0,546 -1633191,454 1633192	0,55 $-Q$ 1752000	0,623 $+Q$ 378596	2130596
Потребность	1533000	1752000	657000	3942000

случае следует ограничиться субоптимальным решением, т.е. «достаточно хорошим».
Для подтверждения получения результатов транспортную задачу решили в таких вычислительных программах, как Microsoft Office Excel, MathCAD, Метод Северо-Западного угла. Хорошее совпадение с расчетами подтверждает корректность постановки задачи и достоверность полученных результатов.

Таким образом, результаты транспортной задачи обосновывают возможность сокращения затрат при разработке решения отдельных коренных месторождений группой карьеров ГРО «МИБА».