СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕХАНИКИ, ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА И ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ГОРНОМ ДЕЛЕ

PRESENT-DAY PROBLEMS OF GEOMECHANICS, MINING PRACTICE AND INNOVATION TECHNOLOGIES IN MINING ENGINEERING

УДК 624.121:550.3

А.П.ГОСПОДАРИКОВ, *д-р техн. наук, профессор*,
М.В.МАКСИМЕНКО, *аспирант, mig_sab@rambler.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

A.P.GOSPODARIKOV, *Dr. in eng. sc.., professor*,
M.V.MAKSIMENKO, *post-graduate student, mig_sab@rambler.ru*
National Mineral Resources University (University of Mines), Saint Petersburg

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ХАРАКТЕРА ПРОЦЕССА ИХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассмотрена нелинейная краевая задача об исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород вокруг одиночной горизонтальной протяженной выработки. Предложен алгоритм определения основных параметров НДС горного массива, включающий комплекс вычислительных методов.

Ключевые слова: физическая нелинейность, метод линеаризации Ньютона – Рафсона.

THE METHOD OF ANALYSIS STRESS-AND-STRAIN STATE OF A ROCK MASSIF WITH REGARD TO NONLINEAR CHARACTER OF STRAINING PROCESS

The nonlinear problem of analysis of the stress-and-strain state of rock massif is discussed. The numerical algorithm analysis of the stress-strain state of a massif, which includes a set of computational methods, is suggested.

Key words: physical nonlinearity, Newton – Raphson linearization method.

В связи с переходом подземных горных работ в основных угольных бассейнах страны на более глубокие горизонты значительно ухудшаются горно-геологические условия разработки пластов. На глубоких шахтах значительно увеличиваются расходы на ремонт, перекрепление подготовительных выработок, усложняются мероприятия по борьбе с опасными проявлениями горного давления, что в конечном итоге приводит к

значительному росту смещений горных пород вокруг выработок [1]. Поэтому, традиционные методы охраны объектов от вредных влияний горных работ в современных условиях все чаще становятся или неэффективными, или вовсе неприемлемыми. С практической точки зрения очень важно иметь представление о реальном распределении компонент тензоров напряжений и деформаций, а также вектора перемещений в массивах пород при наличии горных выработок различного назначения и очертания, целиков, с учетом выработанного пространства и т.д.

Получение аналитических решений в таких случаях ограничено, как правило, выбором простой физической модели среды (сплошная, изотропная и однородная) в рамках применимости линейного закона Гука и формой выработки (круглая). Математическое моделирование неоднородного породного массива, ослабленного одной или несколькими подземными выработками сложного очертания, а также учет нелинейного характера процесса деформирования горных пород, предполагает использование эффективных численных методов.

Проведение выработки с физической точки зрения представляет собой образование некоторой пространственной полости в массиве горных пород. Анализ геометрических параметров рассматриваемого объекта приводит к тому, что граничные поверхности последнего представляют собой многосвязные области, учет которых приводит к существенному усложнению процедуры нахождения решения рассматриваемой задачи. Установлено, что для выработок, располагающихся на достаточно большой глубине H, погрешность от замены реальных граничных условий (земная поверхность) на задачу с односвязным контуром (отверстие в тяжелой плоскости) быстро убывает с увеличением глубины залегания последних [1].

В работе принята физическая модель нелинейно-упругой среды (нелинейная связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций). Начальное поле напряжений в массиве горных пород формируется под действием гравитационных сил.

Отметим также, что для случая одиночной протяженной горизонтальной выработки, у которой длина во много раз превышает два других характерных размера (высоту и ширину), пространственная задача по определению основных параметров НДС массива горных пород может быть сведена к плоской.

Далее, учитывая, что фактическое влияние выработки на породный массив является локальным, а также тот факт, что если глубина заложения выработки H превышает десять радиусов выработки и более, собственный вес горных пород учитывается приложением распределенной нагрузки интенсивностью γH к границам исследуемой невесомой области (С.Г.Михлин).

Таким образом, математическая постановка плоской деформации массива горных пород, включающих выработку, сводится к следующему: рассматривается система разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие физически нелинейную деформацию массива, дополненную надлежащими граничными условиями. Рассматриваемую двумерную нелинейную краевую задачу запишем в единой векторной форме, удобной для изложения разработанного алгоритма численного решения. Введем в рассмотрение вектор-функции:

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}; \overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}; \overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Нелинейная краевая двумерная задача содержит восемь уравнений: два уравнения равновесия, три уравнения Коши (соотношения между компонентами тензора деформаций и компонентами вектора перемещений), а также три уравнения, устанавливающие соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций (в рамках принятого нелинейного физического закона). Тогда матричная запись разрешающих уравнений примет вид:

$$A^T \overline{\sigma} = 0; \overline{\varepsilon} = A\overline{u}; \overline{\sigma} = C\overline{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где A – дифференциальный оператор,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix};$$

матрица C определяется из нелинейных физических соотношений между компонентами тензоров напряжений и деформаций на основе кривой деформирования $\sigma - \varepsilon$. В частности, в работе используется закон, предложенный Бахом, связь между напряжениями и деформациями представлена в виде степенной зависимости $\sigma_i = B_i \varepsilon_i^{\alpha_i}$, где $B_i (i = 1,2,3)$ – коэффициенты деформирования, полученные экспериментальным путем, $\alpha_i \le 1$ [2].

Граничные условия, заданные в перемещениях на контуре выработки L и на границе области Γ, имеют вид

$$\overline{u} = \overline{u}_L, \quad \overline{u} = \overline{u}_\Gamma \qquad (2)$$

где $\overline{u}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ v_L \end{pmatrix}$, $\overline{u}_\Gamma = \begin{pmatrix} u_\Gamma \\ v_\Gamma \end{pmatrix}$.

Итак, исследование НДС массива горных пород, включающего выработку, сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) в частных производных при одновременном удовлетворении граничных условий (2) на контуре выработки и на границе рассматриваемой области.

В области $\Omega = X \times Y$, $X \in [0; a]$, $Y \in [0; b]$ ищутся вектор-функции основных

$$\overline{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

и дополнительных

$$\overline{W}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

неизвестных, которые всюду в области Ω удовлетворяют системе m дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\widetilde{A}\overline{V} = \overline{g}(\overline{V}, \overline{W}, x, y), x \in (0, a), y \in (0, b), \quad (3)$$

где $\widetilde{A}$ – дифференциальный оператор:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$\overline{g}(\overline{V}, \overline{W}, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix},$$

и ассоциированной с (3) системе p трансцендентных уравнений [3]:

$$\bar{f}(\overline{V}, \overline{W}, x, y) = 0, \qquad (4)$$

где $\bar{f}(\overline{V}, \overline{W}, x, y) = \begin{pmatrix} B_1 \varepsilon_x^{\alpha_1} - \sigma_x \\ B_2 \varepsilon_y^{\alpha_2} - \sigma_y \\ B_3 \gamma_{xy}^{\alpha_3} - \tau_{xy} \end{pmatrix}$.

Граничные условия задаются некоторой системой уравнений общего вида:

$$\overline{D}(\overline{V}_L, \overline{V}_\Gamma) = 0. \qquad (5)$$

Отметим, что в рассматриваемой постановке исходной задачи $m = 5, p = 3$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение, соответствующее системам (3)-(5) $T(\omega) = 0$. Под ω понимается вектор-функция $\overline{\omega}(x, y) = [\overline{V}(x, y), \overline{W}(x, y)]^T$, компоненты которой представляют собой непрерывные вместе с первыми частными производными ограниченные функции, заданные в области Ω.

Оператор $T(\omega)$, символизирующий дифференциальный оператор $\widetilde{A}$ (3) и левые части (4) и (5), является дифференцируемым по Фреше нелинейным оператором в банаховом пространстве E.

Используя метод линеаризации Ньютона – Канторовича, представим операторное уравнение в виде:

$$\begin{cases} T_1(\omega)\omega + T_2(\omega) = 0; \\ T_1(\omega) = T'_\omega(\omega), T_2(\omega) = T(\omega) - T'_\omega(\omega)\omega, \end{cases} \quad (6)$$

где T'_ω – производная Фреше нелинейного оператора $T(\omega)$.

Вводя индексы итерации n, n–1 в уравнение метода линеаризации (6), приходим к соотношению при каждом $n = 1, 2, \ldots$:

$$T'_\omega(\omega^{n-1})\omega^n + T(\omega^{n-1}) - T'_\omega(\omega^{n-1})\omega^{n-1} = 0.$$

Применяя метод линеаризации Ньютона – Канторовича к краевой задаче (3)-(5), получим:

$$\begin{gathered} \widetilde{A}\overline{V} = G_1(\overline{V}, \overline{W}, x, y)\overline{V} + \\ + G_2(\overline{V}, \overline{W}, x, y)\overline{W} + \overline{g}_1(\overline{V}, \overline{W}, x, y); \\ F_1(\overline{V}, \overline{W}, x, y)\overline{V} + F_2(\overline{V}, \overline{W}, x, y)\overline{W} + \\ + \bar{f}_1(\overline{V}, \overline{W}, x, y) = 0; \\ \overline{D}(\overline{V}_L, \overline{V}_\Gamma) = 0. \end{gathered}$$

Отметим, что, как правило, граничные условия, записанные в перемещениях, на контуре выработки L и на границе области Г описываются системой линейных алгебраических уравнений вида (5).

Окончательно, итерационный процесс метода линеаризации Ньютона – Канторовича запишется в виде

$$\begin{gathered} \widetilde{A}\overline{V}^n = G_1^{n\text{-}1}\overline{V}^n + G_2^{n\text{-}1}\overline{W}^n + \overline{g}_1^{\,n-1}; \\ F_1^{n\text{-}1}\overline{V}^n + F_2^{n\text{-}1}\overline{W}^n + \bar{f}_1^{\,n-1} = 0; \\ \overline{D}(\overline{V}_L, \overline{V}_\Gamma) = 0. \end{gathered} \quad (7)$$

В системе (7) через G_1^{n-1}, G_2^{n-1}, F_1^{n-1}, F_2^{n-1} обозначены матрицы Якоби от вектор-функций $\overline{g}(\overline{V}, \overline{W}, x, y)$, $\bar{f}(\overline{V}, \overline{W}, x, y)$ по тому векторному аргументу, который стоит множителем при данной матрице. Размерности этих матриц однозначно определяются размерностью искомых и заданных вектор-функций, присутствующих в уравнениях рассматриваемой краевой задачи.

Здесь и далее использованы сокращенные обозначения вида

$$\left.\begin{aligned} G_1^{n-1} &= G_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y); \\ F_1^{n-1} &= F_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y); \\ \overline{g}_1^{\,n-1} &= g_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y). \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} G_2^{n-1} &= G_2(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y); \\ F_1^{n-1} &= F_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y); \\ \bar{f}_1^{\,n-1} &= f_1(\overline{V}^{n-1}, \overline{W}^{n-1}, x, y). \end{aligned}$$

Здесь векторы $\overline{g}_1^{\,n-1}$, $\bar{f}_1^{\,n-1}$, согласно заданным системам уравнений (3)-(4), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \overline{g}_1^{\,n-1} &= \overline{g}^{\,n-1} - G_1^{n-1}\overline{V}^{n-1} - G_2^{n-1}\overline{W}^{n-1}; \\ \bar{f}_1^{\,n-1} &= \bar{f}^{\,n-1} - F_1^{n-1}\overline{V}^{n-1} - F_2^{n-1}\overline{W}^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность ω^n на каждом шаге итерации n определяется, как решение линейной краевой задачи, а с учетом необходимого для численной реализации перехода к соответствующей дискретной задаче (например, на основе метода конечных элементов) – из решения системы линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов И.В., Картозия Б.А., Шашенко А.Н., Борисов В.Н.* Геомеханика: Учебник для вузов. М., 2004. Т.2.249 с.

2. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие. М., 1978. 447 с.

3. *Господариков А.П.* Метод расчета нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений. СПб, 1999. 129 с.

REFERENCES

1. *Baklashov I.V., Kartoziya B.A., Shashenko A.N., Borisov V.N.* Geomechanics: Textbook for schools. Moscow, 2004. Vol.2. 249 p.

2. *Vyalov S.S.* Rheological basics of soil mechanics: Textbook for technical schools. Moscow, 1978. 447 p.

3. *Gospodarikov A.P.* The method of analysis of nonlinear problems of rock mechanics in underground mining of sheet deposits. Saint Petersburg, 1999. 129 p.