УДК 517 (070)

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Д.А.ПЕРВУХИН, *д-р техн. наук, профессор, pervuchin@rambler.ru*
А.А.КЛАВДИЕВ, *канд. техн. наук, доцент, kss1959@mail.ru*
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург, Россия

Современное развитие техники характеризуется резким усложнением задач, решаемых при изготовлении изделий, высокими требованиями к их надежности, сжатыми сроками создания и внедрения в эксплуатацию, стремлением сократить затраты на разработку изделия при удовлетворении заданных условий.

Существующие методы оценки и контроля качества изделия по результатам испытаний оказываются часто неэффективными в условиях детерминированного эксперимента или имеющейся разнородной, ограниченной по объему статистической информации о результатах физического моделирования, макетирования и испытаний небольшого числа образцов.

Одним из путей решения проблемы обеспечения качества и надежности на стадии проектирования и изготовления изделий является применение теории подобия и моделирования.

Предложено направление развития теории стохастического подобия для эффективного решения задач оценки и контроля качества сложных систем в процессе их создания и эксплуатации. Сформулированы основные теоремы подобия, теоретически обоснован и экспериментально подтвержден критерий стохастического подобия в виде отношения функций распределения параметров (характеристик) систем. Приведены примеры решения прикладных задач. Дальнейшее развитие теории стохастического подобия позволит продвинуться в исследовании непредельных распределений, которые мало описаны в классической теории вероятностей и математической статистике, особенно той их части, которая даст возможность манипулировать выборками малого объема и цензурированными выборками, извлекая из них максимум информации.

***Ключевые слова*:** изделие, система, контроль, качество, испытание, стохастическое подобие, инвариант подобия, моделирование, теорема подобия, критерий.

Введение. Устойчивое функционирование системы обеспечения надежности изделий различного назначения возможно при наличии отлаженной обратной связи, которая по данным об отказах и неисправностях, возникших по производственным причинам и выявленных при эксплуатации, позволяет разрабатывать и корректировать систему выборочного контроля в процессе производства (ремонта).

Система выборочного контроля представляет собой набор планов выборочного контроля и соответствующих схем [5]. В свою очередь, *план статистического приемочного контроля* – это набор правил, по которым контролируют партию и принимают решение о ее приемлемости или неприемлемости. А *схема выборочного контроля* – процедура, устанавливающая правила переключения с одного плана на другой и возвращения к первоначальному плану. Следовательно, задача состоит в обоснованном выборе варианта плана контроля, который учитывает сведения о надежности, полученные при эксплуатации изделий.

Вариантом плана контроля называется совокупность зависимостей между объемом выборки n и объемом партии N при различных значениях браковочного уровня качества q_m (уровня несоответствий [3]), соответствующая заданному значению риска потребителя β [2]. Таким образом, для выбора плана контроля следует определить [2]:

- значение риска потребителя β;
- значение браковочного уровня качества q_m;
- вариант браковки.

Значение риска потребителя β устанавливается компетентными органами или соглашением между поставщиком и потребителем. Для определенности зададимся менее жестким требованием потребителя к качеству контролируемой продукции $\beta = 0{,}1$.

Значение браковочного уровня качества q_m следует выбирать, исходя из граничного уровня качества, которое представляет собой максимально допустимую долю дефектных изделий в партии. При этом *значение браковочного уровня качества q_m не должно превышать значения граничного уровня качества.* Или, наоборот, по значению граничного уровня качества, рассчитанному по данным эксплуатации, можно установить равное ему значение браковочного уровня q_m.

Выбор варианта браковки требует отдельного рассмотрения и в данной работе не приводится.

Рассмотрим пример определения объема выборки для контроля партии изделий размером $N = 165$, в которой в процессе эксплуатации было выявлено $D = 25$ дефектных по производственным причинам изделий.

Традиционная методика решения задачи. Для определения объема выборки рассчитаем значение граничного уровня:

$$q_m = \frac{D}{N}100 = \frac{25}{165} = 15\,\%. \qquad (1)$$

Очевидно, что $q_m > \beta \cdot 100\,\%$. Поэтому выборочный контроль для партии с таким уровнем дефектных изделий, согласно ГОСТ 16493-70 [2], не предусмотрен.

В соответствии с более поздним ГОСТ Р 50779.52-95 [3], учет эксплуатационной надежности изделий при разработке (корректировке) плана приемочного контроля осуществляется путем задания оценки ожидаемого фактического (входного) уровня несоответствий в предъявленной партии (очередной партии из последовательности партий). При этом исходят из того, что если к моменту создания плана оценка фактического (входного) уровня несоответствий поступившей на контроль партии известна, используют ее. При отсутствии таких данных экспертным методом выбирают интервал этой оценки и соответствующий план. В дальнейшем этот план необходимо периодически уточнять на основе последующих оценок.

По табл.1 ГОСТ Р 50779.52-95 [3] при значении риска потребителя $\beta = 0{,}1$ степень доверия к поставщику устанавливается Т2. Из табл.4 того же ГОСТа при объеме партии N от 151 до 280 выбираем план А.21 и схему для нормального контроля А.81.

В соответствии с планом А.21 и схемой А.81 при уровне несоответствий по данным из эксплуатации (1) и нормативному уровню качества $NQL = \beta \cdot 100 = 10\,\%$ возникает ситуация, когда $q_m > NQL$, в которой ни один из допустимых планов, включая сплошной контроль, не обеспечивает высокую вероятность приемки. Согласно действующим ГОСТам, партия с таким уровнем дефектов (несоответствий) должна подвергаться сплошному контролю.

К слову, для рассматриваемого случая недопустимости дефектных изделий в выборке ($d = 0$) основным является ГОСТ 16493-70 [2], актуальность которого подтверждена его переизданием в 2011 г. В этом документе таблицы составлены с минимальным значением объема выборки $n = 20$. Полагая, что в стандартах невозможно предусмотреть все варианты контроля, решим задачу аналитически в следующей постановке.

Из партии размером N, содержащей по данным эксплуатации D дефектных изделий, извлекается выборка объемом n, взятая без возвращения. Все изделия из этой выборки подвергаются контрольной проверке на предмет выявления несоответствий (дефектов). Пусть в выборке оказалось d дефектных изделий. Тогда распределение вероятностей числа появления дефектных изделий в выборке описывается гипергеометрическим распределением с функцией [4]

$$P\{d(n)=d\}=\frac{\binom{D}{d}\binom{N-D}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \qquad (2)$$

где $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!}$.

Для плана типа однократной выборки в случае недопустимости дефектных изделий в ней $d=0$. Вероятность проявления хотя бы одного дефекта

$$Q=1-P\{d(n)=0\} \qquad (3)$$

в выборке уменьшающегося объема, начиная с некоторого момента, убывает (рис.1).

Физически это означает, что *чем меньшее число изделий из партии подвергается контролю, тем меньше вероятность выявить дефектные изделия в ней.*

Задавшись уровнем $\beta=1-P\{d(n)=0\}=1-Q$, который в приемочном контроле трактуется как риск потребителя [3], можно определить объем выборки n, при проверке изделий из которой дефектных быть не должно. В частности, при $\beta=0{,}1$ объем выборки должен быть не менее $n=14$. Это означает, что для партии размером $N=165$ изделий, из которых в эксплуатации было выявлено $D=25$ дефектных, контролю следует подвергать одно случайно выбранное изделие из каждых 12. При этом, если хотя бы одно из изделий, подвергнутых контролю, окажется дефектным, то бракуется вся партия (вариант браковки в данной задаче не рассматривается).

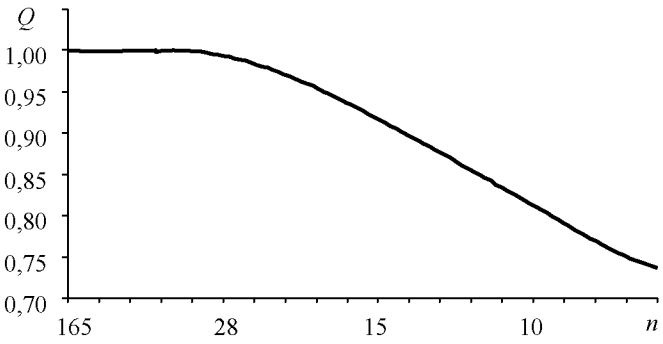


Рис.1.Вероятность обнаружить хотя бы одно дефектное изделие в выборке

Методика решения задачи на основе методов стохастического подобия. Рассмотрим решение этой же задачи с использованием элементов теории стохастического подобия [8]. Коэффициент стохастического подобия контрольной выборки проверяемой партии

$$K=\frac{Q_l^1}{Q_N^1} \text{ при } Q_l^1<Q_N^1, \qquad (4)$$

где индексы при Q обозначают вариант плана контроля (контролю подвергается одно изделие, случайно выбранное из каждых l изделий выборки).

Очевидно, что объем выборки в этом случае $n=N/l$ (с округлением до целого значения в бóльшую сторону). График этой функции представлен на рис.2. Его ступенчатый характер обусловлен дискретностью гипергеометрического распределения. Анализ рис.2 показывает, что с уменьшением объема выборки n (определяется вариантом

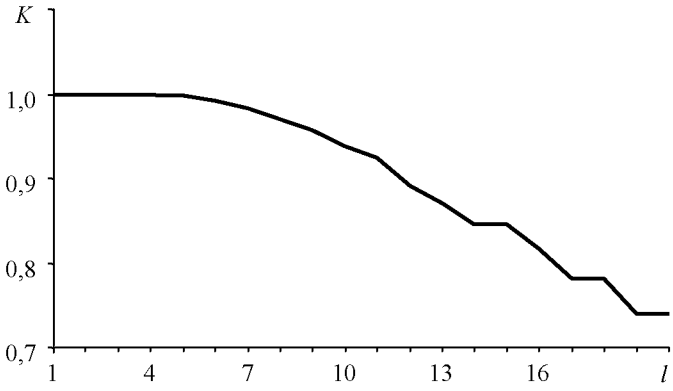


Рис.2. График изменения коэффициента стохастического подобия от объема контрольной выборки

плана контроля «1 из l»), т.е. с увеличением l при фиксированном размере партии N коэффициент стохастического подобия убывает. Физически это означает, что сформированные таким образом выборки с увеличением l все меньше отражают стохастическую сущность контролируемой партии.

Примем, что величина K в выражении (4) является случайной. Тогда для обоснования значения величины l, характеризующей вариант плана контроля, можно воспользоваться следствием постулирования и проверки гипотезы о стохастическом подобии рассматриваемых выборок. Для этого необходимо знать закон распределения случайной величины Q. Согласно лемме [9] случайная величина Q, представляющая собой вероятность, равномерно распределена в интервале [0;1]. Тогда распределение случайной величины K является результатом доказанной авторами теоремы.

Теорема. Отношение меньшей из двух независимых случайных величин, равномерно распределенных в интервале [0;1], к большей есть случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0;1].

Доказательство. Пусть даны две независимые случайные величины x_1 и x_2, равномерно распределенные в интервале [0;1]. Плотность их совместного распределения после упорядочения ($x_1 \le x_2$) выглядит следующим образом [6,7]:

$$f(x_1, x_2) = 2! f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) = 2, \tag{5}$$

где $f_{x_1}(x_1) = 1$ и $f_{x_2}(x_2) = 1$ – плотности распределения независимых случайных величин x_1 и x_2.

Плотность распределения случайной величины $y = x_1 / x_2$ имеет вид [1]

$$g(y) = -\int_{-\infty}^{0} x_1 f(x_1, yx_1) dx_1 + \int_{0}^{\infty} x_1 f(x_1, yx_1) dx_1 .$$

Подставив в это выражение плотность совместного распределения (5) и отбросив первый интеграл, поскольку $x_1 \in [0;1]$, получим

$$g(y) = \int_{0}^{1} x_1 f(x_1, yx_1) dx_1 = \int_{0}^{1} 2x_1 dx_1 = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1. \tag{6}$$

Выражение (6) соответствует плотности равномерного распределения отношения y. Теорема доказана.

Теперь, исходя из справедливости постулированной гипотезы о стохастическом подобии рассматриваемых выборок с вероятностью $1-\alpha$ (для равных рисков поставщика и потребителя $\alpha = \beta = 0{,}1$), можно решить обратную задачу определения числа l, характеризующего вариант плана контроля. Для этого достаточно решить уравнение (4) относительно l графическим (рис.2) или численным способом. Можно показать, что для заданных условий $l = 12$. Это означает, что контролю должно подвергаться одно изделие, случайным образом извлеченное из каждых 12, составляющих проверяемую партию. В этом случае из партии размером $N = 165$ будет сформирована выборка объемом $n = 14$ изделий, при отсутствии дефектов в которых партия считается принятой.

Нетрудно убедиться, что полученный результат совпадает с решением по формулам (2) и (3) при условии $Q_N^1 = 1$ в выражении (4). Это естественно, так как вероятность появления хотя бы одного дефектного изделия в партии с $D = 25$ дефектами достоверна. При необходимости, когда $Q_N^1 \neq 1$, можно распространить предложенный подход и на оценки стохастического подобия выборок, сформированных по разным вариантам контроля между

собой, а не с партией. По этой же причине форма кривых $Q(n)$ на рис.1 и $K(l)$ на рис.2 совпадает.

Рассмотрим влияние эксплуатационной надежности на необходимость корректировки варианта плана контроля. Для этого на рис.3 представлены зависимости коэффициентов стохастического подобия выборок $K(l)$, сформированных по различным вариантам контроля одной и той же партии объемом $N = 165$, при эксплуатации которой было выявлено различное число D дефектных изделий.

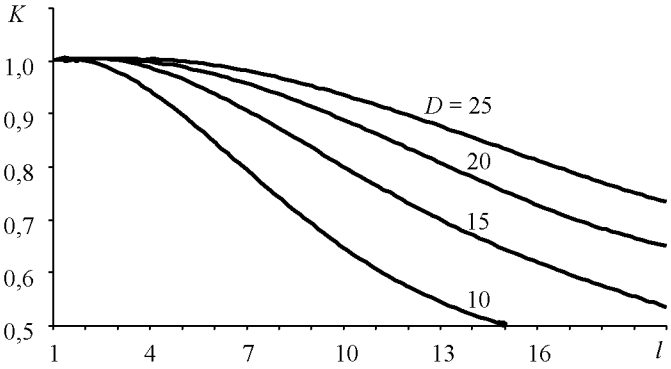


Рис.3. Влияние эксплуатационной надежности на вариант плана контроля

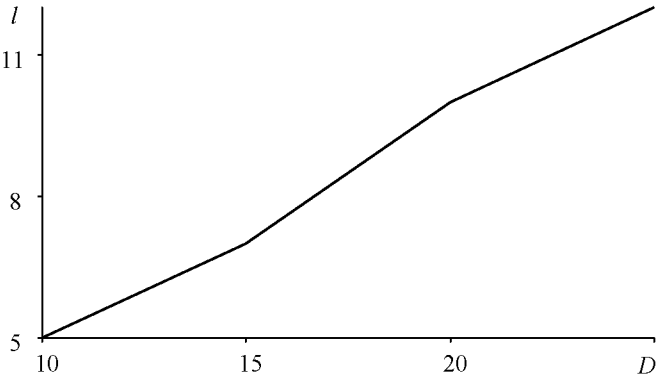


Рис. 4. Зависимость варианта плана контроля l от числа дефектов D, выявленных при эксплуатации партии изделий

Анализ рис.3 показывает, что *требующие большей надежности изделия необходимо контролировать чаще* (кривые смещаются в сторону уменьшения числа l изделий, из которых одно выбирается для контроля). Вопреки этой логике, на практике часто поступают иначе: некоторые руководители при отсутствии информации о дефектах в партии считают качество изделий высоким и уменьшают объем контрольной выборки, т.е. осуществляют приемочный контроль реже. Например, изменяют вариант контроля «1 изделие из 5» на вариант «1 изделие из 10» на том основании, что в одной выпущенной партии государственного заказа не оказалось дефектных изделий. Вот так! По одной партии – сразу вдвое уменьшить объем выборки. Если бы такое решение было принято, то для рассматриваемой партии, согласно табл.1 ГОСТ 16493-70 [3], уменьшение объема выборки в 2 раза повысило бы браковочный уровень q_m в 2,5 раза. Это бы означало, что для той же партии вместо зарегистрированных в эксплуатации 25 дефектных изделий из-за производственных отклонений при варианте приемочного контроля «1 изделие из 5» можно было пропустить до 62 дефектных изделий при варианте контроля «1 изделие из 10».

Действительно, на рис.4 представлена функция $l(D)$, соответствующая вариантам контроля при коэффициенте подобия выборок контролируемой партии $K = 1 - \alpha = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Как видно, это практически линейная в данном диапазоне изменения D зависимость.

Как ни парадоксально это звучит, для обеспечения стохастического подобия контрольной выборки проверяемой партии (чтобы выборка действительно отражала содержание дефектных изделий в партии) при увеличении уровня несоответствий q в ней (доли дефектных изделий) объем контрольной выборки можно уменьшить (увеличение l) по сравнению с ранее назначенной. И наоборот, если в эксплуатации зарегистрировано уменьшение числа D выявленных дефектов в партии (снижение уровня несоответствий q), то объем контрольной выборки необходимо увеличить. Таким образом, более надежные изделия из-за редкости проявления дефектов требуют повышенного внимания, поэтому для достоверного выявления несоответствий требуется бóльший объем выборки (снижение l).

Отсюда возникает экономический нюанс, заключающийся в том, что высококачественные изделия затратно не только производить, но и контролировать их качество. Поэтому ГОСТ 16493-70 учитывает эту особенность приемочного контроля и в табл.1 [2] ближайшим значением для уровня (1) является $q_m = 10\%$. По заданному $\beta = 0{,}1$ (столбец А таблицы) в строке «122 и более» размер партии $N = 165$, значение объема выборки $n = 25$, что соответствует варианту плана контроля «1 из 6».

При снижении уровня до $q_m = 8\%$ (снижение числа дефектных изделий в партии) при том же размере партии $N = 165$ в строке «138 и более» значение объема выборки $n = 40$, что соответствует варианту плана контроля «1 из 4».

Заключение. Таким образом, повышение качества производства, приведшее к снижению числа дефектных изделий в партии по результатам эксплуатации, требует учащения контроля изделий. Иными словами: проявление более редких событий необходимо подтверждать увеличенным объемом статистических данных.

Целью данной работы была не агитация за выполнение ГОСТов, а показ необходимости учета эксплуатационной надежности изделий при организации системы приемочного контроля предприятия. Без понимания сущности выборочного контроля и привнесения элементов теории стохастического подобия в него возможны ситуации принятия ошибочных решений. А для высокоответственных изделий такие решения чреваты нарушением их безопасной эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е.С.* Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. М.: Радио и связь, 1983. 416 с.

2. ГОСТ 16493-70. Качество продукции. Статистический приемочный контроль по альтернативному признаку. Случай недопустимости дефектных изделий в выборке. М.: Стандартинформ, 2011. 32 с.

3. ГОСТ Р 50779.52-95. Статистические методы. Приемочный контроль качества по альтернативному признаку. М.: Издательство стандартов, 2004. 230 с.

4. ГОСТ Р 50779.10-2000 (ИСО 3534-1-93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2008. 42 с.

5. ГОСТ Р ИСО/ТО 8550-1-2007. Статистические методы: Руководство по выбору и применению систем статистического приемочного контроля дискретных единиц продукции в партиях. Часть 1. Общие требования. М.: Стандартинформ, 2008. 36 с.

6. *Джонсон Н.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Н.Джонсон, Ф.Лион. М.: Мир, 1980. 610 с.

7. Оценка стохастического подобия объектов со случайными параметрами сложных технических систем / А.В.Воловик, А.А.Клавдиев, С.В.Ефименко и др. // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2014. № 6. С.342-349.

8. *Arefyev I.* Prognozowanie informacyjne stanu systemu transportowego / I.Arefyev, A.Klawdiev // Transport. 2012. N 75. P.5-8.

9. *Arefyev I.B.* Method of assessment of the river craft technical condition on the basis of the microstatistics / I.B.Arefyev, A.A.Volovik, A.A.Klavdiev // Scientific journals / Maritime University of Szczecin. 2014. N 37. P.5-10.

REFERENCES

1. *Ventcel' E.S.,Ovcharov L.A.* Prikladnye zadachi teorii veroyatnostei (*Applied problems of probability theory*). Moscow: Radio i svjaz', 1983, p.416.

2. GOST 16493-70. Kachestvo produktsii. Statisticheskii priemochnyi kontrol' po al'ternativnomu priznaku. Sluchai nedopustimosti defektnykh izdelii v vyborke (*Quality of production. Statistical acceptance control on an alternative sign. A case of inadmissibility of defective products in selection*). Moscow: Standartinform, 2011, p.32.

3. GOST P 50779.52-95. Statisticheskie metody. Priemochnyi kontrol' kachestva po al'ternativnomu priznaku. (*Statistical methods. Acceptance quality control on an alternative sign*). Moscow: Izdatel'stvo standartov, 2004, p.230.

4. GOST P 50779.10-2000 (ISO 3534-1-93). Statisticheskie metody. Veroyatnost' i osnovy statistiki. Terminy i opredeleniya (*Statistical methods. Probability and fundamentals of statistics. Terms and definitions*). Moscow: Standartinform, 2008, p.42.

5. GOST P ISO/TO 8550-1-2007. Statisticheskie metody: Rukovodstvo po vyboru i primeneniyu sistem statisticheskogo priemochnogo kontrolya diskretnykh edinits produktsii v partiyakh. Chast' 1. Obshchie trebovaniya (*Statistical methods. The guide to a choice and use of systems of statistical acceptance control of discrete units of production in parties. Part 1. General requirements*). Moscow: Standartinform, 2008, p.36.

6. *Dzhonson N., Lion F.* Statistika i planirovanie eksperimenta v tekhnike i nauke. Metody obrabotki dannykh (*Statistics and planning of experiment in technique and science. Data processing methods*). Moscow: Mir, 1980, p.610.

7. *Volovik A.V , Klavdiev A.A., Eflmenko S.V. et al.* Otsenka stokhasticheskogo podobiya ob"ektov so sluchainymi parametrami slozhnykh tekhnicheskikh sistem (*An assessment of stochastic similarity of objects with casual parameters of difficult technical systems*). Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten'. 2014. N 6, p.342-349.

8. *Aref'ev I., Klavdiev A.* Prognozowanie informacyjne stanu systemu transportowego (*Informative prognostication of the state of the transport system*). Transport. 2012. N 75, p.5-8.

9. *Aref'ev I.B., Volovik A.V , Klavdiev A.A.* Method of assessment of the river craft technical condition on the basis of the microstatistics. Scientific journals. Maritime University of Szczecin. 2014. N 37, p.5-10.

ASSESSMENT OF COMPLICATED SYSTEMS QUALITY ON THE BASIS OF STOCHASTIC SIMILARITY METHODS

D.A.PERVUCHIN, *Dr. of Engineering Sciences, Professor, pervuchin@rambler.ru*
A.A.KLAVDIEV, *PhD in Engineering Sciences, Associate Professor, kss1959@mail.ru*
National Mineral Resources University (Mining University), St Petersburg, Russia

Modern development of technology is characterized by sharp complication of the tasks solved at production of products, high requirements to their reliability, short deadlines of creation and introduction in operation, aspiration to reduce costs of development of a product at satisfaction of the set conditions.

The existing methods of an assessment and quality control of a product by results of tests are often inefficient in the conditions of the determined experiment or the diverse volume-limited statistical information on results of physical modeling, prototyping and tests of a small number of samples available.

One of the solutions of the problem of ensuring quality and reliability at a design stage and production of products is an application of the theory of similarity and modeling.

In the article the direction of development of the stochastic similarity theory for the effective solution of problems of an assessment and quality control of complicated systems in the course of their creation and operation is offered. The main theorems of similarity are formulated, the criterion of stochastic similarity in the form of the relation of functions of distribution of parameters (characteristics) of systems is theoretically reasonable and experimentally confirmed. Examples of the solution of applied tasks are given. Further development of the theory of stochastic similarity will allow us to advance in the research of non-limiting distributions which are a little described in classical probability theory and mathematical statistics, especially in that their part which will give the chance to manipulate selections of a small volume and censored selections obtaining maximum information from them.

***Key words*:** product, system, control, quality, test, stochastic similarity, similarity invariant, modeling, similarity theorem, criterion.