УДК 656.13:338.47; 656.13:658

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Б.Д.ПРУДОВСКИЙ, *канд. техн. наук, доцент*
А.В.ТЕРЕНТЬЕВ, *канд. техн. наук, доцент, terentich1@rambler.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург, Россия

В статье описывается графоаналитический метод определения множества Парето в задачах линейного программирования с одним ограничительным условием и двумя критериями эффективности. В практических автотранспортных задачах нередко приходится принимать решение не по одному, а сразу по нескольким показателям эффективности. Такие задачи получили название многокритериальных. Изложен аналитический метод решения многокритериальной задачи линейного программирования. Метод иллюстрируется числовыми примерами.

Ключевые слова: графоаналитический метод, множество Парето, многокритериальность, линейное программирование.

Выберем решение некоторой задачи по двум показателям эффективности k_1 и k_2 (причем каждый из этих критериев должен быть, по возможности, максимальным, т.е. $k_1 \to \max$ и $k_2 \to \max$. Изобразим все возможные решения этой задачи в виде некоторого замкнутого множества M, рассматриваемого на плоскости с осями координат k_1 и k_2 (рис.1).

Каждая точка множества M соответствует одному из решений, которое характеризуется значениями критериев k_1 и k_2. Как видно, некоторые из этих решений очень похожи. Например, решение, отмеченное точкой a, характеризуется очень маленькими значениями каждого из критериев. Решение, отмеченное точкой d, лучше решения a по критерию k_1, но уступает ему по критерию k_2. Стремление максимизировать решение по критерию k_1 приводит к выбору точки b, а максимальное значение критерия k_2 достигается при выборе решения, которому соответствует на рис.1 точка c.

Очевидно, что все наилучшие решения расположены на участке дуги $b-c$. Действительно, любое другое решение, находящееся вне этой дуги, может быть улучшено по крайней мере по одному показателю (а для большинства решений – сразу по двум). Участок $b-c$ имеет название «множество эффективных планов» или «множество Парето» и характеризуется важным свойством – ни одно решение на нем не может быть улучшено по одному из критериев без ущерба для другого [2].

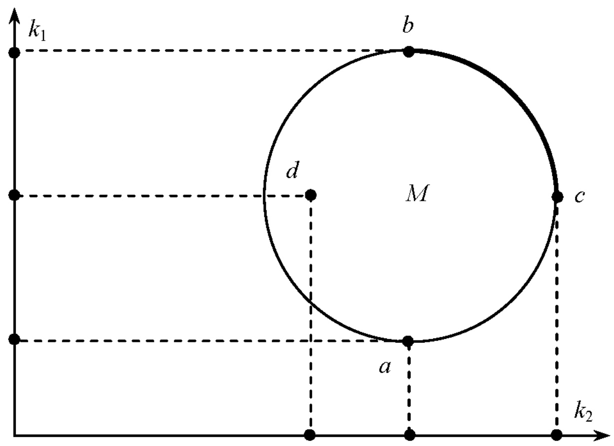

Рис.1. Множество Парето

В общем случае определение областей Парето в многокритериальных задачах связано с преодолением значительных трудностей. Однако в некоторых ситуациях удается довольно просто находить такие области. Рассмотрим графоаналитический метод нахождения множества эффективных планов для задачи линейного программирования с одним ограничительным условием и двумя критериями эффективности:

$$
\left.\begin{aligned}
&k_1 = \sum_{j=1}^{n}, a_{1j}x_j \to \max \\
&k_2 = \sum_{j=1}^{n}, a_{2j}x_j \to \max \\
&\sum_{j=1}^{n} x_j = N, x_j \ge 0, j = \overline{1,n}
\end{aligned}\right\}. \qquad (1)
$$

Рассмотрим метод решения задачи (1) на числовом примере:

$$
\left.\begin{aligned}
&k_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max \\
&k_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
&x_j \ge 0, j = \overline{1,3}
\end{aligned}\right\}. \qquad (2)
$$

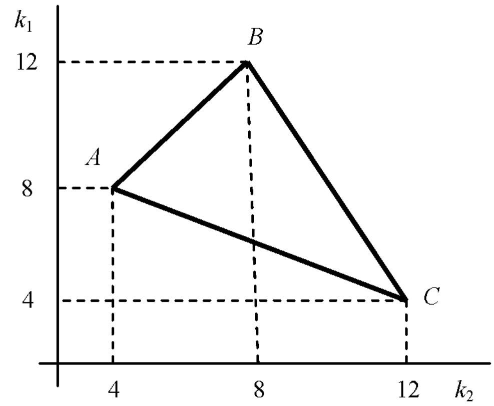

Рис.2. Множество Парето для задачи (2)

Задавая последовательно каждой переменной значение 4, получаем три точки треугольника ABC на плоскости с осями координат k_1 и k_2 (рис.2). Очевидно, что все допустимые решения этого примера находятся внутри треугольника ABC и на его границах. Множество эффективных планов (наилучших решений) находится на отрезке BC. Воспользуемся выражением уравнения прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2),

$$
\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}
$$

и составим аналитическое выражение, описывающее множество Парето в рассматриваемом примере (иначе говоря, составим уравнение отрезка BC),

$$
k_1 + 2k_2 = 28; 4 \le k_1 \le 12; 8 \le k_2 \le 12 .
$$

Как видно, критерий k_1 может принимать любое значение из замкнутого интервала |4, 12|. Выбор значения k_1 однозначно определяет значение второго критерия k_2. Например, если задаться для k_1 значением 10, то k_2 будет равным 9, если $k_1 = 8$, то $k_2 = 10$ и т.д.

В приведенном примере область Парето представляет собой отрезок прямой линии. В общем случае таких отрезков может быть несколько (множество эффективных планов выражается кусочно-линейной функцией) [1]. Рассмотрим следующий пример:

$$
\left.\begin{aligned}
&k_1 = 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max \\
&k_2 = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \max \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
&x_j \ge 0, j = \overline{1,4}
\end{aligned}\right\}. \qquad (3)
$$

Присваиваем последовательно каждой переменной значение 10 и вычисляем критерии k_1 и k_2. При $x_1 = 10$ имеем $k_1 = 70$ и $k_2 = 10$, при $x_2 = 10$ имеем $k_1 = 30$ и $k_2 = 20$ и т.д. Полученные точки откладываем на плоскости в осях координат k_1 и k_2 (рис.3). Очевидно, что все допустимые решения примера (3) находятся внутри четырехугольника $ABCD$ и на его границах, а наилучшие решения – на отрезках AB и BC.

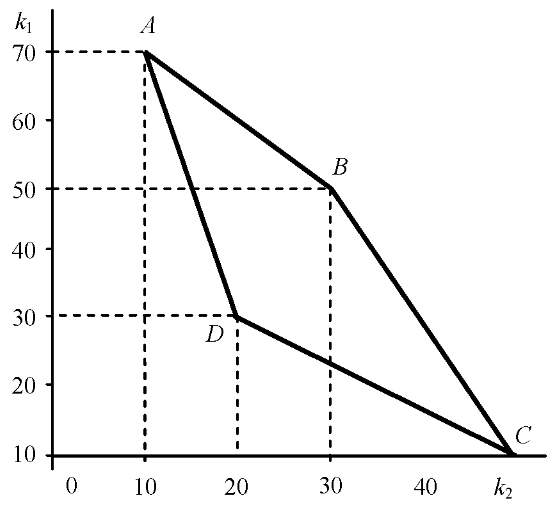

Рис.3. Множество Парето для задачи (3)

Составим аналитические выражения, описывающие множества Парето в рассматриваемом примере. Для отрезка AB

$$k_1 + k_2 = 80;\ 50 \le k_1 \le 70;\ 10 \le k_2 \le 30,$$

а для отрезка BC

$$k_1 + 2k_2 = 110;\ 10 \le k_1 \le 50;\ 30 \le k_2 \le 50.$$

Как видно, на отрезке AB полученного множества Парето критерий k_2 не может быть больше 30. Если этого недостаточно, то можно перейти на отрезок BC. Однако на этом отрезке критерий k_1 не может быть больше 50. В зависимости от степени важности критериев следует предпочтение отдавать тому или иному отрезку множества Парето.

Опишем аналитический метод решения задачи (1). Полагая последовательно $x_j = N$, получаем n точек $A_j, j=\overline{1,n}$ с координатами $A_j(N_{a1j}; N_{a2j})$. Множество Парето представляет собой выпуклую ломаную линию с вершинами в некоторых из точек A_j. Обозначим множество этих точек Q и найдем его. Прежде всего в Q входит точка, имеющая максимальную первую координату, т.е. точка A_{j*}, для которой $a_{1j*} = \max_j a_{1j}$. Если таких точек несколько, то выбирается та из них, для которой вторая координата самая большая. Обозначим координаты точки A_{j*} следующим образом: $(a_1; b_1)$. Аналогично выбирается вторая точка с координатами $(c_1; d_1)$, имеющая максимальную вторую координату. Если $a_1 = c_1$ и $b_1 = d_1$, то построение множества Q закончено (оно представляет собой единственную точку).

В противном случае выбросим из рассмотрения все точки A_j, для которых

$$Na_{1j}(b_1 - d_1) + Na_{2j}(c_1 - a_1) \le b_1c_1 - a_1d_1,$$

а из оставшихся выберем описанным способом две точки (a_2, b_2) и (c_2, d_2), для которых максимальны соответственно первая и вторая координаты. Эти две точки также входят в множество Q. Если $a_2 = c_2$ и $b_2 = d_2$, то множество Парето построено и состоит из двух отрезков, соединяющих точки с координатами $(a_1; b_1)$ и $(a_1 = c_1,\ \ b_1 = d_1)$; $(a_2 = c_2,$ $b_2 = d_2)$ и $(c_1; d_1)$.

Выбросим из рассмотрения все точки A_j, для которых выполняется неравенство

$$Na_{1j}(b_2 - d_2) + Na_{2j}(c_2 - a_2) \le b_2c_2 - a_2d_2,$$

а из оставшихся вновь выберем две точки (a_3, b_3) и (c_3, d_3) с максимальными первой и второй координатой. Продолжая далее описанную процедуру, на шаге q получим две последние точки Q с координатами (a_q, b_q) и (c_q, d_q) или одну точку с координатами $(a_q = c_q)$ и $(b_q = d_q)$. Это означает, что множество Парето найдено, а искомая ломаная линия проходит последовательно через точки

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_q, b_q),\ (c_q, d_q),\ \ldots, (c_2, d_2),\ (c_1, d_1).$$

Для обоснования изложенного алгоритма заметим, что для любых x_j, удовлетворяющих условиями задачи (1), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j (Na_{ij}),\ i = 1, 2,$$

где

$$a_j = \frac{x_j}{N} \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} a_j = 1,$$

а это означает, что множество возможных пар (k_1, k_2) – выпуклое множество, натянутое на точки A_j с координатами $(Na_{1j}; Na_{2j})$. Никакая внутренняя точка полученного выпуклого многоугольника не принадлежит множеству Парето (рис.4).

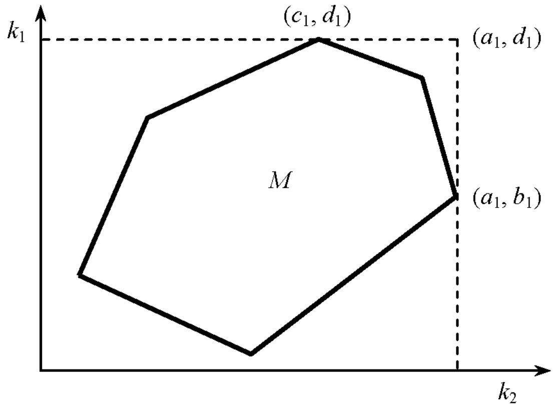

Рис.4. Множество Парето для рассматриваемого алгоритма

Точки (a_1, b_1) и (c_1, d_1) делят границу многоугольника на две части. Очевидно, что множество Парето совпадает с частью границы, лежащей ближе к точке (a_1, d_1) а изложенный алгоритм позволяет определять все точки этого множества.

В практических автотранспортных задачах нередко приходится принимать решение не по одному, а сразу по нескольким показателям эффективности [3, 4]. Такие задачи получили название многокритериальных. Выработка количественных рекомендаций в многокритериальных ситуациях связана со значительными трудностями, которые носят объективный характер. Однако приходится принимать решения в условиях многокритериальности.

Авторами разработан алгоритм решения задачи линейного программирования с двумя критериями эффективности и большим числом ограничительных условий [5]:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \to \max \\ k_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \leq c_i, \ i = \overline{1,m}, \\ x_j \geq 0, \ j = 1,n \end{array}\right\}. \quad (4)$$

Алгоритм построения множества Парето задачи (4) построен подобно алгоритму решения задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Е.С.* Управление технической эксплуатацией автомобилей М.: Транспорт, 1990. 272 с.
2. *Прудовский Б.Д.* Количественные методы управления автомобильным транспортом. М.: Транспорт, 1976. 87 с.
3. *Терентьев А.В.* Определение производственной программы по техническому обслуживанию и текущему ремонту для подвижного состава иностранного производства // Бюллетень транспортной информации. 2008. № 6 (156). С.34-36.
4. *Якунин Н.Н.* Методологические основы контроля и управления техническим состоянием автомобилей в эксплуатации: Автореферат дис. ... д-ра техн. наук. Оренбург, 2004. 37 с.
5. *Prudovskiy B.D., Terentiev A.V.* Investigation methods for «current repairs labour-intensiveness» factor for a vehicle // Life Science Journal. 2014. N 11 (10s). P.304-306. http: // www. lifesciencesite. com / lsj/life1110s/ 055_25535 life1110s 14_307_310.pdf.

REFERENCES

1. *Kuznetsov E.S.* Upravlenie tekhnicheskoi ekspluatatsiei avtomobilei (*Management of technical car maintenance*). Moscow: Transport, 1990, p.272.
2. *Prudovskii B.D.* Kolichestvennye metody upravleniya avtomobil'nym transportom (*Quantitative Methods for Traffic Control*). Moscow: Transport, 1976, p.87.

3. *Terentiev A.V.* Opredelenie proizvodstvennoi programmy po tekhnicheskomu obsluzhivaniyu i tekushchemu remontu dlya podvizhnogo sostava inostrannogo proizvodstva (*Determination of the production program of maintenance and current repairs for the rolling stock of foreign production*). Bulletin of transport information, Moskow. N 6 (156), p.34-36.

4. *Yakunin N.N.* Metodologicheskie osnovy kontrolya i upravleniya tekhnicheskim sostoyaniem avtomobilei v ekspluatatsii (*Methodological bases of monitoring and control technical condition of vehicles in operation*): The author ... Dr. of Engineering Sciences. Orenburg, 2004, p.37.

5. *Prudovskiy B.D., Terentiev A.V.* Investigation methods for «current repairs labour-intensiveness» factor for a vehicle. Life Science Journal, 2014. N 11 (10s), p.304-306. http: // www. lifesciencesite. com / lsj/life1110s/ 055_25535life1110s 14_307_310.pdf.

METHODS FOR DETERMINATION PARETO SET IN SOME LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

B.D.PRUDOVSKIY, *PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,*
A.V.TERENTIEV, *PhD in Engineering Sciences, Associate Professor, terentich1@rambler.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), St Petersburg, Russia

The paper describes the graphic-analytical method for the determination of Pareto set in linear programming with a restrictive condition and two performance criteria. In practical vehicles tasks it is common phenomenon to take decision for several performance indicators. Such problems are called multicriteria. The presented method is illustrated by numerical examples. In the final part of the article analytical method for solving multiobjective linear programming problems .

Key words: graphic-analytical method, the Pareto set, multicriteriality, linear programming.