УДК 519.6 (075.8)

И.В.ИВАНОВА, *д-р техн. наук, профессор, 1ivir@mail.ru, rilala_spb@mail.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург

I.V.IVANOVA, *Dr. in eng. sc., professor, 1ivir@mail.ru, rilala_spb@mail.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), Saint Petersburg

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОНЯТИЙ КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Для современных информационных систем характерны не только большие объемы, но и сложность хранимых данных. Сложность данных проявляется в том, что они находятся в различных взаимосвязях. Таким образом, сложные данные представляются в виде набора некоторых элементарных объектов и совокупности отношений, связывающих эти объекты. Сложные информационные системы формализуются такими понятиями, как граф, мограф и в последнее время как нейронная сеть. Рассмотрена классификация понятий конечной алгебры таких, как соответствие и отношение (тернарное, бинарное). Предполагается использовать специальные виды отношений и их свойства для описания элементов нейронных сетей.

***Ключевые слова*:** классификация отношений, элементы нейронной сети.

CLASSIFICATION OF THE FINITE ALGEBRA CONCEPTS FOR THE DESCRIPTION OF NEURAL NETWORK ELEMENTS

Contemporary information systems are characterized not only by the large volume of data stored, but also by its complexity. This complexity manifests in various interconnections this data holds. Thus, complex data is presented as a set of some basic items and a body of connections linking the data items. Complex information systems are formalized with the concepts of graph, mograph and, lately, neural network. Classification of the finite algebra concepts, such as correspondence and relation (ternary or binary), is examined. Specific kinds of relations and their properties are intended to use for the description of neural network elements.

***Key words*:** classification of relation, neural network elements.

Главное достоинство нейросетевых моделей, которые лежат в основе архитектур будущих нейрокомпьютеров, состоит в том, что это модели, поддающиеся изменениям, параметры в которых не имеют точного значения. Серьезное знакомство с теорией перцептронов требует знания базовых определений и теорем, совокупность которых и представляет собой базовую основу для всех последующих видов искусственных нейронных сетей. Как минимум, необходимо понимание, что такое перцептрон, описанный Ф.Розенблаттом.

Простым перцептроном называется любая система, удовлетворяющая следующим пяти условиям:

- в системе имеется только один R-элемент (естественно, он связан со всеми A-элементами);
- система представляет собой перцептрон с последовательными связями, идущими только от S-элементов к A-элементам и от A-элементов к R-элементам;
- веса всех связей от S-элементов к A-элементам (S-A-связей) неизменны;
- время передачи каждой связи равно либо нулю, либо фиксированной постоянной τ;

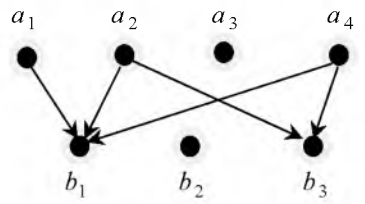


Рис.1. Граф соответствия

• все активирующие функции *S*-, *A*-, *R*-элементов имеют вид $U_i(t) = f(a_i(t))$, где $a_i(t)$ – алгебраическая сумма всех сигналов, поступающих одновременно на вход элемента u_i^*.

Цифровая схемотехника предоставляет нейроконструкторам наиболее богатый инструментарий. Поэтому неудивительно, что наибольшее распространение получили именно цифровые нейрокомпьютеры. Это, по существу, специализированные матричные ускорители, использующие матричный, послойный характер обработки сигналов в нейросетях. Широко используются стандартные процессоры обработки сигналов (DSP – Digital Signal Processors), оптимизированные под такие операции. Нейросети наиболее приспособлены к решению широкого круга задач, так или иначе связанных с обработкой образов. Вот список типичных постановок задач для нейросетей:

• аппроксимация функций по набору точек (регрессия);

• классификация данных по заданному набору классов;

• кластеризация данных с выявлением заранее неизвестных классов-прототипов;

• сжатие информации;

• восстановление утраченных данных;

• ассоциативная память;

• оптимизация, оптимальное управление.

Этот список можно было бы продолжить. Заметим, однако, что между всеми этими внешне различными постановками задач существует глубокое родство. За ними просматривается некий единый прототип, позволяющий при известной доле воображения сводить их друг к другу [2].

* http://ru.wikipedia.org/wiki

Для современных информационных систем характерны не только большие объемы, но и сложность хранимых данных. Сложность данных проявляется в том, что они находятся в различных взаимосвязях. Таким образом, сложные данные представляются в виде набора некоторых элементарных объектов и совокупности отношений, связывающих эти объекты. Сложные информационные системы формализуются такими понятиями, как граф, мограф и в последнее время нейронная сеть [1, 3].

Рассмотрим классификацию бинарных отношений на конечном множестве. Для этого нам надо ввести важное, «неопределяемое» понятие – соответствие, играющее одну из центральных ролей в математике. Этот термин используется, когда элементы одного множества необходимо сопоставить по некоторому правилу с элементами другого множества. Говорят, что между множествами A и B установлено соответствие φ, если из всевозможных пар $\langle a,b\rangle$, где $a \in A$, и $b \in B$, выбрано некоторое их подмножество φ, т.е. $\varphi \subseteq A \times B$.

Пусть, например, множество A образовано из четырех элементов, а множество B из трех, т.е. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Предположим, что некоторые элементы множества A соответствуют некоторым элементам множества B; например, элементы a_1 и a_2 соответствуют элементу b_1, кроме того, a_2 соответствует элементу b_3, а элемент a_4 соответствует элементам b_1 и b_3. Следовательно, мы можем из множества пар типа $\langle a_i, b_j\rangle$ составить соответствие

$$\varphi = \langle a_1,b_1\rangle, \langle a_2,b_1\rangle, \langle a_2,b_3\rangle \langle a_4,b_1\rangle, \langle a_4,b_3\rangle.$$

Наглядно это соответствие можно изобразить в виде графа (рис.1).

Граф имеет особые вершины, благодаря которым получает особые свойства:

• α – вершина, из которой не выходит ни одна стрелка (на рис.1 это вершина a_3, так как элемент a_3 не находится в соответствии ни с каким элементом из множества B);

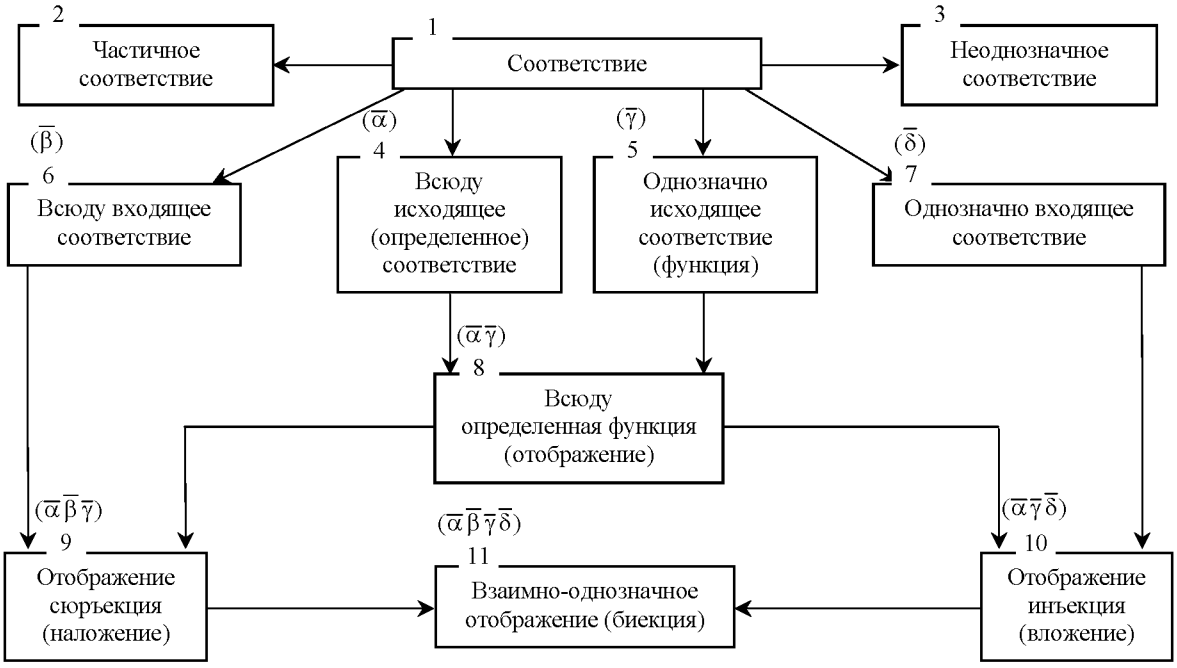


Рис.2. Классификация основных соответствий по типам.
Над блоками 4-11 указано, какие из «отрицательных» свойств отсутствуют у данного типа соответствия

• β – вершина, в которую не входит ни одна стрелка (вершине b_2 не соответствует ни один элемент из множества A);

• γ – вершина из которой выходит более одной стрелки (например, элемент a_2 соответствует элементам b_1 и b_3);

• δ – вершина, в которую входит более одной стрелки (элементу b_1 соответствуют три элемента: это a_1, a_2 и a_4).

Как мы увидим далее, именно эти четыре свойства являются «отрицательными» в том смысле, что чем у отношения больше «хороших» свойств (имеющих наиболее важное значение), тем у него меньше свойств среди перечисленных. Отсутствие у отношения некоторого свойства (например, α) будем обозначать $\overline{\alpha}$.

В общем случае соответствие обозначается в виде набора символов

$$\varphi: A \to B \quad \text{или} \quad \varphi: (A_1 \subseteq A) \to (B_1 \subseteq B),$$

при этом во втором случае подчеркивается, что оно установлено для подмножеств $A_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$. Другое распространенное обозначение соответствий имеет вид $\varphi(a) = b$, где $a \in A_1$, $b \in B_1$.

Попробуем упорядочить возможные типы соответствий, классифицируя их по отсутствию тех или иных «отрицательных» свойств (рис.2).

Обозначения и определения основных соответствий, пронумерованных на рис.2, следующие:

1. Соответствие $\varphi \subseteq A \times B$

$$\varphi: (A_1 \subseteq A) \to (B_1 \subseteq B),$$

$$\forall a \in A_1, \exists b \in B_1 \quad [\varphi(a) = b].$$

2. Частичное соответствие

$$\varphi: (A_1 \subset A) \to (B_1 \subset B);$$

не всюду определенное (не всюду исходящее) соответствие

$$\exists a \in A_1, \forall b \in B_1 \quad [\varphi(a) \neq b];$$

не всюду входящее (не сюръективное) соответствие

$$\exists b \in B_1, \forall a \in A_1 \quad [\varphi(a) \neq b].$$

3. Неоднозначное соответствие, нефункциональное

$$\exists a \in A_1, \exists (b_1 \neq b_2) \in B_1 \quad [b_1 = \varphi(a) = b_2];$$

с повторением (неинъективное)

$$\exists(a_1 \neq a_2) \in A_1, \exists b \in B_1 \quad [\varphi(a_1) = b = \varphi(a_2)].$$

4. Всюду определенное (всюду исходящее) соответствие

$$\varphi: A \to (B_1 \subseteq B),$$

$$\forall a \in A, \exists b \in B_1 \quad [\varphi(a) = b].$$

5. Функциональное (однозначно исходящее) соответствие, т.е. функция $f(a)$

$$f: (A_1 \subseteq A) \to (B_1 \subseteq B),$$

$$\forall a \in A_1, \exists! b \in B_1 \quad [f(a) = b].$$

6. Всюду входящее (накрывающее или сюръективное) соответствие

$$\varphi: (A_1 \subseteq A) \to B, \ \forall b \in B, \exists a \in A_1 \quad [\varphi(a) = b].$$

7. Безповторное, т.е. однозначно входящее (вкладываемое, или инъективное) соответствие

$$\varphi: (B_1 \subseteq B) \leftarrow (A_1 \subseteq A),$$

т.е.

$$\forall(a_1 \neq a_2) \in A_1, \exists(b_1, b_2) \in B_1$$

$$[\varphi(a_1) = b_1 \neq b_2 = \varphi(a_2)].$$

8. Всюду определенная функция $f(a)$, или отображение

$$f: A \to (B_1 \subseteq B),$$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B_1 \quad [f(a) = b].$$

9. Отображение – сюръекция, или наложение A на B,

$$f: A \to B; |A| \geq |B|,$$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \ \text{ и } \ \forall b \in B, \exists a \in A \ [f(a) = b].$$

10. Отображение – инъекция, или вложение A в B,

$$f: (B_1 \subseteq B) \leftarrow A; |B| \geq |A|,$$

$$\forall(a_1 \neq a_2) \in A, \exists(b_1, b_2) \in B_1$$

$$[f(a_1) = b_1 \neq b_2 = f(a_2)].$$

11. Взаимно-однозначное отображение, или биекция,

$$f: A \leftrightarrow B; |A| = |B|,$$

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \ \text{ и } \ \forall b \in B, \exists! a \in A \ [f(a) = b].$$

Частичные соответствия характеризуются тем, что для некоторых элементов $a \in A$ и (или) $b \in B$ соответствие вообще не установлено, а неоднозначные – тем, что есть по крайней мере один элемент $a \in A$, которому соответствует несколько элементов из B и (или), наоборот, нескольким элементам из A соответствует один и тот же элемент $b \in B$.

Заметим, что иногда частичным называют соответствие, не всюду определенное.

Функциональное соответствие является одним из важнейших в математике и характеризуется тем, что если $\varphi(a) = b$, то элемент b единственен. Здесь $a \in A, b \in B$. Функциональное соответствие называют также однозначным, или функцией; для него мы будем использовать обозначение f. Подчеркнем, что в общем случае f – лишь частичное соответствие.

Из рис.2 видно, что отображение (тоже очень важное математическое понятие) является одновременно всюду определенным и функциональным соответствием (блок 8). Это означает, что функция $f(a)$ имеет смысл для любых $a \in A$, т.е. если $f(a) = b$, то элемент b единственен для любого a при $a \in A, b \in B$.

В свою очередь, сюръективное отображение – это наложение (накрытие) A на B (блок 9), а инъективное – вложение A в B (блок 10). Для конечных множеств A и B первое из них выполнимо лишь при $|A| \geq |B|$, а второе – при $|A| \leq |B|$. Взаимно-однозначное отображение, или *биекция* (блок 11), обозначаемое $f: A \leftrightarrow B$, для конечных множеств осуществима лишь при $|A| = |B|$. Следовательно, биекция характеризуется тем, что для любого $a \in A$ элемент $b \in B$ единственен и наоборот – для любого $b \in B$ элемент $a \in A$ также единственен.

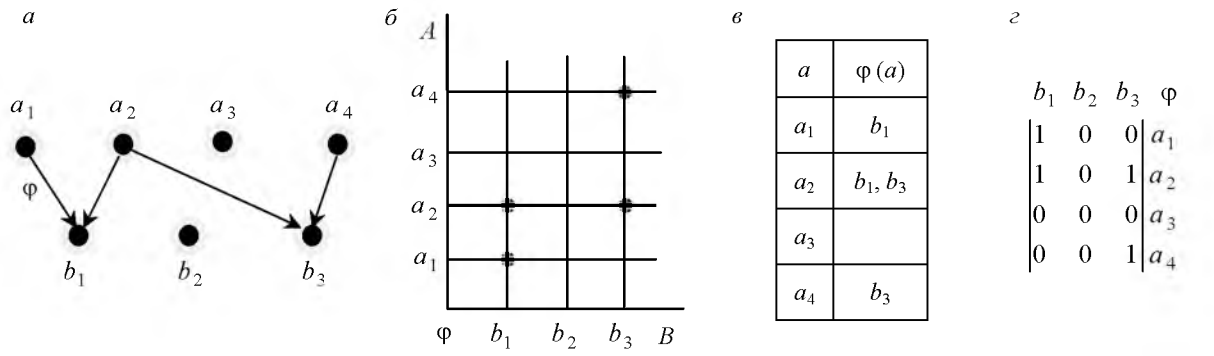


Рис.3. Представление соответствий: *а* – граф; *б* – график; *в* – таблица; *г* – матрица

Способы задания соответствий на конечных множествах. Укажем четыре наглядных способа задания и представления соответствий на конечных множествах.

На рис.3 приведены примеры представления в виде графа, графика, таблицы и матрицы одного и того же соответствия $\varphi \subseteq A \times B$, где $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ и

$$\varphi = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_1\rangle, \langle a_2, b_3\rangle \langle a_4, b_3\rangle\}$$

Соответствия с помощью графа задаются так: элементы множеств A и B представляются различными точками на плоскости, и точка $a \in A$ соединяется с точкой $b \in B$, если $b = \varphi(a)$, причем стрелка исходит из точки a и входит в точку b. Иногда у стрелки ставят символ φ.

Пример. Определить тип соответствия φ на рис.3.

Решение. Так как элементу a_3 не соответствует ни один из элементов $b \in B$, т.е. $\varphi(a_3) \notin B$, то φ не всюду определено. Имеется элемент b_2, которому не соответствует ни один из элементов $a \in A$, т.е. $\varphi(a) \notin b_2$, поэтому φ не сюръективно. Следовательно, φ – частичное соответствие (см. рис.2, блок 2), т.е. $\varphi: (A_1 \subset A) \to (B_1 \subset B)$, где $A_1 = \{a_1, a_2, a_4\} \subset A$; $B_1 = \{b_1, b_3\} \subset B$.

Далее, φ – неоднозначное соответствие (блок 3). Это следует из того, что $b_1 = \varphi(a_2) = b_3$ и φ не функционально; $\varphi(a_1) = b_1 = \varphi(a_2)$ и φ не инъективно.

Итак, соответствие φ частичное и неоднозначное со всеми «отрицательными» свойствами.

Изменим граф (рис.3, *а*), построив графы соответствий с различными «положительными» свойствами и их сочетаниями (рис.4). В ряде случаев множество B пришлось расширить за счет элементов b.

Отношения. Перейдем к рассмотрению соответствий между элементами одного и того же множества. Соответствие $\varphi \subseteq A^n$, где A^n – декартова степень, называется *n*-арным, или *n*-местным, отношением на множестве A и обозначается $\varphi: A^n \to A$. При $n = 1$ имеем отношение $\varphi \subseteq A$, которое называется унарным; при $n = 2$ – отношение $\varphi \subseteq A^2$, называемое бинарным; при $n = 3$ – тернарное отношение $\varphi \subseteq A^3$ и т.д.

Таким образом, унарное отношение – это просто некоторое подмножество в A, бинарное отношение выделяет некоторые пары $\langle a_1, a_2\rangle$, а тернарное – тройки $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, где $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Например, предположив $b_i \equiv a_i$ на рис.3, мы имеем следующие пары бинарного отношения: $\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_4, a_3\rangle$. Для рис.4 получим по аналогии:

а) $\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_3, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_4, a_3\rangle$;

б) $\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_4, a_3\rangle$;

в) $\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_4, a_2\rangle, \langle a_4, a_3\rangle$;

г) $\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_2\rangle, \langle a_2, a_3\rangle$;

д) $\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_2,a_1\rangle,\langle a_3,a_1\rangle,\langle a_4,a_3\rangle$;

е) $\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_2,a_1\rangle,\langle a_3,a_2\rangle,\langle a_4,a_3\rangle$;

ж) $\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle,\langle a_3,a_4\rangle,\langle a_4,a_3\rangle$;

з) $\langle a_1,a_1\rangle,\langle a_2,a_2\rangle,\langle a_3,a_4\rangle,\langle a_4,a_3\rangle$.

Вначале для наглядности разделим отношения на те же типы, что и соответствия, а в дальнейшем классифицируем их по специфическим свойствам.

Отношение – это соответствие на одном и том же множестве A. В основном мы рассматриваем конечные множества A; для них неравенства $|A|\geq|A|$ и $|A|\leq|A|$ эквивалентны равенству $|A|=|A|$, т.е. «наложение» и «вложение» совпадают с бинарным отношением – биекцией.

Кроме того, так как $|A^2|=|A|$, то не частичное тернарное отношение и, естественно, отношения большей арности не могут быть инъективными (и, конечно, биекциями). Следовательно, число типов отношений $\varphi: A\to A$ на множестве A меньше, чем число аналогичных типов соответствий $\varphi: A\to B$ (рис.5, 6)

Обозначения и определения основных бинарных отношений (в соответствии с нумерацией на рис.5) следующие:

1. Бинарное отношение $\varphi\subseteq A\times A\triangleq A^2$; $\varphi:(A_1\subseteq A)\to(A_2\subseteq A)$.

2. Частичное бинарное отношение (на рис.2 и 5 блоки 2).

3. Неоднозначное бинарное отношение (на рис.2 и 5 блоки 3).

4. Всюду определенное бинарное отношение

$$\varphi: A\to(A_2\subseteq A);\ \forall a\in A,\exists b\in A_2\ [\varphi(a)=b]$$

5. Функциональное бинарное отношение, оператор или одноместная функция $f(a)$

$$f:(A_1\in A)\to(A_2\in A);$$

$$\forall a\in A_1,\exists! b\in A_2\ [f(a)=b]$$

6. Бесповторное бинарное отношение

$$\varphi:(A_2\in A)\leftarrow(A_1\in A);$$

$$\forall(a_1\neq a_2)\in A_1,\exists(b_1,b_2)\in A_2$$

$$[\varphi(a_1)=b_1\neq b_2=\varphi(a_2)]$$

7. Всюду определенная функция $f(a)$, унарная операция, преобразование или подстановка

$$f: A\to(A_2\subseteq A);$$

$$\forall a\in A,\exists! b\in A_2\quad[f(a)=b].$$

8. Биекция, взаимно-однозначное преобразование, обратимая подстановка или перестановка

$$f: A\leftrightarrow A;$$

$$\forall a\in A,\exists! b\in A \text{ и } \forall b\in A,\exists! a\in A\ [f(a)=b]$$

Обозначения и определения основных тернарных отношений (в соответствии с нумерацией на рис.6) следующие:

1. Тернарное отношение

$$\varphi\subseteq A\times A\times A\triangleq A^3;$$

$$\varphi:(A_1\subseteq A^2)\to(A_2\subseteq A);$$

$$\forall\langle a,b\rangle\in A_1,\exists c\in A_2\ [\varphi(a,b)=c].$$

2. Частичное тернарное отношение (на рис.2 и 5 блоки 2).

3. Неоднозначное тернарное отношение (на рис.2 и 5 блоки 3).

4. Всюду определенное тернарное отношение

$$\varphi: A^2\to(A_2\subseteq A);$$

$$\forall(a,b)\in A,\exists c\in A_2\ [\varphi(a,b)=c]$$

5. Функциональное тернарное отношение или двухместная функция $f(a,b)$

$$f:(A_1\subseteq A^2)\to(A_2\subseteq A);$$

$$\forall\langle a,b\rangle\in A_1,\exists! c\in A_2\ [f(a,b)=c]$$

6. Всюду определенная функция $f(a,b)$ или бинарная операция

$$f: A^2\to(A_2\subseteq A);\ f(a,b)\triangleq a*b,$$

$$\forall(a,b)\in A,\exists! c\in A_2\ [a*b=c].$$

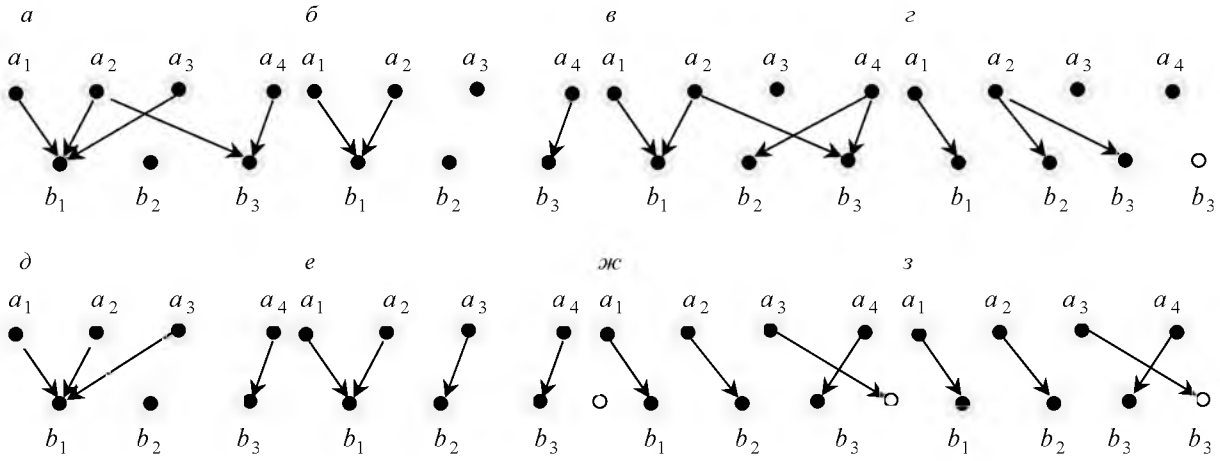


Рис.4. Различные типы соответствий с «положительными» свойствами: *а* – всюду определенное; *б* – функциональное; *в* – сюръективное; *г* – инъективное; *д* – отображение; *е* – отображение-наложение *A* на *B*; *ж* – отображение-вложение *A* в *B*; *з* – отображение-биекция

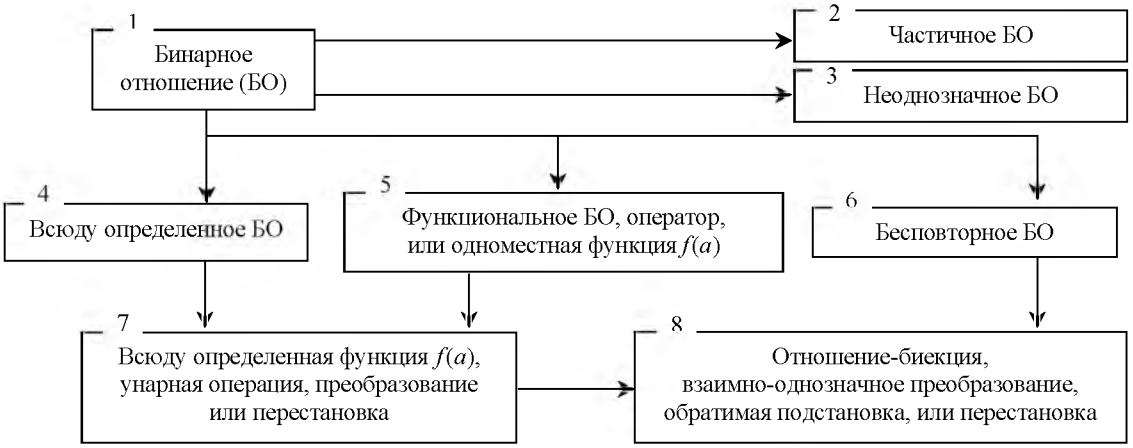


Рис.5. Классификация бинарных отношений на конечном множестве

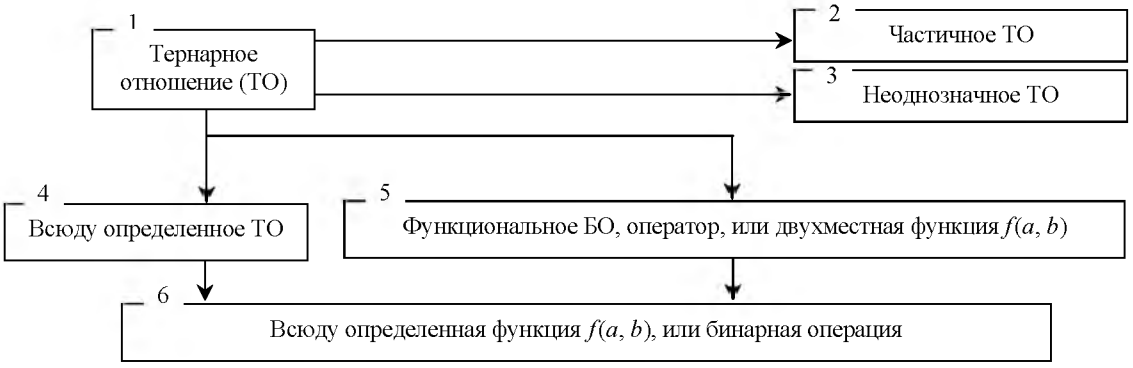


Рис.6. Классификация тернарных отношений на конечном множестве

Операции. Функциональное отношение f (как и соответствие) называется функцией, причем бинарное отношение – одноместной функцией $f(a)$, а тернарное – двухместной функцией $f(a,b)$, $f(a_1,a_2)$ и т.п.

Всюду определенная функция $f: A^n \to (A_n \subset A)$ называется n-арной операцией на множестве A.

Под операцией, или композицией, понимается действие, закон, соответствие, правило, позволяющее по любым n элементам множества находить его $(n+1)$-й элемент; например, при $n = 2$ по двум элементам находить третий, как в случае обычного сложения двух целых рациональных чисел. Каждая операция на множестве A сопоставляет набору из n упорядоченных, т.е. взятых в строго определенном порядке элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ множества A, некоторый (единственный!) элемент a_{n+1} этого же множества A, причем не обязательно, чтобы все $n+1$ элементов были различны. Подчеркнем, что порядок элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, вообще говоря, важен. Так, для операции деления на множестве рациональных чисел в общем случае $a : b \neq b : a$.

Число n называют арностью или рангом операции и различают нульарные ($n = 0$), унарные ($n = 1$), бинарные ($n = 2$), тернарные ($n = 3$) операции и т.д.

Нульарная операция выделяет некоторый элемент данного множества, например 0,1. Унарная операция (преобразование, на конечном множестве подстановка), обозначаемая $f(a)$, $\bar{a}, a'$ и т.п., связывает пары a и $f(a)$, a и $\bar{a}$, a и a' элементов по определенному правилу. Логарифм, обратная функция, кубическая функция и т.п. – примеры унарных операций (на разных множествах).

Важный класс составляют бесповторные унарные операции. Бесповторная подстановка (бесповторное преобразование) называется перестановкой. Заметим, что в ряде работ бесповторное преобразование называют подстановкой, а обычное преобразование – обобщенной подстановкой.

Наиболее важное значение имеют бинарные операции, позволяющие, как отмечалось, по любым двум элементам множества находить третий; для бинарных операций используются обозначения $(a, b) \to c$, $f(a, b) = c$ и др., но чаще всего символ операции располагают между элементами, например, $a + b$ или опускают его, как при умножении – ab.

Задание отношений и операций на конечных множествах. Бинарные отношения, как и соответствия, можно задавать с помощью графа, графика, таблицы и матрицы (рис.7).

Зададим теперь бинарные отношения матрицами и построим по ним графы. Бинарное отношение может быть задано двоичной квадратной матрицей, состоящей из нулей и единиц. Ее элемент a_{ij}, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца, определяется так: $(a_i \varphi a_j) \Rightarrow (a_{ij} = 1)$; $(a_i \bar{\varphi} a_j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$, где запись $(a_i \varphi a_j)$ означает, что элемент a_i находится в отношении φ с элементами a_j, а запись $(a_i \bar{\varphi} a_j)$ – что не находится. Пусть бинарные отношения заданы матрицами:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} E \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \bar{E} \triangleq \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Соответствующие матрицам графы представлены на рис.8.

Граф на рис.8, *а* задает пустое отношение, обозначаемое символом $\varnothing$, или 0, а граф на рис.8, *б* – полное, обозначаемое 1. В первом случае никакой элемент не находится в отношении ни с другими элементами, ни с самим собой, а во втором – картина полностью обратная. Особое значение имеет отношение, задаваемое единичной матрицей E (граф на рис.8, *в*); такое отношение называется диагональным, тривиальным, или от-

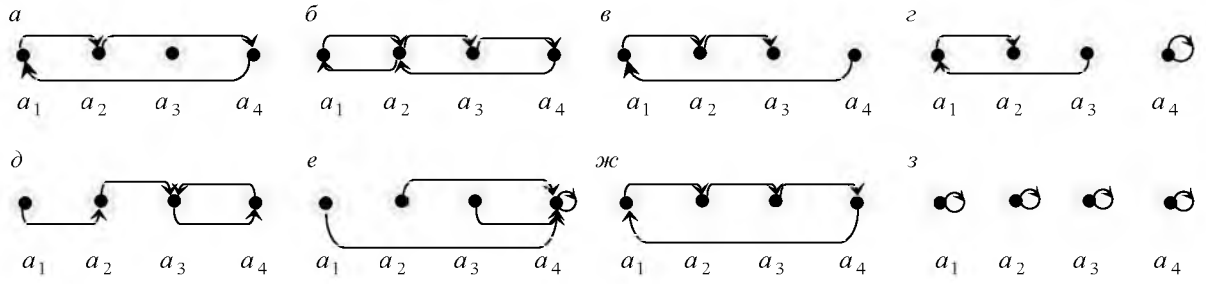


Рис.7. Примеры графов бинарных отношений: *а* – частичное (не всюду исходящее и не всюду входящее) и неоднозначное (не функциональное и с повторением); *б* – всюду определенное, но нефункциональное и с повторением; *в* – функциональное, но не всюду определенное и с повторением; *г* – бесповторное, но не всюду определенное и не функциональное; *д* и *е* – подстановки (преобразования); *ж* и *з* – перестановки. Здесь отношение *е* – вырожденное, т.е. константа; а отношение *з* – тождественное



Рис.8. Графы отношений: *а* – пустого; *б* – полного; *в* – диагонального (тождественной перестановки); *г* – антидиагонального

ношением равенства, и обозначается буквой *E*. Наконец, граф на рис.8, *г* соответствует отношению, называемому антидиагоналъным. В заключение назовем типы отношений, задаваемых графами (рис.8): *а* – частичное (даже нигде не определенное); *б* и *г* – подстановки; *в* – перестановка. Перестановка, задаваемая диагональной матрицей, называется тождественной.

Тернарное отношение φ на конечном множестве *A* удобно представить в виде квадратной таблицы, в которой строки соответствуют первому элементу в паре $\langle a,b\rangle$, столбцы – второму, а на пересечении строки *a* и столбца *b* ставится элемент *c*, находящийся в данном отношении с парой $\langle a,b\rangle$ т.е. $\varphi(a,b)=c$. Приведем примеры:

1.

a \ b	α	β	γ
α	β		γ
β			(α, γ)
γ			

2.

φ	α	β	γ
α	β	β	γ
β	α	γ	β
γ	α	β	(α, β, γ)

3.

f	α	β	γ
α	β	γ	
β			α
γ		γ	

4.

a \ b	α	β	γ
α	α	β	γ
β	α	γ	β
γ	β	γ	α

На множестве $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ приведенные тернарные отношения следующие:

1) частичное (не всюду определенное) и неоднозначное, так как $\varphi(\beta,\gamma)\in\{\alpha,\gamma\}$;

2) всюду определенное (таблица заполнена полностью), но не функциональное, так как на наборе (γ,γ) значение $\varphi(\gamma,\gamma)\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ однозначно не определено;

3) не всюду определенное, но функциональное (двухместная функция f);

4) всюду определенная функция, или бинарная операция.

Таблица для бинарных операций, называемая таблицей Кэли, полностью заполнена и не содержит неопределенных или неоднозначных значений: для произвольного набора $\langle a,b\rangle$ значение $a*b$ единственно.

В заключение подытожим основные сведения о соответствиях следующим образом.

1. Соответствие $\gamma\subseteq A\times B$ (или $\varphi: A\to B$) задается между элементами разных множеств A и B.

2. Отношение есть соответствие $\varphi\subseteq A\times A\triangleq A^2$ (или $\varphi: A\to A$) между элементами одного и того же множества A.

3. Основные типы соответствий $\varphi(a)=b$, где $a\in A, b\in B$: соответствие $\to$ функция $(f: A\to B)\to$ отображение.

4. Отображения подразделяются на сюръективные (наложение множества A на B), инъективные (вложение A в B) и биективные (взаимно-однозначные отображения); последние на конечном множестве возможны лишь при $|A|=|B|$.

5. Основные типы бинарных отношений $\varphi(a)=b$, где $(a,b)\in A$: бинарное отношение $\to$ одноместная функция $f(a)$ или $(f: A\to A)\to$ унарная операция, преобразование или подстановка $\to$ перестановка.

6. Основные типы тернарных отношений $\varphi(a,b)=c$, где $(a,b,c)\in A$: тернарное отношение $\to$ двухместная функция $f(a,b)$, или $(f: A^2\to B)\to$ бинарная операция.

7. Функции $f(a)$ и $f(a,b)$ трактуются как однозначные, но возможно частичные, отношения, а операции – как всюду определенные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбатов В.А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М., 2000. 544 с.

2. *Ежов А.А.* Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе / А.А.Ежов, С.А.Шумский. http: / www. intuit. ru /

3. Математические основы цифровой техники / В.М.Муттер, В.В.Трофимов, И.В.Иванова, М.Ю.Калинушкина. СПб, 1999. 351 с.

REFERENCES

1. *Gorbatov V.A.* The fundamentals of discrete mathematics. Information mathematics. Moscow, 2000. 544 p.

2. *Ezhov A.A., Shumskiy S.A.* Neurocomputing and its use in economics and commerce. http: // www. intuit. ru /

3. *Mutter V.M., Trofimov V.V., Ivanova I.V., Kalinushkina M.Y.* Mathematical basics of digital equipment. Saint Petersburg, 1999. 351 p.