УДК 517.9

И.А.ЛЕБЕДЕВ, *канд. физ.-мат. наук, доцент, Lebed98@yandex.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

I.A.LEBEDEV, *PhD in phys.-mat. sc., associate professor, Lebed98@yandex.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Описано решение обыкновенных дифференциальных уравнений , которые являются уравнениями в полных дифференциалах третьего порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, решение, полный дифференциал, третий порядок.

EQUATIONS IN FULL DIFFERENTIALS OF THIRD ORDER

The article describes solution of the differentional equations in full differentials of third order.

Key words: differentional equations, solution, full differentials, third order.

Многие физические процессы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, поэтому возможность точного решения даже частных случаев таких уравнений имеет большое значение для теории и практики. Особенно это важно при построении и анализе моделей естественных и технологических процессов. Мы показываем, что уравнения в полных дифференциалах третьего порядка могут быть решены в квадратурах.

Уравнением в полных дифференциалах второго порядка будет уравнение вида $d(dF)=0$, где функция $F=F(x,y)$, а $y=y(x)$ – искомая функция. Согласно работе [1], такое уравнение имеет вид

$$y''' + a(x,y)y'^2 + 2b(x,y)y' + c(x,y) = 0,$$

где $\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x}$ и $\frac{\partial c}{\partial y} + ac = b^2 + \frac{\partial b}{\partial x}$.

В этом случае функция $F(x,y)$, задающая общее решение $F(x,y)=c_1x+c_2$ уравнения $d(dF)=0$, равна

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\mu(x,y_0)c(x,y_0)dx\right)dx + \int_{y_0}^{y}\mu(x,y)dx,$$

где интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x}b(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y}a(x,y)dy\right)$$

для некоторой фиксированной точки (x_0, y_0) из области, в которой рассматривается уравнение.

Аналогичным образом, уравнением в полных дифференциалах третьего порядка будет уравнение $d(d(dF))=0$ и общее решение такого уравнения определяется равенством

$$F(x,y) = C_1x^2 + C_2x + C_3. \qquad (1)$$

Найдем вид такого уравнения в предположении непрерывной дифференцируемости всех функций необходимое число раз

в соответствующей области и в силу зависимости $y = y(x)$:

$$d\left(d\left(dF\right)\right) = d\left(d^2F + \frac{\partial F}{\partial y} d^2y \right) =$$

$$d\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y dx} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial F}{\partial y} d^2y \right) =$$

$$= d^3F + 3\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} dx d^2y +$$

$$+ 3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy d^2y + \frac{\partial F}{\partial y} d^3y = 0, \qquad (2)$$

где обычный дифференциал функции двух переменных

$$d^3F = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} dx^2 dy +$$

$$+ 3\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} d^3y \qquad (3)$$

и $dy = y' dx, \quad dy^2 = y'^2 dx^2, \quad dy^3 = y'^3 dx^3,$

$d^2y = y'' dx^2, \quad d^3y = y''' dx^3.$

Следовательно, уравнение в полных дифференциалах третьего порядка по (2), (3) имеет вид

$$y''' + 3a(x,y)y'y'' + 3b(x,y)y'' +$$

$$+ \alpha(x,y)y'^3 + 3\beta(x,y)y'^2 +$$

$$+ 3\gamma(x,y)y' + c(x,y) = 0, \qquad (4)$$

где для $\mu = \partial F/\partial y$ выполняются равенства:

$$\left.\begin{aligned} \mu a = \frac{\partial F}{\partial y^2} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \Rightarrow a = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \\ \mu b = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow b = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}; \qquad (5)$$

$$\mu\alpha = \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \frac{\partial \mu a}{\partial y} \Rightarrow;$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} a + \frac{\partial a}{\partial y} = a^2 + \frac{\partial a}{\partial y}; \qquad (6)$$

$$\mu\beta = \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial \mu b}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} b + \frac{\partial b}{\partial y} = ab + \frac{\partial b}{\partial y}; \qquad (7)$$

$$\mu\gamma = \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial \mu b}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} b + \frac{\partial b}{\partial x} = b^2 + \frac{\partial b}{\partial x}; \qquad (8)$$

$$\mu c = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Rightarrow \frac{\partial \mu c}{\partial y} = \frac{\partial \mu \gamma}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y} + c\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \Rightarrow \qquad (9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} + ca = b^3 + 3b\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}. \qquad (10)$$

Отметим, что из линейного уравнения (10) для $c = c(x,y)$ можно найти выражение для функции $c(x,y)$.

По условию полного дифференциала (5) можно восстановить $\ln\mu$ и μ:

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} a(x,y)dy \right), \qquad (11)$$

где $(x_{0,}y_0)$ – фиксированная точка рассматриваемой области.

Так как $\mu\gamma = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$ и $\mu c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$, то по условию полного дифференциала (9) можно восстановить $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_{x_0}^{x} \mu(x,y_0)c(x,y_0)dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \mu(x,y)\gamma(x,y)dx. \qquad (12)$$

Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \mu b$, то по условию полного дифференциала (8), используя (12), можно восстановить $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \mu(x,y_0)c(x,y_0)dx \right) dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \mu(x,y)b(x,y)dy. \qquad (13)$$

Следовательно, по (5), (11), (13) и условию полного дифференциала $\mu b = \frac{\partial \mu}{\partial x}$ можно восстановить функцию $F(x, y)$:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\mu(x,y_0)c(x,y_0)dx\right)dx\right)dx + \int_{y_0}^{y}\mu(x,y)dy \qquad (14)$$

и по (1) получить общее решение уравнения (4).

Таким образом, дифференциальное уравнение третьего порядка будет уравнением в полных дифференциалах, если оно имеет вид (4) и выполняются условия (5)-(8) и (10). В этом случае его общее решение (1) определяется функцией (14), где использовано уравнение (11). Этот класс уравнений, решаемых в квадратурах, является новым (за исключением частных случаев) [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев И.А.* Уравнения в полных дифференциалах второго порядка // Записки Горного института. СПб, 2005. Т.165.

2. *Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям / В.Ф.Зайцев, А.Д.Полянин. М., 1993.

3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

REFERENCES

1. *Lebedev I.A.* Equations in full differentials of second order // The Proceedings of Mining Institute. Saint Petersburg, 2005. Vol.165.

2. *Zaicev V.F., Polyanin A.D.* Handbook nonlinear differential equations. Moscow, 1993.

3. *Kamke E.* Handbook ordinary differentials equations. Moscow, 1971.