УДК 624.195

М.А.КАРАСЕВ, *канд. техн. наук, доцент, karasevma@gmail.com*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

M.A.KARASEV, *PhD in eng. sc., associate professor, karasevma@gmail.com*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ ГРУНТА НА МИКРОСТРУКТУРНОМ УРОВНЕ

Рассмотрен подход определения жесткости контакта между частицами грунта. Выполнен анализ двух моделей взаимодействия частиц грунта между собой: модели частиц с гладкой поверхностью и модели частиц с шероховатой поверхностью. Представлены зависимости жесткости контакта двух частиц от размера нормальной силы и шероховатости поверхности.

***Ключевые слова*:** грунты, микроструктура, частицы, механическое поведение, контакт, шероховатость, жесткость.

MICROSTRUCTUAL MECHANICAL BEHAVIOUR OF SOILS

Contact stiffness between two particles is considered. Analysis of interaction between two particles based on the smooth and rough contact is done. Dependence of contact stiffness on normal forces and particles surface roughness is presented.

***Key words*:** soils, microstructure, particles, mechanical behavior, contact, roughness, stiffness.

Грунты можно рассматривать на разном уровне масштабов, что позволяет понять особенности их поведения, проявляемые на макроуровне (рис.1). Можно выделить:

• микроскопический уровень: среда рассматривается на уровне кристаллов, размер элементов неоднородностей 10^{-8}-10^{-5} м;

• субмакроскопическпй (мезо) уровень: среда рассматривается на уровне элементарного объема литологической разности, размер элементов неоднородностей 10^{-5}-10^{-3} м;

• макроскопический уровень: среда рассматривается на структурном уровне, размер элементов неоднородностей составляет 10^{-3}-10^{-1} м;

• мегаскопический уровень (структурный элемент): среда рассматривается как сложное структурное образование, обладающее текстурой и находящееся под действием гравитационных и тектонических сил, размер элементов неоднородностей составляет более 1 м.

Сыпучая среда, к которой с некоторой долей допущения можно отнести и грунты, может быть описана как набор дискретных частиц. Тогда общее поведение грунта будет зависеть от механических свойств материала частиц грунта, плотности и структуры их упаковки и взаимодействия на контакте отдельных частиц друг с другом. Зная расположение

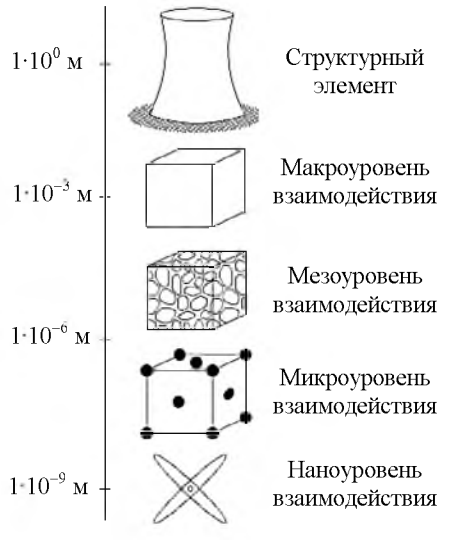


Рис.1. Степень дискретизации материала

частиц друг относительно друга, усредненный размер частиц, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала частиц, а также угол внутреннего трения между частицами и их сцепление, можно описать поведение грунта (его жесткость) на микроуровне.

Силы, действующие между частицами, можно подразделить на следующие группы:

• вызванные внешним воздействием: передаваемые через структуру скелета грунта;

• присущие самой частице: вес частицы, гидродинамические силы; частица может испытывать такие воздействия и без наличия скелета грунта;

• на контакте двух или более частиц: капиллярные силы при малой степени насыщения, электростатические и цементационные силы.

В работе будут рассмотрены только силы, вызванные внешним воздействием и действующие через структуру скелета грунта.

Для частиц естественных сыпучих материалов неодинакового размера, Ченг [2] предложил следующую зависимость между коэффициентом пустотности e, усредненным значением количества контактов между одной из частиц с соседними C_n и средним размером частицы $r_{\text{част}}$:

$$\frac{N}{V} = \frac{3C_n}{8\pi r_{\text{част}}^3 (1+e)}, \qquad (1)$$

где N – общее количество контактных взаимодействий между частицами в рассматриваемом объеме V.

Плотность упаковки частиц сферической формы одинакового размера определяет количество контактов каждой из частиц с соседними. Так, для кубической упаковки количество контактов 6, а для гексагональной 12 (табл.1).

Таблица 1

Упаковка частиц

Тип упаковки	Коэффициент пустотности e	Количество контактов одной частицы с соседними частицами C_n
Простая кубическая	0,910	6
Орторомбическая	0,654	8
Тетраэдальная	0,433	10
Гексогональная	0,350	12

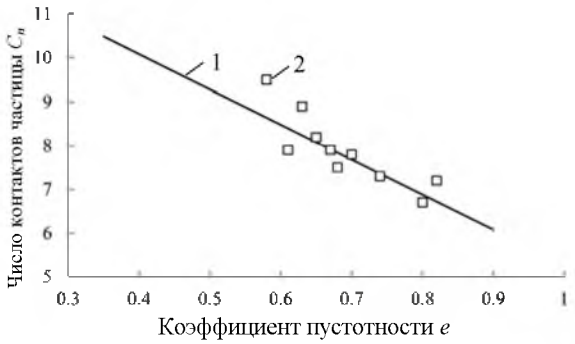


Рис.2. Взаимосвязь между C_n и коэффициентом пустотности e

1 – по уравнению (2); 2 – по [8]

В работе [8] приведены результаты экспериментов, в которых устанавливалась зависимость изменения числа контактов частицы C_n от коэффициента пустотности e (рис.2). Ченг [2] предложил следующую аппроксимацию полученных экспериментальных данных, которая имеет хорошую сходимость с экспериментальными данными в диапазоне $0{,}38 \le e \le 0{,}87$:

$$C_n = 13{,}28 - 8e\,. \qquad (2)$$

Подставив уравнение (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{N}{V} = \frac{4{,}98 - 3e}{8\pi r_{\text{част}}^3 (1+e)}\,. \qquad (3)$$

В работе [6] предложено уравнение для расчета контактных сил между сферическими частицами, исходя из усредненного радиуса частицы $r_{\text{част}}$, количества контактных взаимодействий на единицу объема и изотропного всестороннего давления σ_c:

$$f_n = \frac{3V}{2\pi r_{\text{част}} N}\sigma_c\,. \qquad (4)$$

Если уравнение (4) представить на микроуровне, то с учетом уравнения (3) взаимосвязь между нормальной контактной силой f_n и нормальной составляющей напряжений σ_n можно записать так:

$$f_n = \frac{\pi r_{\text{част}}^2 (1+e)}{3{,}32 - 2e}\sigma_n\,. \qquad (5)$$

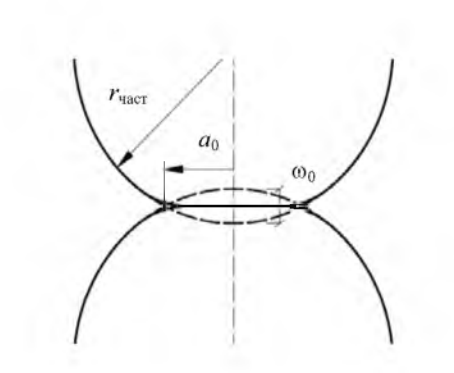


Рис.3. Схема взаимодействия между двумя сферами одинакового размера

Тогда взаимосвязь между касательными напряжениями и касательной контактной силой запишем по аналогии с (5):

$$f_t = \frac{\pi r_{\text{част}}^2 (1+e)}{3{,}32 - 2e}\tau . \qquad (6)$$

Для определения жесткости контакта двух частиц можно воспользоваться нелинейной моделью Гертца – Миндлина, которая характеризует контактное взаимодействие между идеальными сферами с гладкой поверхностью. Поверхность контакта радиусом a_0 определяется согласно следующей зависимости:

$$a_0 = \left[\frac{3(1-\nu_{\text{част}})}{8G_{\text{част}}} r_{\text{част}} f_n\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad (7)$$

где $\nu_{\text{част}}$ – коэффициент Пуассона материала частицы; $G_{\text{част}}$ – модуль сдвига материала частицы.

Под воздействием нормальной силы f_n в зоне контакта радиусом a_0 двух частиц одинакового размера реализуются деформации ω_0 (рис.3), которые можно определить по следующей зависимости:

$$\omega_0 = 2\left[\frac{3 f_n (1-\nu_{\text{част}})}{8G_{\text{част}} r_{\text{част}}^{1/2}}\right]^{\frac{2}{3}}. \qquad (8)$$

Отсюда контактную жесткость в направлении нормальной поверхности контакта K_n можно определить по формуле [7]

$$K_n = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial f_n}\right)^{-1} \qquad (9)$$

или после дифференцирования

$$K_n = \left[\frac{3 r_{\text{част}} G_{\text{част}}^2}{(1-\nu_{\text{част}})} f_n\right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (10)$$

Нормальная сила f_n, радиус поверхности контакта a_0, радиус сферы (частицы) $r_{\text{част}}$, а также распределение касательных напряжений на границе контакта между двумя сферами одинакового размера приставлены графически (рис.3).

Согласно [1, 5] касательня компонента контактной жесткости

$$K_t = \frac{2(1-\nu_{\text{част}})}{2-\nu_{\text{част}}}\left(1 - \frac{f_t}{f_n \tan\varphi_{\text{int}}}\right)^{\frac{1}{3}} K_n , \qquad (11)$$

где f_n – касательная сила, действующая в плоскости контакта двух частиц; φ_{int} – угол внутреннего трения на контакте двух сфер.

Задавшись параметрами модели $\nu_{\text{част}} = 0{,}2$, $G_{\text{част}} = 30000$ МПа, $r_{\text{част}} = 0{,}15$ мм, $\varphi_{\text{int}} = 30°$, получим следующие зависимости жесткости контакта в тангенциональном направлении от сил, действующих на контакте сфер f_n и f_t. Контактные жесткости K_n и K_t (рис.4, *а*), полученные по модели Гертца – Миндлина, нелинейно зависят от контактных усилий f_n и f_t. Можно отметить, что зависимость контактной жесткости от нормальной составляющей напряжений имеет постоянное значение 0,333 (рис.4, *б*), тогда как экспериментальные данные показывают, что для реальных сыпучих материалов это значение изменяется в диапазоне 0,5-0,75 [6].

Для большего соответствия рассматриваемой модели реальному взаимодействию между отдельными частицами необходимо ввести шероховатость поверхности частиц. Шероховатая поверхность сферических частиц в первом приближении может рассматриваться как набор сферических выступов равного радиуса [4]. Функция нормальной плотности распределения позволяет описать изменение высоты неровностей по поверхности сферы. Радиус площади контакта модели для сферы с неровной поверхностью a_{rough} больше аналогичной величины a_0, получаемой для сферы с гладкой поверхно-

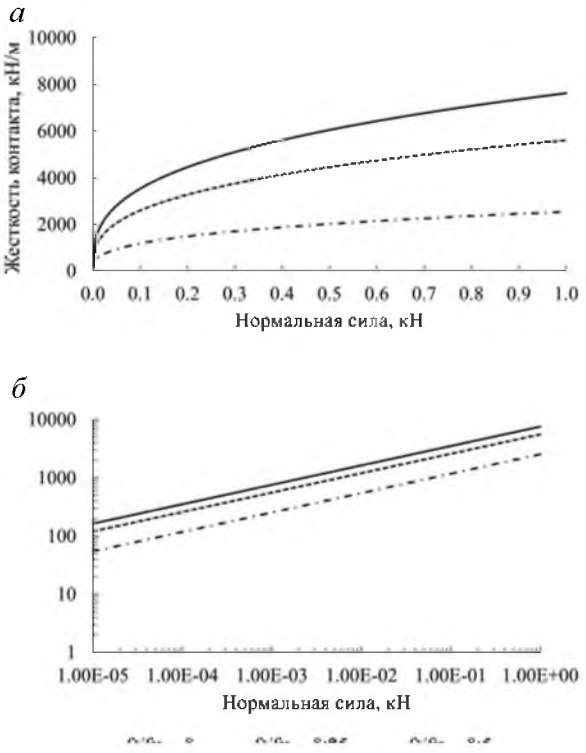


Рис.4. Взаимосвязь между контактной жесткостью и усилием, действующим на контакте, частиц с гладкой поверхностью:
а – нормальная шкала; *б* – логарифмическая шкала

стью, а максимальное контактное давление p_{rough} меньше. Эффективный радиус площади контакта можно определить по следующему выражению [8]:

$$a_{\text{rough}} = \frac{3\pi\int_0^{\infty} \rho p_{\text{rough}}(\rho)\partial p}{4\int_0^{\infty} p_{\text{rough}}(\rho)\partial p}, \qquad (12)$$

где ρ – радиальное расстояние от центра контактной зоны; p_{rough} – функция распределения давления в зоне контакта.

Согласно [4] эффективный радиус контакта a_{rough} можно выразить как функцию от радиуса контакта a_0 и параметра, учитывающего шероховатость поверхности α_{rough}:

$$\frac{a_{\text{rough}}}{a_0} = \frac{5(20+7\alpha_{\text{rcugh}}^{0,5})}{100+\alpha_{\text{rough}}^{0,5}}. \qquad (13)$$

Тогда при соприкосновении двух частиц с шероховатой поверхностью контактную жесткость можно будет найти, подставив в модель Гертца – Миндлина значение a_{rough} вместо a_0:

$$\omega_{\text{rough}} = 2\frac{a_{\text{rough}}^2}{r_{\text{част}}}; \qquad (14)$$

$$K_{n,\text{rough}} = \left(\frac{\partial\omega_{\text{rough}}}{\partial f_n}\right)^{-1}; \qquad (15)$$

$$K_{t,\text{rough}} = \frac{2(1-\nu_{\text{част}})}{2-\nu_{\text{част}}}\left(1-\frac{f_t}{f_n\tan\varphi_{\text{int}}}\right)^{\frac{1}{3}} K_{n,\text{rough}}. \qquad (16)$$

Согласно [5] параметр

$$\alpha_{\text{rough}} = \delta_s/\omega_0,$$

где δ_s – стандартное отклонение от высоты неровностей поверхности частицы.

По полученным выражениям (14) и (15) построим зависимость жесткости контакта от усилий (рис.5), действующих на контакте. Стандартное отклонение от высоты неровностей поверхности частицы δ_s примем равным $2{,}5\cdot10^{-6}$ м.

Сравнение результатов расчетов (рис.5), выполненных с помощью модели частиц с гладкой поверхностью и модели с шероховатой поверхностью, показало, что при значительных величинах нормальной силы, действующей на контакте, обе модели прогнозируют близкую по значениям жесткость контакта. При малых значениях нормальной силы жесткость контакта, полученная на модели частиц с шероховатой поверхностью, значительно меньше, чем для модели частиц с гладкой поверхностью. Из полученных результатов видно, что зависимость



Рис.5. Взаимосвязь между контактной жесткостью и усилием, действующим на контакте частиц с шероховатой поверхностью

жесткости контакта от давления не является постоянной величиной (0,33), а меняется в зависимости от параметров частиц грунта. Схожие результаты отмечали другие исследователи при проведении экспериментальных исследований [3].

Рассмотренный подход можно использовать для прогноза жесткости связей между частицами грунта в диапазоне изменения значений деформаций от малых до весьма значительных.

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ № 16.120.11.5266-МК от 01 февраля 2012 г. на проведение научных исследований кандидатами наук. Наименование проекта: «Разработка теоретической модели поведения грунтов высокой и средней степени литификации как анизотропной среды на основе микроструктурного взаимодействия».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowden F.P.* The Friction and Lubrication of Solids / F.P.Bowden, D.Tabor. Part II. Clarendon Press: Oxford, 1964. 424 p.

2. *Chang C.S.* Micromechanical modeling of cemented sands under low amplitude oscillations / C.S.Chang, A.Misra, S.S.Sundaram // Geotechnique. 1990. № 40(2). P.251-263.

3. *Goddard J.D.* Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1990, 430. P.105-131.

4. *Greenwood J.A.* The elastic contact of rough spheres / J.A.Greenwood, J.H.Tripp // Journal of Applied Mechanics (ASME). 1967. № 34(1). P.153-159.

5. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge University Press: Cambridge, 1985. 453 p.

6. *Mindlin R.D.* Elastic spheres in contact under varying oblique forces / R.D.Mindlin, H.Deresiewicz // Journal of Applied Mechanics. 1953. № 20(3). P.327-344.

7. *von Soos P.* Properties of soils and rocks and their laboratory determination / P.von Soos, J.Bohac // Geotechnical Engineering Handbook. Vol. 1. Ernst & Sohn: Berlin, 2002. P.119-206.

8. *Yanagisawa E.* Influence of void ratio and stress condition on the dynamic shear modulus of granular media // Advances in the Mechanics and the Flow of Granular Materials II. Gulf Publishing Company: Houston, TX, 1983. P.947-960.