УДК 622.245.42: 622.248.3

А.А.ЯКОВЛЕВ, *д-р техн. наук, профессор, spmi@mail.wplus.net*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

A.A.YAKOVLEV, *Dr. in eng. sc., professor, spmi@mail.wplus.net*
National Mineral Resources University (University of Mines), Saint Petersburg

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРУТУР В СКВАЖИНЕ И ОКРУЖАЮЩЕМ ГОРНОМ МАССИВЕ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ ТАМПОНАЖНЫХ СМЕСЕЙ

Предложена математическая модель распределения температур в скважине и окружающем горном массиве, оценены условия надежного тампонирования скважин газожидкостными тампонажными смесями в мерзлых породах.

***Ключевые слова*:** скважина, газожидкостные тампонажные смеси, крепление скважины, мерзлые породы, растепление пород, затрубное пространство.

MATHEMATICAL MODEL OF THE DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN THE HOLE AND THE SURROUNDING MOUNTAIN RANGE WHEN APPLYING FOAMED CEMENTS

Proposed the mathematical model of temperature distribution in borehole and the surrounding mountain, evaluated conditions reliable capacity wells foamed cements in pavements, rock.

***Key words*:** well, foamed cements, tamponirovanie, thrown rocks, rasteplenie, zatrubnoe.

При сооружении скважин газожидкостные тампонажные смеси (ГЖТС) стали использовать с 1979 г. Газожидкостные тампонажные смеси, характеризующиеся малой проницаемостью [6], используют для разобщения и изоляции продуктивных малодебитных пластов истощенных нефтегазовых месторождений. Газожидкостные тампонажные смеси эффективны в широком диапазоне температур и солевой агрессии, они могут найти применение при сооружении скважин в районах распространения многолетнемерзлых пород. Газожидкостные тампонажные смеси позволяют получать цементный камень достаточной прочности (более 6,5 МПа) и меньше воздействуют на водочувствительные формации по сравнению с обычными тампонажными растворами. Благодаря применению газожидкостных тампонажных смесей снижается вероятность заколонных перетоков [5, 7].

Для работ в многолетнемерзлых породах, в дополнение к обычным требованиям к прочности тампонажного камня и низкой его проницаемости при малой плотности тампонажного раствора, приходится учитывать температурный режим в скважине. К сожалению, в технической литературе отсутствуют данные по предупреждению протаивания ледсодержащих горных пород под воздействием тепла, выделяемого газожидкостной тампонажной смесью при формировании кристаллической структуры тампонажного камня.

Растепление мерзлых пород происходит в том случае, когда температура газожидкостной тампонажной смеси $t_{гжтс} > 0$ °С [3, 4, 5, 7]. Следствием этого является сни-

жение качества изоляции затрубного пространства и возникновение перетоков флюидов в скважине, что нежелательно и даже опасно.

Исследование температурного поля горного массива при тампонировании скважин в мерзлых породах производилась с учетом следующих условий. В затрубное пространство скважины до высоты H закачена газожидкостная тампонажная смесь с температурой $t_{\text{гжтс}} > 0$ °С.

При его твердении выделяется тепло

$$Q = \overline{Q}(1 - \mathrm{e}^{a_t \tau}), \qquad (1)$$

где Q – полное тепловыделение твердеющей газожидкостной смеси, кДж/кг; a_t – параметр, характеризующий интенсивность и скорость тепловыделения, $с^{-1}$; τ – время, с.

Поскольку начальная температура $t_{\text{гжтс}} > 0$ °С и при твердении газожидкостной тампонажной смеси выделяется тепло, окружающие скважину породы начинают нагреваться. Очевидно, что при некоторых значениях входных параметров температура горного массива может достигать значения, при котором начинается протаивание мерзлых пород. Это может послужить причиной отказа схватывания газожидкостной тампонажной смеси. Поэтому важно знать, при каких значениях входных параметров не произойдет протаивания льдистых пород. Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно рассмотреть период времени до наступления их протаивания.

Предполагая, что область, занятая газожидкостной тампонажной смесью, имеет форму бесконечного цилиндра, математически задачу можно сформулировать следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_{\text{гжтс}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t_1}{\partial r}\right) + \frac{c_{\text{ц}}}{\mathrm{C}_{\text{гжтс}} \rho_{\text{гжтс}}} \overline{Q} \mathrm{a}_t \mathrm{e}^{-\mathrm{a}_t \tau}; \\
&0 < r < R_{\text{с}}; \quad \tau > 0; \\
&\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_{\text{п}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t_2}{\partial r}\right); \quad R_{\text{с}} < r < \infty
\end{aligned} \qquad (2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\tau = 0; t_1 = t_{\text{гжтс}}; t_2 = T_{\text{п}}; r = 0; t_1 < \infty; \\
&r = 1; t_1 = t_2; \lambda_{\text{гжтс}} \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_{\text{п}} \frac{\partial t_2}{\partial r}; \\
&r \to \infty; t_2 < \infty;
\end{aligned} \qquad (3)$$

где t_1, t_2 – температуры соответственно газожидкостной тампонажной смеси и горных пород, °С; $\lambda_{\text{гжтс}}, \lambda_{\text{п}}$ – коэффициенты теплопроводности газожидкостной тампонажной смеси и пород, Вт/(м·°С); $a_{\text{гжтс}}, a_{\text{п}}$ – коэффициенты температуропроводности газожидкостной тампонажной смеси и пород, $м^2/с$; $R_{\text{с}}$ – радиус скважины, м; $c_{\text{ц}}$ – содержание цемента в газожидкостной тампонажной смеси, $кг/м^3$; $C_{\text{гжтр}}$ – удельная теплоемкость газожидкостной тампонажной смеси, кДж/(кг·°С); $\rho_{\text{гжтр}}$ – плотность газожидкостной тампонажной смеси, $кг/м^3$; r – расстояние от оси скважины, м.

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}
&\theta_i = (t_i - T_{\text{п}})/(t_{\text{з}} - T_{\text{п}}), \ i = 1, \ 2; \\
&\theta_i = (t_{\text{гжтс}} - T_{\text{п}})/(t_{\text{з}} - T_{\text{п}}); \\
&Fo = a_{\text{п}} \tau / R_{\text{с}}^2; \quad b = a_t R_{\text{с}}^2 / a_{\text{п}}; \\
&R = r/R_{\text{с}}; \quad R_0 = R_{\text{к}}/R_{\text{с}}; \\
&Q = \omega \overline{Q} / [C_{\text{гжтс}} (t_{\text{з}} - T_{\text{п}})]; \\
&k_a = a_{\text{гжтс}} / a_{\text{п}}; \quad k_\lambda = \lambda_{\text{гжтс}} / \lambda_{\text{п}},
\end{aligned}$$

где τ – время, с; $t_{\text{гжтс}}, T_{\text{п}}$ – начальные температуры газожидкостной тампонажной смеси и пород, окружающих скважину, °С; $t_{\text{з}}$ – температура замерзания пород, °С; $\overline{Q}$ – полное количество тепла, выделяемое при твердении единицы массы тампонажной смеси, $Дж/м^3$; $R_{\text{к}}$ – радиус колонны труб, м; ω – массовая доля цемента в растворе,

$$\omega = \frac{1}{1 + m(1 + \alpha \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}})}, \qquad (4)$$

где m – водо-твердое отношение; α – степень аэрации газожидкостной тампонажной смеси; $\rho_{\text{г}}, \rho_{\text{ж}}$ – плотности газа и жидкости, $кг/м^3$.

Математическая модель (2, 3), записанная в безразмерных переменных, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial Fo}=\frac{k_a}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right)+Qb\mathrm{e}^{-bFo};\\
&R_0<R<1;\quad Fo>1;\\
&\frac{\partial\theta_2}{\partial Fo}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta_2}{\partial R}\right);\\
&1<R<\infty;\quad Fo>0;
\end{aligned}\tag{5}$$

при граничных условиях

$$Fo=0;\ \theta_1=\theta_{\text{гжтс}};\ \theta_2=0\quad R=R_0,\ \frac{\partial\theta_1}{\partial R}=0;$$

$$R=1,\ k_\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial R}=\frac{\partial\theta_2}{\partial R},\ \theta_1=\theta_2;\ \lim_{R\to\infty}\theta_2<\infty.$$

Рассматриваемая задача является линейной, следовательно, решение будем искать в виде

$$\theta_i=\theta_{\text{гжтс}}Y_i+QZ_i,\ i=1,\ 2.\tag{6}$$

Функция Y_i является решением задачи (5), если положить $\theta_{\text{гжтс}}=1$; $Q=0$, а z_i – решение той же задачи при условии, что $\theta_{\text{гжтс}}=0$; $Q=1$. Задачу (5) будем решать приближенно. Для этого введем среднюю температуру

$$\bar{\theta}_1=\frac{2}{1-R_0^2}\int_{R_0}^{1}R\theta_1 dR\tag{7}$$

и проинтегрируем по R первое уравнение системы (5). В результате получаем

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{dFo}=\frac{2k_a}{1-R_0^2}\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right|_{R=1}+Qb\mathrm{e}^{-bFo}.\tag{8}$$

Примем приближенно, что профиль температуры в газожидкостной тампонажной смеси описывается следующей функциональной зависимостью

$$\theta_i\cong C_0+C_1\ln R+C_2R^2;\ R_0\le R\le 1.\tag{9}$$

Используя граничные условия и выражение (7), найдем

$$\begin{aligned}
C_0&=\frac{1}{1-R_0^2}\left[2\alpha'\bar{\theta}_1-\theta_2\big|_{R=1}(2\alpha'-1+R_0^2\right],\\
C_1&=-\frac{4\alpha'R_0^2}{1-R_0^2}\left[\theta_2-\theta_1\right],\\
C_2&=\frac{2\alpha'}{1-R_0^2}\left[\theta_2-\theta_1\right],
\end{aligned}\tag{10}$$

при $\alpha'=\dfrac{(1-R_0^2)^2}{(1-2R_0^2)^2-R_0^4(1+\ln R_0)}$.

Используя выражения (9 – 10) получаем уравнение для средней температуры $\bar{\theta}_1$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{\theta}_1}{dFo}=\frac{8k_a\alpha'}{1-R_0^2}(\theta_2-\bar{\theta}_1)+Qb\mathrm{e}^{-bFo},\\
&Fo=0,\ \bar{\theta}_1=\theta_{\text{гжтс}}.
\end{aligned}\tag{11}$$

А для температуры пород θ_2 имеем следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_2}{\partial Fo}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta_2}{\partial R}\right),\ Fo>0,\\
&R>1,\ Fo=0,\ \theta_2=0;\\
&R=1,\ \frac{\partial\theta_2}{\partial R}=Bi(\theta_2-\bar{\theta}_1),\\
&Bi=4k_\lambda\alpha';\ \lim_{R\to\infty}\theta_2<\infty.
\end{aligned}\tag{12}$$

Введем функцию $\phi(Fo)=-\dfrac{1}{Bi}\left.\dfrac{\partial\theta_2}{\partial R}\right|_{\substack{R=1\\ \bar{\theta}_1=1}}$.

Тогда, в соответствии с теоремой Дюамеля, имеем

$$\theta_2\big|_{R=1}(Fo)=\frac{d}{dFo}\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(\rho)(1-\phi(Fo-\rho))d\rho.\tag{13}$$

Уравнение (11) с учетом (13) может быть проинтегрировано. В результате получаем

$$\begin{cases}
\bar{\theta}_1=\theta_{\text{гжтс}}+Q(1-\mathrm{e}^{-bFo})-\dfrac{8k_a\alpha'}{1-R_0^2}\times\\
\times\displaystyle\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(\rho)\ \phi(Fo-\rho)d\rho,\\
\theta_2\big|_{R=1}=-\displaystyle\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(\rho)\ \phi'(Fo-\rho)d\rho.
\end{cases}\tag{14}$$

Функцию $\phi(Fo)$ с достаточной степенью точности можно аппроксимировать выражением

$$\phi(Fo) = \frac{1}{1 + Bi\ \ln(1+\sqrt{2Fo})}.$$

Уравнения (14) могут быть решены численно методом конечных разностей. Построим на оси Fo сетку с шагом h. Обозначим

$$\begin{aligned} &Fo_i = ih, U_i = \overline{\theta}_1(Fo_i), \\ &V_i = \theta_2\big|_{R=1}(Fo_i), \phi_i = \phi(Fo_i), \\ &f_i = \theta_{\text{гжтс}} + Q(1 - e^{-bFo_i}), \\ &\gamma = 4hk_a\alpha'/(1 - R_0^2). \end{aligned} \qquad (15)$$

Тогда непрерывной задаче (14) соответствует следующая разностная схема

$$\begin{cases} U_i = \left[f_i - \gamma\phi_i U_{i-1} - \gamma \times \right. \\ \left. \times \sum\limits_{k=0}^{i-2}\left(U_{k+1}\phi_{i-k-1} + U_k\phi_{i-k}\right)\right]/(1+\gamma), \\ V_i = 0{,}5 \times \sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(U_{k+1} + U_k\right)\left(\phi_{i-k-1} - \phi_{i-k}\right). \end{cases} \qquad (16)$$

В результате вычисление функций $\overline{\theta}_1$ и $\theta_2\big|_{R=1}$ свелось к нахождению U_i и V_i из рекуррентных соотношений (16). Если положить в (16) $Q = 0$ и $\theta_{\text{гжтс}} = 1$, то получим уравнения для расчета функций $\overline{Y}_1$ и $Y_2\big|_{R=1}$, а полагая в (16) $\theta_{\text{гжтс}} = 0$, $Q = 1$, получаем выражения для расчета $\overline{Z}_1$ и $Z_2\big|_{R=1}$. Используя соотношение (16) можно решить поставленную задачу.

Для оценки вероятности возникновения растепления мерзлых пород при заданных исходных данных необходимо по (16) определить V_i и проверить условие для любых i

$$V_i \le 1. \qquad (17)$$

Если данное условие выполняется, то растепления мерзлых пород при использовании газожидкостных тампонажных смесей не происходит. Нарушение этого неравенства свидетельствует о растеплении мерзлых пород.

Если ставится задача подбора начальной температуры газожидкостной тампонажной смеси, то из (6) следует, что растепления мерзлых пород не будет, если выполняется условие

$$\theta_{\text{гжтс}} Y_2\big|_{R=1} + QZ_2\big|_{R=1} \le 1,\ \forall Fo \in [0,\ Fo^*], \qquad (18)$$

где $[0,\ Fo^*]$ – рассматриваемый диапазон времени.

Откуда

$$\theta_{\text{гжтс}} \le \frac{1 - Q\max\limits_{Fo} Z_2\big|_{R=1}}{\max\limits_{Fo} Y_2\big|_{R=1}}. \qquad (19)$$

Полагая в (16) $\theta_{\text{гжтс}} = 0$, $Q = 1$, найдем массив $Z_2\big|_{R=1}(Fo_i) = V_i, (i = 0, \overline{n})$. Затем находим $\max\limits_{Fo} V_i$, который и дает нам $\max\limits_{Fo} Z_2\big|_{R=1}$. Аналогично находим $\max\limits_{Fo} Y_2\big|_{R=1}$, полагая в (16) $\theta_{\text{гжтс}} = 1$, $Q = 0$.

Подставляя найденные значения максимумов в выражение (19), получим оценку для безразмерной температуры газожидкостной тампонажной смеси. Индекс i в выше указанных формулах пробегает значения от 0 до n, а число n выбирается из условия $n \times h = Fo^*$, где h – заданный шаг по времени; Fo^* – верхняя граница рассматриваемого временного интервала.

Частным случаем рассмотренной выше задачи является оценка влияния тепловыделения твердеющего газожидкостной тампонажной смеси, заполняющей скважину, на окружающие мерзлые породы [3, 4]. При выполнении тампонажных работ в многолетнемерзлых породах может происходить протаивание последних, особенно тогда, когда в скважине твердеют большие массы тампонажного раствора [1, 2]. При этом необходимо учитывать распределение в геологическом разрезе мерзлых пород: их однослойное положение вблизи поверхности или при многослойном строении криолитозоны, а также наличие в разрезе трещин.

Оценку влияния тепловыделения твердеющей газожидкостной тампонажной смеси (ГЖТС) на окружающие мерзлые породы можно провести по вышеуказанным формулам, положив $R_0 = R_к / R_с = 0$.

Таким образом, разработана математическая модель распределения температурного поля в скважине и окружающем горном массиве мерзлых пород при креплении скважин газожидкостными тампонажными смесями, учитывающая температуры и теплофизические свойства данных смесей и пород, их составы, параметры скважины и колонны обсадных труб, водо-твердое отношение и степень аэрации применяемых смесей, которая позволяет определять предельные температуры газожидкостной тампонажной смеси, при которых не происходит растепления мерзлых пород.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грязнов Г.С.* Особенности глубокого бурения скважин в районах вечной мерзлоты. М.: Недра, 1969.

2. *Медведовский Р.И.* Строительство и эксплуатация скважин на нефть и газ в вечномерзлых породах. М.: Недра, 1987.

3. *Яковлев А.А.* Газожидкостные промывочные и тампонажные смеси (комплексная технология бурения и крепления скважин). СПб, 2000.

4. *Montman R.* Foamed portland cements / R.Montman, D.L.Sutton // Oil and Gas J. 1983. Vol.89. № 20.

5. *Oldson M.T.* Application of foam cements in Alberta // J. of Canad. Petroleum. 1985. Vol.24. № 5.

6. *Rozieres S.D.* Foamed cements characterization under downhole conditions and I-bz impact on job design // SPE Prog. Eng. 1991. Vol.3.

7. *Smith T.* Foamed cements application in Canada // J. of Canada Petrol. Technol. 1984. III-IV. Vol.23. № 2.

REFERENCES

1. *Gryaznov G.S.* Especially deep drilling in permafrost areas. Moscow, 1969.

2. *Medvedovskij R.I.* Construction and maintenance of wells for oil and gas in večnomerzlyh rocks. Moscow, 1987.

3. *Yakovlev A.A.* Gas liquid washing and foamed cements (integrated drilling technology and mounting holes). Saint Petersburg, 2000.

4. *Montman R.* Foamed portland cements / R.Montman, D.L.Sutton // Oil and Gas J. 1983. Vol.89. № 20.

5. *Oldson M.T.* Application of foam cements in Alberta // J. of Canad. Petroleum. 1985. Vol.24. № 5.

6. *Rozieres S.D.* Foamed cements characterization under downhole conditions and I-bz impact on job design // SPE Prog. Eng. 1991. Vol.3.

7. *Smith T.* Foamed cements application in Canada // J. of Canada Petrol. Technol. 1984. III-IV. Vol.23. № 2.