УДК 622.273.2:622.831

А.П.ГОСПОДАРИКОВ, *д-р техн. наук, профессор, kaf_matem_spmi@mail.ru*
М.А.ЗАЦЕПИН, *канд. физ.-мат. наук, доцент, michael_zatsepin@mail.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

A.P.GOSPODARIKOV, *Dr. in eng. sc., professor, kaf_matem_spmi@mail.ru*
M.A.ZATSEPIN, *PhD in phys.& math., associate professor, michael_zatsepin@mail.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ГОРНЫХ ПОРОД И МАССИВОВ

Многообразие горно-геологических условий залегания пологих пластов и продолжающийся рост глубин разработки месторождений полезных ископаемых приводят исследователя к необходимости анализа напряженно-деформированного состояния массивов горных пород вокруг подземных горных выработок всевозможного назначения и различного очертания.
Ключевые слова: прогноз, геомеханика, массив горных пород, напряженное состояние, численные методы.

MATHEMATICAL MODELLING OF APPLIED PROBLEMS OF ROCK MECHANICS AND ROCK MASSIFS

The variety of the mining and geological conditions with further increasing in depth of the development of bedded deposits leads to necessity for the analysis of stress and strain state near different types of excavations.
Key words: forecast, geomechanics, rock massif, stress state, numerical methods.

При математическом моделировании геомеханических задач часто приходится учитывать нелинейность процесса деформирования горных пород [1]. Использование аналитических методов решения нелинейных задач, как правило, не приводит к необходимому результату, а численные методы без каких-либо значительных модификаций могут быть успешно применены для решения таких задач.

Численные методы позволяют рассчитывать поля напряжений, деформаций и перемещений, возникающие в несущих конструкциях, в элементах крепи, во вмещающем массиве. На основе полученных решений возможен прогноз поведения пород вокруг выработок, оценка их устойчивости, выбор подходящих материалов для строительства различных сооружений, обоснование наиболее устойчивых конструктивных схем, позволяющих значительно сократить вычислительные затраты.

При численном моделировании различных геомеханических процессов, анализе устойчивости подземных выработок, строительных конструкций и других инженерных сооружений используются различные программные пакеты, основанные на реализации эффективных численных методов [3]. Так, в России и за рубежом широко используются программные продукты FLAC 2D/3D, UDEC (© Itasca Consulting Group, US), Plaxis 2D, Plaxis 3D Foundation, Plaxis 3D Tunnel (© PLAXIS BV, Netherlands) и другие.

В частности, достаточно эффективно применяются программные продукты, основанные на использовании метода конечных разностей (МКР), позволяющие получать решения многих важных геомеханических задач. Например, одним из таких продуктов является программный пакет FLAC. Этот пакет постоянно модифицируется и является одним из самых мощных и широко распространенных программных пакетов в современной горной практике.

Все большее распространение получает также пакет UDEC, реализующий в своем программном коде методы механики дискретных сред – и в силу того, что горные породы являются именно дискретными средами, разбитыми на отдельности различными системами трещин, – позволяющий наиболее адекватно оценивать геомеханические процессы, протекающие в массиве горных пород при отработке месторождений полезных ископаемых.

К недостаткам вычислительных программ можно отнести, как правило, отсутствие обоснованности применяемого математического аппарата, заложенного в программе. Отметим также и достаточно сложный интерфейс, не позволяющий инженерам быстро овладеть техникой решения задач геомеханики с помощью таких программ.

Среди механиков-прикладников широкую известность получил метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод относится к числу вариационно-разностных. В нем осуществляется дискретизации расчетной области, занимаемой телом, на конечные элементы. Для плоской области чаще всего это треугольники и параллелограммы, а для пространственной – тетраэдры и параллелепипеды. Внутри каждого элемента задаются функции формы, определяющие перемещения произвольной точки внутри элемента по перемещениям узловых точек (точки стыковки конечных элементов). Координатные функции в этом случае будут всюду равны нулю, кроме конечного элемента, внутри которого они будут совпадать с функциями формы. В качестве неизвестных коэффициентов берутся узловые перемещения. Далее задача (результат процесса минимизации функционала энергии) сводится к чисто алгебраической проблеме решения системы уравнений.

Хотя МКЭ и является эффективным методом исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций разнообразных форм, он имеет достаточно существенный недостаток, а именно: проверка надежности полученных численных результатов, как правило, осуществляется только сопоставлением с их имеющимися точными или известными решениями.

Таким образом, МКЭ сводится к аппроксимации сплошной среды с бесконечным числом степеней свободы совокупностью подобластей (или элементов), имеющих конечное число степеней свободы. Затем между этими элементами каким-либо способом устанавливаются взаимосвязи, т.е. МКЭ представляет собой попытку преодолеть вычислительные трудности, связанные с проблемой сплошности среды (получение численного решения задач теории упругости в этом случае весьма затруднительно), путем его разбиения на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в выбранных (узловых) точках. В этих точках вводятся фиктивные силы, эквивалентные поверхностным напряжениям и распределенные по границам элементов. Если такая идеализация допустима, то любая задача сразу приводит исследователя к стандартным задачам строительной механики, а методика решения таких задач хорошо известна многим инженерам.

Исследователям удалось получить достаточное количество аналитических или численных решений плоских задач, которые всегда выделяются особо. Во-первых, такие решения являются результатом успешного применения численных методов; во-вторых, при решении плоских краевых задач геомеханики используются значительные математические упрощения, по сравнению с пространственными; в-третьих, существующие точные аналитические решения ряда двумерных задач позволяют оценить надежность и точность самих численных методов.

Однако реальное поведение массива в условиях увеличения глубины отработки и постоянно усложняющихся горно-геологических условий (ГГУ) приводит исследователя к необходимости решения задач в трех- и четырехмерной (с учетом динамических явлений) постановках. Несмотря на сложность получения решений в этих случаях, метод конечных элементов может также оказаться эффективным. Отметим, что при решении прикладных задач геомеханики, как правило, не рассматривается геометрическая нелинейность процесса деформирования горных пород, учет которой существенно необходим во многих случаях горного производства. Метод конечных элементов является достаточно универсальным, чтобы преодолеть и эту трудность.

Таким образом, применение универсальных численных методов, таких как МКЭ и МКР, и разработка прикладной части эффективных вычислительных программ позволяет не только своевременно предотвращать опасные проявления горного давления в выработках, но и позитивно решать вопросы безопасности ведения горных работ.

Для решения геомеханических задач при помощи МКЭ необходимо знать не только конструктивные особенности выработки, механические свойства массива горных пород (модуль Юнга E, коэффициент Пуассона v), но и вид потенциала П (работу деформации), определяющего связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij}.

Критерием выбора вида упругого потенциала является адекватность математического описания процесса деформирования реальному поведению массива горных пород. При малых деформациях используемый упругий закон должен соответствовать закону Гука. На практике при выборе потенциала предпочтение отдается потенциалам наиболее простых форм. Чаще всего используют разложение потенциала П по степеням его инвариантов I_1, I_2 и I_3:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_{ijk}(I_1-3)^i(I_2-3)^j(I_3-1)^k ,$$

где $C_{000} = 0$, а остальные неизвестные коэффициенты определяются из эксперимента, т.е. используется феноменологический подход.

Простейшим упругим потенциалом данного класса является неогуковский потенциал (потенциал Трелоара)

$$\Pi = \frac{\mu}{2}(I_1-3) ,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1$ – первый инвариант тензора деформаций, который связан с относительным изменением объема (объемной деформацией), $\mu = E/[2(1-\nu)]$ – модуль сдвига.

Часто для решения конкретных прикладных задач используется и потенциал Муни

$$\Pi = \frac{1}{4}\mu\big[(1+\beta)(I_1-3)+(1-\beta)(I_2-3)\big] =$$

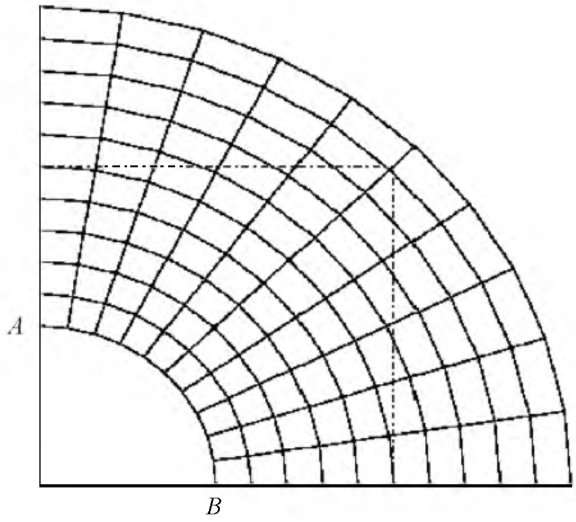
$$= C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3) ,$$

при $\beta = 1$ ($C_2 = 0$) переходящий в неогуковский потенциал.

Для упругой среды (грунтового массива) потенциал представляется в следующем виде [2]:

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{1}{2}\mu\Gamma^2 , \qquad (1)$$

где $k = 1 - 2\nu/E$ – модуль объемного сжатия; $\Gamma = 2\sqrt{I_2'}$ – интенсивность деформаций сдвига; I_2' – второй инвариант девиатора деформаций,



Разбиение массива горных пород на конечные элементы вокруг одиночной подземной горной выработки кругового сечения

$$I_2' = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 =$$

$$= [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]/6.$$

Поскольку массив горных пород предполагается изотропным, потенциал является только функцией главных инвариантов тензора деформации: $\Pi = \Pi(I_1, I_2, I_3)$. Для того, чтобы преобразовать равенство (1) к главным инвариантам тензора деформации, запишем $\Gamma^2 = (2\sqrt{I_2'})^2$ с учетом $\varepsilon = I_1$ в виде

$$\Pi = \frac{E}{6}\left[\frac{I_1^2}{1-2\nu} + \frac{2I_1^2 - 6I_2}{1+\nu}\right]. \qquad (2)$$

Равенство (2) можно преобразовать, воспользовавшись упругой константой Ламе $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$. Тогда для упругого грунтового массива окончательно получим

$$\Pi = \frac{\lambda}{\nu}\left[\frac{I_1^2}{2}(1-\nu) - I_2(1-2\nu)\right],$$

где $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$ – второй инвариант тензора деформаций; λ – константа Ламе; ν – коэффициент Пуассона; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные деформации.

Формулы для сжимающих подземную горную выработку напряжений известны и являются широко применяемыми в геомеханике характеристиками напряженно-деформированного состояния массива в приконтурной зоне выработки:

$$\sigma_y = \gamma H; \;\; \sigma_x = \lambda\gamma H; \;\; \sigma_{xy} = 0,$$

где σ_x, σ_y, σ_{xy} – компоненты тензора напряжений; γ – объемный вес массива пород; λ – коэффициент бокового распора (давления); H – глубина заложения выработки.

Сразу укажем, что для простоты расчетов иногда λ принимается равным единице и это условие равносильно равномерности распределения напряжений вокруг круглой выработки, хотя на практике чаще рассматриваются другие его значения (0,6-0,7) и даже $\lambda > 1$.

Для проверки эффективности разработанной вычислительной программы, основанной на МКЭ, была решена классическая задача по определению НДС неподкрепленной выработки круглого сечения в однородном и изотропном массиве, физико-механические свойства которого заранее известны. Поскольку указанная задача является осесимметричной, рассматривается четверть выработки, расположенная в первом квадранте. После задания входных параметров вычислительная программа автоматически разбивает область на конечные элементы и выводит разбиение на экран (см. рисунок). Выходными параметрами программы являются компоненты вектора смещений, тензоров деформаций и напряжений слоев, прилегающих к выработке массива. Последние, в конечном итоге, определяют как безопасность ведения горных работ, так и необходимые мероприятия по закреплению подземных горных выработок. Следует отметить, что решение подобной задачи для пластинки с круглым отверстием выполнено многими исследователями по различным методикам. Их результаты и были взяты за основу в качестве критерия оценки результатов, полученных от применения разработанной вычислительной программы.

Приведем результаты численного расчета при следующих значениях параметров:

$E = 2 \cdot 10^4$ МПа; радиус выработки $R = 1{,}5$ м; $\gamma = 2 \cdot 10^4$ Н/м^3; $H = 100$ м; $\nu = 0{,}45$; $\lambda = 0{,}65$. При таких числовых параметрах получены значения сжимающих выработку напряжений $\sigma_y = 2$ МПа, $\sigma_x = 1{,}3$ МПа, $\sigma_{xy} = 0$; в точках A и B: $u\big|_A \cong 0{,}14$ см, $u\big|_B \cong 0{,}11$ см.

Таким образом, разработан и реализован достаточно эффективный алгоритм численного решения задач теории упругости (на примере деформации подземной горной выработки кругового сечения). Сравнение результатов расчета по разработанной вычислительной программе с результатами, полученными другими авторами и по другим численным и аналитическим методам, указывает на их вполне пригодную сопоставимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Господариков А.П.* Метод решения нелинейных задач механики горных пород при подземной разработке пластовых месторождений. СПб, 1999.
2. *Черников А.К.* Теоретические основы геомеханики. СПб, 1994.
3. Continuum and Distinct Element Modeling in Geomechanics: Proceedings of 2nd International FLAC/DEM Symposium, Melbourne, Australia, 14-16 February 2011.

REFERENCES

1. *Gospodarikovov A.P.* The method of the computation of the nonlinear problems of rock massifs. Saint Petersburg, 1999.
2. *Chernikov A.K.* Theory of geomechanics. Saint Petersburg, 1994.
3. Continuum and Distinct Element Modeling in Geomechanics: Proceedings of 2nd International FLAC/DEM Symposium, Melbourne, Australia, 14-16 February 2011.