УДК 622.1

В.А.ПАДУКОВ, *д-р техн. наук, профессор, ligozkij@rambler.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

V.A.PADUKOV, *Dr. in eng. sc., professor, ligozkij@rambler.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

РОЛЬ Г.Н.КУЗНЕЦОВА И А.А.БОРИСОВА В РАЗРАБОТКЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ГОРНОЙ ГЕОМЕХАНИКЕ

В модели Г.Н.Кузнецова и А.А.Борисова для обеспечения подобия процессов нарушения устойчивости в натуре и в модели необходимо соблюдение инвариантности соотношения между прочностью среды и гравитационными напряжениями.

***Ключевые слова*:** инвариант, модель, масштабный фактор.

ROLE G.N.KUZNETSOV AND A.A.BORISOV IN THE DEVELOPMENT OF MODELING TECHNIGUES IN MINING GEOMECHANICS

Model of G.N.Kuznetsov and A.A.Borisov for the similarity of processes in violation of the stability of nature and the model must respect the invariance of the relation between the strength of the medium and gravitational stresses.

***Key words*:** invariant, model, scale factor.

Модель есть специфический объект, отражающий существенные свойства изучаемого объекта, создаваемый с целью получения информации. Модель строится так, чтобы явление или процесс в модели и в натуре описывались одними и теми же уравнениями.

Основоположником науки о моделировании физических явлений является Галилей. В «Беседах о двух новых отраслях науки»» (1638) он впервые сформулировал явление несимметричности законов природы относительно изменения масштаба: «... если мы, отвлекшись от всякого несовершенства материи и предположив таковую неизменяемой и лишенной всяких случайных недостатков, построим большую машину из того же самого материала и точно сохраним все пропорции меньшей, то в силу самого свойства материи мы получим машину, соответствующую меньшей во всех отношениях, кроме прочности и сопротивляемости внешнему воздействию; в этом отношении чем больше она будет по размерам, тем менее прочна»*.

Моделирование как метод исследования опирается на теорему о механическом подобии Ньютона; π-теорему, теорему о возможности выражения физических законов в виде зависимостей между критериями подобия и теорему Кирпичева – Гухмана, согласно которой подобие явлений определяется подобными условиями однозначности и одинаковыми определяющими критериями [7].

В горной геомеханике различают два вида моделирования: с увеличением и уменьшением масштаба системы. Моделирование с уменьшением масштаба системы связано с разработкой критериев подобия. Моделирование с увеличением размеров системы требует учета масштабного эффекта.

* *Галилео Г.* Соч. М.-Л., 1934. Т.1. С.49-50.

Основой метода эквивалентных материалов и центробежного моделирования является теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобие [4, 9]: соответственно

$$\frac{l'_{\text{н}}}{l'_{\text{м}}} = \frac{l''_{\text{н}}}{l''_{\text{м}}} = \ldots = i_l\,; \quad \frac{t'_{\text{н}}}{t'_{\text{м}}} = \frac{t''_{\text{н}}}{t''_{\text{м}}} = \ldots = i_l\,;$$

$$\frac{m'_{\text{н}}}{m'_{\text{м}}} = \frac{m''_{\text{н}}}{m''_{\text{м}}} = \ldots = i_m\,,$$

где $l'_{\text{н}}$, и $l'_{\text{м}}$ – линейные размеры натуры и модели; $t'_{\text{н}}$ и $t'_{\text{м}}$ – временная длительность процессов в натуре и модели; $m'_{\text{н}}$ и $m'_{\text{м}}$ – масса элементов натуры и модели.

Из уравнения механического подобия

$$P = ma = m\frac{v}{t}$$

следует $Pt/mv = \text{inv}$, где P – сила; m – масса; a – ускорение; v – скорость; t – время.

Учитывая, что $m = \rho l^3$ (здесь ρ – плотность среды), уравнение механического подобия можно переписать в виде $Pt/(\rho l^4) = \text{inv}$.

Обозначив $l/t = v$, $v^2 = ql$, $\rho q = \gamma$, $P/l^2 = \sigma$ (здесь q – ускорение свободного падения; γ – объемный вес материала; σ – напряжение), можно получить $\sigma/\gamma l = \text{inv}$, где σ – прочностная характеристика породы; γl – гравитационное напряжение. Итак, для обеспечения подобия процессов нарушения устойчивости в натуре и в модели необходимо соблюдение инвариантности соотношения между прочностью среды и гравитационным напряжением.

Инвариантность упругих деформаций $\varepsilon_y = \text{inv}$ в модели и в натуре обеспечивается при условии $E/(\gamma l) = \text{inv}$; $\upsilon = \text{inv}$, где E – модуль упругости; υ – коэффициент Пуассона.

Прочностные и упругие свойства модели определяются в виде

$$\sigma_i = \frac{(\gamma l)_{\text{м}}}{(\gamma l)_{\text{н}}}\sigma_{\text{н}}; \quad E_i = \frac{(\gamma l)_{\text{м}}}{(\gamma l)_{\text{н}}}E_{\text{н}}; \qquad (1)$$

где индексы м и н соответствуют модели и натуре.

В формулах (1) молчаливо предполагается, что прочность и модуль упругости натуры равны прочности и модулю упругости образца горной породы, т.е. используется принцип редукции.

При моделировании нарушений устойчивости выработок должен соблюдаться временной масштаб моделирования

$$t_{\text{м}}/t_{\text{н}} = \sqrt{l_{\text{м}}/l_{\text{н}}}\,,$$

где $t_{\text{м}}$ и $t_{\text{н}}$ – длительность деформации в модели и в натуре.

В соответствии с методом центробежного моделирования модель изготовляется из того же материала, что и натура: $\sigma_{\text{н}} = \sigma_{\text{м}}$. Инвариантный критерий моделирования записывается в виде $\gamma l = \text{inv}$, откуда $\gamma_{\text{м}} = n\gamma_{\text{н}}$.

При моделировании с увеличением размеров системы, как уже сказано, определяющее значение имеет масштабный фактор. При анализе свойств массива необходимо правильно выделить его элементарные составляющие – структурные блоки, образованные системами трещин. Неоднородность массива описывается той или иной вероятностной моделью. Выбор модели для описания свойств массива зависит от соотношения размеров области воздействия L нагрузки и структурного элемента l. В пределах структурного элемента ($L/l < 1$) прочностные свойства пород описываются законом распределения Вейбулла.

Взаимосвязь средней прочности $\sigma_{\text{ср}}$ и объема элемента V имеет вид [3]

$$\sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\min} + \frac{c}{V^{1/m}}\,,$$

где $\sigma_{\min}$, c и m – эмпирические коэффициенты.

При $L/l = 10 \div 10^3$ для описания свойств массива используют логнормальный закон распределения. Взаимосвязь между сцеплением пород в элементе и сцеплением пород в массиве определяет формула Фисенко [12]:

$$\frac{C_{\text{мас}}}{C_{\text{к}}} = \left(1 + a\ln\frac{H_{\text{п}}}{l}\right)^{-1},$$

где $C_{\text{мас}}$ и $C_{\text{к}}$ – сцепление пород в массиве и элементе (куске); $H_{\text{п}}$ – высота призмы обрушения; l – размер структурного элемента; a – эмпирический коэффициент.

Для квазиоднородного массива ($L/l > 10^3$) математическое ожидание модуля упругости и прочности определяется густотой и плоскостной долей поверхности трещин [6]. В качестве статистической модели свойств принимается нормальный закон распределения

$$H = \sum \rho_i \log \rho_i ,$$

где ρ_i – вероятности.

Приведенные вероятностные законы распределения свойств массива вытекают из экстремальной энтропии: $\sum \rho_i \log \rho_i = \max$ при различных граничных условиях. Например, нормальный закон распределения свойств массива имеет место, когда дисперсия распределения является величиной постоянной.

Обобщая результаты изучения влияния масштабного эффекта на прочностные свойства массива, можно сделать вывод о необходимости поиска инвариантного критерия предельного состояния массива при его разрушении.

По аналогии с явлениями испарения и плавления в качестве характеристики предельного состояния породы примем энтропию. Основные условия термодинамического подобия записываются в виде [10]

$$I_T i_S = i_U = i_\rho i_V,$$

где i – множители в области подобия; индексы T, S, U, ρ и V соответствуют температуре, энтропии, внутренней энергии, давлению и объему.

В соответствии с основным условием $i_S = 1$, поэтому

$$\frac{i_T}{i_\rho i_V} = 1; \quad \frac{i_U}{i_T} = 1 ,$$

и условия термодинамического подобия можно записать в виде

$$\frac{kT}{pV} = \text{inv}; \quad \frac{U}{kT} = \text{inv} ,$$

где k – постоянная Больцмана.

Так как произведение давления на изменение единичного объема есть объемная плотность свободной энергии a_V, которая при предельном состоянии равна колебательной энергии ΔQ, термодинамический критерий подобия можно представить в виде

$$\frac{a_v}{kT} = \text{inv} ; \quad \frac{\Delta Q}{kT} = \text{inv} .$$

Учитывая, что $\Delta Q/T = \Delta S_{\text{кр}}$, термодинамический критерий подобия запишем в виде $\Delta S_{\text{кр}}/k = \text{inv}$.

Условие термодинамического подобия может быть также выражено через связь между производством энтропии и полной энергией системы A:

$$\frac{dA}{dt} = -T\frac{dS}{dt},$$

откуда

$$\frac{T\dfrac{dS}{dt}}{\dfrac{dA}{dt}} = \text{inv}.$$

Заметим, что впервые этот термодинамический инвариант подобия был обоснован Н.А.Наседкиным.

Так как $k = aE$ (здесь α – коэффициент линейного теплового расширения), инвариант критического предельного состояния породы можно записать в виде [8]

$$\Delta S_{\text{кр}}/\alpha E = \varepsilon_{\text{кр}} = \text{inv}.$$

Таким образом, отношение критической энтропии к произведению модуля линейного теплового расширения на модуль Юнга есть критическая относительная деформация, которая является величиной инвариантной. Согласно С.С.Вялову, критическая деформация массивов горных пород $\varepsilon_{\text{кр}} = 0,02$ [2].

Деформационный критерий предельного состояния массивов горных пород может быть объяснен на основе следующих закономерностей процесса трещинообразования, предшествующего наступлению предельного состояния геомеханической системы.

Распределение числа сейсмоакустических импульсов по энергии подчиняется закону Гутенберга [1]

$$\log N_i = a - \gamma \log A_i \qquad (2)$$

где N_i – количество импульсов; A_i – энергия импульса; a и γ – эмпирические коэффициенты.

Взаимосвязь площади трещины с энергией импульса имеет вид

$$\log F_i = b + \beta \log A_i \qquad (2)$$

где F_i – площадь трещины; b и β – эмпирические коэффициенты [13].

Сложив левые и правые части уравнений (2) и (3), получим $\Sigma N_i F_i$ = const, т.е. суммарная площадь трещин, предшествующих наступлению предельного состояния массива, есть величина постоянная.

Критическая относительная деформация $\varepsilon_{кр}$ включает в себя как частный случай упругую относительную деформацию $\varepsilon_у$.

Количественная оценка масштабного эффекта может быть произведена из следующих соображений. Так как $Q = \Delta S_{кр} T$, то $\varepsilon_{кр} = Q/(aFT)$. В свою очередь, $Q = a_{др}/\eta$, где $a_{др}$ – энергия дробления; η – КПД использования колебательной (тепловой) энергии на разрыв связей [8]. Поэтому

$$\varepsilon_{кр} = \frac{a_{др}}{\eta \alpha E T} = \text{inv}.$$

Условия усреднения для нахождения условной внешней прочности массива определяются инвариантностью удельной энергоемкости:

$$0{,}5\sigma_{р.о} \ln \frac{F_н}{F_{тр}} = 0{,}5\sigma_{р.мас} \ln \frac{F_н}{F_V},$$

откуда

$$\sigma_{р.мас} = \sigma_{р.о} \frac{\ln \dfrac{F_к}{F_{тр}}}{\ln \dfrac{F_к}{F_V}}, \qquad (4)$$

где $\sigma_{р.о}$ и $\sigma_{р.мас}$ – прочность образца и массива на разрыв соответственно; $F_к$ – удельная поверхность кусков; F_V – удельная поверхность массива без учета поверхностей трещин; $F_{тр}$ – удельная поверхность трещин массива.

Из уравнения (4) вытекает важное следствие. Для грунтов и идеально пластичных сред прочностные характеристики являются инвариантными. Масштабный эффект отсутствует. Полагая что

$$\sigma_{р.мас}/\sigma_{р.о} = E_{мас}/E_о,$$

где $E_{мас}$ и $E_о$ – модули упругости массива и образца, найдем модуль упругости массива, что позволяет внести поправки в формулы Кузнецова

$$\sigma_м = \frac{(\gamma h)_м}{(\gamma h)_н} \sigma_{р.мас};$$

$$E_м = \frac{(\gamma h)_м}{(\gamma h)_{мас}} E_{мас}.$$

В формулы для определения свойств модели при центробежном моделировании следует внести поправку $\sigma_м = \sigma_{мас}$.

Модели для определения параметров зон разрушения, сейсмического действия основаны на принципе автомодельности – геометрического подобия [9]. Согласно принципу геометрического подобия, напряжения, соответствующие границам зон дробления, трещинообразования и другим изменениям среды под действием взрыва, должны быть при неизменном ВВ и форме заряда на расстояниях R пропорциональны радиусу заряда $R_з$:

$$R = kR_з,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Например, масса сферического заряда

$$C_{ВВ} = \frac{4}{3} \pi R_з^3 \gamma_{ВВ},$$

где $\gamma_{ВВ}$ – объемная масса сферического заряда, кг.

Тогда

$$R_з = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\gamma_{ВВ}}} \sqrt[3]{C_{ВВ}};$$

где $R_з$ – в метрах.

Обозначив

$$k \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\gamma_{ВВ}}} = k_{ВВ},$$

можно записать

$$R = k_{\text{ВВ}}\sqrt[3]{C_{BB}}\ ,$$

где $k_{\text{ВВ}}$ – коэффициент, характеризующий среду и свойства ВВ.

По формуле (5) можно определить радиус камуфлетной полости, радиусы зон дробления, трещинообразования, безопасное расстояние от заряда до того или иного объекта. Зная величину $K_{\text{ВВ}}$, можно предсказать действие зарядов, имеющих существенно более значительные размеры. При каждом определенном способе взрыва величины $R_з/R$ и $\sqrt[3]{C_{BB}}\,/R$ остаются инвариантными. При изменении этих величин форма проявлений действия взрыва изменяется.

Например, для оценки сейсмического действия взрыва применяется формула Садовского [11]

$$\nu = k_с\left(\frac{\sqrt[3]{C_{\text{ВВ}}}}{R}\right)^{1,5};$$

где v – скорость сейсмических колебаний, см/с; $C_{\text{ВВ}}$ – масса мгновенно взрываемого заряда, кг; R – расстояние до заряда, м; $k_с$ – коэффициент сейсмичности.

Уравнение взаимосвязи параметров воронки может быть представлено в виде

$$\frac{R_в}{\sqrt[3]{\text{C}_{\text{ВВ}}}} = f\left(\frac{W}{\sqrt[3]{\text{C}_{\text{ВВ}}}}\right),$$

где $R_в$ – радиус воронки, м; W – линия наименьшего сопротивления, м; $C_{\text{ВВ}}$ – масса заряда, кг.

При моделировании кусковатости определяющее условие выступает в виде

$$\ln\frac{F_к}{F_V} = \text{inv}. \qquad (6)$$

Из него следует равенство числа мест зарождения трещины в натуре и в модели. Кроме того, подобие взрывного разрушения определяет подобие параметров развала [3, 5].

Для нахождения взаимосвязи между прочностью модели и прочностью массива воспользуемся законом дробления [8]:

$$\ln\frac{F_к}{F_V} = \frac{\eta q}{0,5\sigma_р},$$

где η – КПД использования энергии взрыва на дробление породы; q – удельный расход энергии взрыва; $\sigma_р$ – предел прочности породы на растяжение.

Учитывая определяющее условие (6), запишем

$$\left(\frac{\eta q}{0,5\sigma_р}\right)_{мак} = \left(\frac{\eta q}{0,5\sigma_р}\right)_{м},$$

откуда

$$\sigma_{р.м} = \frac{(\eta q)_м}{(\eta q)_{мас}}\sigma_{мас}.$$

Когда $(\eta q)_м = (\eta q)_{мас}$, $\sigma_{р.м} = \sigma_{р.мас}$, т.е. при $\eta q = \text{inv}$ и $\sigma_р = \text{inv}$. Для модуля упругости можно записать

$$E_м = \frac{(\eta q)_м}{(\eta q)_{мас}}E_{мас}.$$

Равенство пористости навала в натуре и в модели достигается при условии тождественности породы модели и натуры и равенства соответствующих скоростей движения кусков породы [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов С.Д.* Акустические наблюдения процессов разрушения горных пород. М., 1964.
2. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов. М., 1978.
3. *Имонитов В.Р.* Технология, механизация и организация производственных процессов при подземной разработке рудных месторождений. М., 1973.
4. Моделирование проявлений горного давления / Г.Н.Кузнецов, Ю.И.Васильев, М.Ф.Шклярский, Г.Г.Юрьевич. Л., 1968.
5. Моделирование разрушающего действия взрыва в горных породах / В.Н.Комар, Л.М.Гейман, В.С.Кравцов, Н.И.Мячина. М., 1972.
6. *Мюллер Л.* Инженерная геология. Механика скальных массивов. М., 1971.
7. *Несонов М.Д.* Моделирование горных процессов. М., 1963.
8. *Падуков В.А.* Прогнозирование устойчивости бортов карьеров. Л., 1981.
9. *Покровский Г.И.* Центробежное моделирование в горном деле / Г.И.Покровский, И.С.Федоров. М., 1969.
10. *Путилов К.А.* Термодинамика. М., 1971.
11. *Садовский М.А.* Простейшие приёмы определения опасности массовых взрывов. М., 1946.
12. *Фисенко Г.Л.* Устойчивость бортов карьеров и отвалов. М., 1965.
13. *Чирков С.Е.* Влияние масштабного фактора на прочность углей. М., 1969.

REFERENCES

1. *Vinogradov S.D.* Acoustic monitoring of processes of destruction of rocks. Moscow, 1964.
2. *Vjalov S.S.* Rheological fundamentals of soil mechanics. Moscow, 1978.
3. *Imonitov W.R.* Technology, mechanization and organization of production processes in underground development of ore deposits. Moscow, 1973.
4. Simulation of rock pressure. / G.N.Kuznetsov, I.Vasiliev, M.F.Shklarsky, G.G.Yurievich. Leningrad, 1968.
5. Modeling of the destructive actions of the explosion in the rocks. / V.Komar, L.Gaiman, V.Kravtsov, I.Myachina. Moscow, 1972.
6. *Muller L.* Engineering Geology. Mechanics of rocks. Moscow, 1971.
7. *Nesonov M.D.* Modeling of mining processes. Moscow, 1963.
8. *Padukov V.A.* Prognostication stability of pit walls / Leningrad, 1981.
9. *Pokrovsky G.I.*, *Fedorov I.S.* Centrifugal modeling in mining. Moscow, 1969.
10. *Putilov K.A.*, Thermodynamics. Moscow, 1971.
11. *Sadovskii M.A.* Simplest techniques hazard identification mass explosions. Moscow, 1946.
12. *Fisenko G.L.* Stability of pit walls and dumps. Moscow, 1965.
13. *Chirkov S.E.* The Influence of the scale factor on the strength of coals. Moscow, 1969.