



УДК 02.2, 04.1

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ВОЗДУХЕ

В.С.СУХОМЛИНОВ¹, А.С.МУСТАФАЕВ²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

² Санкт-Петербургский горный университет, Россия

Работа посвящена разработке аналитической теории для оценки пространственного распределения энерговыделения при распространении пучка быстрых электронов в газе и, в частности, в воздухе при энергиях электронов 1-100 кэВ. Развивается подход, который был применен авторами [2, 3] при рассмотрении неупругого торможения электронов в воздухе. Основываясь на том, что неупругое взаимодействие, в основном, приводит к релаксации энергии, а упругое – к изотропизации распределения по направлениям, в работе вначале решается задача о нахождении функции распределения электронов с учетом только упругих столкновений. В заключительной части находится аналитическое решение поставленной задачи с учетом обоих видов торможения электронов в воздухе.

Проведенные расчеты показывают, что учет упругих столкновений приводит к росту пространственной плотности энерговыделения и сужению области, где выделяется основная энергия быстрых электронов, по сравнению с расчетами, в которых учитывается только неупругое торможение.

Ключевые слова: торможение пучка электронов с энергией 1-100 кэВ в газе, упругое и неупругое взаимодействие электронов, релаксация энергии и импульса, функция распределения электронов по скоростям, кинетическое уравнение Больцмана, численное моделирование методом Монте-Карло.

Как цитировать эту статью: Сухомлинов В.С. Пространственное распределение энерговыделения при распространении пучка быстрых электронов в воздухе / В.С.Сухомлинов, А.С.Мустафаев // Записки Горного института. 2016. Т.220. С.611-621. DOI 10.18454/PMI.2016.4.611

Введение. При создании гиперзвуковых летательных аппаратов актуальна задача релаксации быстрых электронов с энергиями до 100 кэВ в газе. Для оптимизации внешнего аэродинамического обтекания, а также улучшения характеристик двигателей таких летательных аппаратов предлагается использовать МГД-управление газовыми потоками. При этом для создания МГД-эффекта можно применить высокоэнергетичный электронный пучок. Расчет степени ионизации возникающей плазмы сводится к вычислению пространственного распределения выделяемой в газе энергии. В свою очередь, это распределение рассчитывается с использованием метода Монте-Карло. Поскольку начальные энергии электронов велики, а дифференциальное сечение столкновения электронов с атомами и молекулами газа быстро падает с увеличением переданной атому энергии, потери энергии электронов при каждом столкновении малы. Это обстоятельство приводит к необходимости учета многих тысяч столкновений, что даже при современном быстродействии вычислительной техники требует больших затрат машинного времени.

Настоящая работа посвящена разработке аналитической теории для оценки пространственного распределения энерговыделения пучка быстрых электронов с энергией 1-100 кэВ при распространении в воздухе. Развивается подход, который был применен авторами [2, 3] при рассмотрении неупругого торможения электронов в воздухе.

Вначале решается задача о нахождении функции распределения электронов с учетом только упругих столкновений. В заключительной части находится аналитическое решение поставленной задачи с учетом обоих видов торможения электронов.

1. Решение уравнения Больцмана с учетом только упругих столкновений. Воспользуемся физической моделью, развитой в работе [2]. Кроме того, сохраним все обозначения, использованные в этой работе. Напомним, что мы рассматриваем приближение, в котором при неупругих столкновениях электронов с молекулами газа происходит изменение только энергии, а при упругих – направления движения. Как показано в [2], в рассматриваемых условиях это оправдано. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона на молекулах, приведенное в [8], описывается формулой

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \frac{r_0^2 Z^2 (1 - \beta^2)}{\beta^4 (1 - \cos \theta + 2\eta)^2}, \quad (1)$$

где r_0 – классический радиус электрона; $\alpha = Z/137$; $\beta = v/c$; Z , v и c – заряд ядра атома – мишени, скорость электрона и скорость света соответственно; θ – полярный угол рассеяния.

Параметр экранирования в приближении Мольера определяется соотношением [8]



$$\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} Z^{\frac{2}{3}} \frac{(1-\beta^2)}{\beta^2} \left(1,33 + 3,76 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right). \quad (1a)$$

Уравнение Больцмана с учетом только упругих столкновений имеет вид

$$\mu \frac{\partial f}{\partial z} + \Lambda_e(E) f = 2\pi N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(E, \mu', z) \sigma_e(E, \mu_0) d\mu' d\varphi, \quad (2)$$

где $\Lambda_e(E)$ – обратная длина свободного пробега относительно упругих столкновений; $\mu_0 = \cos\theta = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu'^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi$ – косинус угла рассеяния.

Поскольку функция распределения не зависит от азимутального угла φ , проводя интегрирование по этой переменной в правой части (2), получим

$$\mu \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} + f = \int_{-1}^1 f(E, \mu', z) g_e(E, \mu' \rightarrow \mu) d\mu', \quad (3)$$

где $\tilde{z} = z\Lambda_e(E)$; $g_e(E, \mu' \rightarrow \mu) = \frac{2A(\eta)(1+2\eta-\mu\mu')}{\{(\mu-\mu')^2 + 4\eta(1+\eta-\mu\mu')\}^{1,5}}$;

$$A(\eta) = \eta(1+\eta); \quad \Lambda_e(E) = \pi r_0^2 Z^2 \frac{(1-\beta^2)}{A(\eta)\beta^4}.$$

При этом выполняется условие нормировки

$$\int_{-1}^1 g_e(E, \mu' \rightarrow \mu) d\mu' = \int_{-1}^1 g_e(E, \mu' \rightarrow \mu) d\mu = 1.$$

Рассмотрим модельную индикатрису рассеяния $g_{me}(E, \mu' \rightarrow \mu)$:

$$g_{me}(E, \mu' \rightarrow \mu) = a_1(E)\delta(\mu'-\mu) + a_2(E). \quad (4)$$

Функции $a_1(E), a_2(E)$ выберем из условия равенства двух первых моментов модельной и точной индикатрис. Таким образом, получим

$$a_2 = \frac{1-a_1}{2}; \quad a_1 = \frac{\bar{\mu}}{\mu}, \quad (5)$$

где $\bar{\mu} = \int_{-1}^1 g_e(E, \mu' \rightarrow \mu) \mu' d\mu'$, а коэффициенты $a_1(E), a_2(E)$ оказываются не зависящими от μ .

Подставляя индикатрису $g_{me}(E, \mu' \rightarrow \mu)$ в уравнение (3) и используя первое из равенств (5), получим

$$\mu \frac{\partial f}{\partial z'} + f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(z', \mu') d\mu' \quad \text{при} \quad z' = 2a_2 \tilde{z}. \quad (6)$$

Таким образом, мы свели задачу к кинетическому уравнению Больцмана со сферически симметричной индикатрисой рассеяния. Уравнение (6) следует дополнить граничным условием

$$f(z', \mu)_{\substack{z=0 \\ \mu>0}} = \delta(\mu-1). \quad (6a)$$

Для решения задачи (6), (6a) можно воспользоваться результатами, приведенными в работах [3, 4]. Согласно этим результатам, решение уравнения (3), ограниченное на бесконечности, можно представить в следующем виде:

$$f(z', \mu) = A_0 + \int_0^1 A(u) \exp\left(-\frac{z'}{u}\right) G_u(\mu) du. \quad (7)$$

Используя граничное условие (6a), можно получить



$$A_0 = 5,036; A(u) = 1,679 \frac{\left\{ P_k \left[\frac{u}{u-\mu} \right] + p(u)\delta(u-1) \right\}}{C(u)P(u)}, \quad (8)$$

где функции, входящие в (7), определяются формулами [4,5]:

$$A_0 = 3 \int_0^1 \mu P(\mu) f(0, \mu) d\mu; \quad (9)$$

$$A(u) = [C(u)P(u)]^{-1} \int_0^1 \mu P(\mu) f(0, \mu) G_u(\mu) d\mu;$$

$$C(u) = \frac{u}{2} \{ p^2(u) + \pi^2 u^2 \} \text{ при } p(u) = 2 + \ln \left(\frac{1-u}{1+u} \right);$$

$$P(\mu) = \mu \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^1 \arctg \left(\frac{\pi t}{p(t)} \right) \frac{dt}{t+\mu} \right),$$

а $\arctg(\pi t)$ изменяется от $-\pi$ до 0, когда t изменяется от 0 до 1.

Функция $G_u(\mu)$ задается формулой

$$G_u(\mu) = P_k \left[\frac{u}{u-\mu} \right] + p(u)\delta(u-\mu).$$

Выражение $P_k \left[\frac{u}{u-\mu} \right]$ понимается как обобщенная функция, определяемая с помощью интегрального функционала:

$$\int_{-1}^1 P_k \left[\frac{u}{u-\mu} \right] F(u) du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{\mu-\varepsilon} \frac{uF(u)}{u-\mu} du + \int_{\mu+\varepsilon}^1 \frac{uF(u)}{u-\mu} du \right)$$

при произвольной функции $F(u)$.

Опуская громоздкие вычисления, приведем конечные формулы для величин $N(z'), \bar{\mu}_+(z'), \bar{\mu}_-(z'), \bar{\mu}_+^2(z')$:

$$N(z') = 2A_0 + B_1(z') + C_1(z'); \quad \bar{\mu}_+(z') = \frac{0,5A_0 + A_1(z')}{A_0 + B_1(z')};$$

$$\bar{\mu}_-(z') = \frac{-0,5A_0 + D_1(z')}{A_0 + C_1(z')}; \quad \bar{\mu}^2(z') = \frac{2A_0}{3[2A_0 + B_1(z') + C_1(z')]}; \quad (10)$$

$$\bar{\mu}_+^2(z') = \frac{\frac{A_0}{3} + G_1(z')}{A_0 + B_1(z')}.$$

При этом

$$A_1(z') = \int_0^\infty F_0(y) u(y) \exp \left(-\frac{z'}{u(y)} \right) dy; \quad B_1(z') = \int_0^\infty F_1(y) \exp \left(-\frac{z'}{u(y)} \right) dy;$$

$$C_1(z') = \int_0^\infty F_2(y) \exp \left(-\frac{z'}{u(y)} \right) dy; \quad D_1(z') = \int_0^\infty F_3(y) \exp \left(-\frac{z'}{u(y)} \right) dy; \quad (11)$$

$$G_1(z') = \int_0^\infty F_4(y) \exp \left(-\frac{z'}{u(y)} \right) dy; \quad u(y) = 1 - \exp(-y),$$

а функции $F_0(z')$, $F_1(z')$, $F_2(z')$, $F_3(z')$ рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} F_0(z') &= -1,679 \frac{[p_1(z') - 1 + u(z') \ln(u(z') \exp(z'))] u(z')}{P(u(z')) C(u(z'))}; \\ F_1(z') &= -1,679 \frac{[p_1(z') + u(z') \ln(u(z') \exp(z'))] u(z')}{P(u(z')) C(u(z'))}; \\ F_2(z') &= 1,679 \frac{u^2(z') \ln(u(z') \exp(z'))}{P(u(z')) C(u(z'))}; \\ F_3(z') &= 1,679 \frac{[1 + u(z') \ln(u(z') \exp(z'))] u^2(z')}{P(u(z')) C(u(z'))}; \\ F_4(z') &= -1,679 \frac{[u^2(z') \ln(u(z') \exp(z')) - u(z') - 0,5 + u(z') p_1(z')] u^2(z')}{P(u(z')) C(u(z'))}; \\ p_1(z') &= 2 - u(z') [z' + \ln(1 + u(z'))] \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того, выполняется соотношение

$$D_1(z') - A_1(z') \equiv A_0. \quad (13)$$

Формулы (7), (8), (9)-(13) и дают решение поставленной задачи. Для конкретных вычислений моментов функции $f(z', \mu)$ оказывается полезной следующая приближенная формула, имеющая погрешность несколько процентов:

$$P(u) \approx P_1(u) = 1,676 - 1,095(1 - u)^{1,1}. \quad (14)$$

Очевидно, что переход от переменной z' (расстояние, выраженное в длинах пробега, рассчитанных по изотропной части сечения упругого рассеяния), к переменной $\tilde{z}$ (расстояние, выраженное в длинах пробега, рассчитанных по полному сечению упругого рассеяния) осуществляется по формуле

$$z' = \tilde{z} \cdot 2a_2(E) = \tilde{z} \left(1 - \frac{\bar{\mu}(E)}{\mu} \right). \quad (15)$$

Кроме того, для численных расчетов оказывается полезной аппроксимация, точность которой составляет несколько процентов:

$$a_2(E) \approx \bar{a}_2(E) = \left[1 + 0,057 \frac{E^2}{1 + 0,057E} \right]^{-1}. \quad (16)$$

2. Полное решение задачи о распространении высокоэнергетического пучка электронов в воздухе. Как показывают расчеты [2], в интересующем нас диапазоне энергий электронов сечение неупругого рассеяния значительно превосходит сечение упругого рассеяния. Так, при энергии 2 кэВ, их отношение равно приблизительно 20 и растет с увеличением энергии, поскольку, как отмечалось ранее, сечение неупругого рассеяния, в отличие от упругого, слабо зависит от энергии. Таким образом, между сравнительно редкими упругими столкновениями, в результате которых происходит изменение направления движения электронов, электроны движутся по прямой, испытывая неупругие столкновения, при которых происходит потеря энергии.

Рассмотрим сначала, как влияет на полученные результаты энергетическая релаксация между последовательными упругими столкновениями. Для оценки этого эффекта будем считать, что электроны испытывают только упругие столкновения, но перед каждым следующим столкновением их энергия уменьшается и равняется средней энергии потока $E(\bar{z})$, рассчитанной с учетом только неупругих столкновений в работе [2]. При этом все расстояния будем выражать в длинах пробега относительно неупругих столкновений, т.е. перейдем к переменной $z_0(E_0) > \bar{z}$. Очевидно, что теперь во всех формулах следует в качестве пространственной переменной писать величину $X(\bar{z})$:

$$X(\bar{z}, E_0) = \frac{2\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} \int_0^{\bar{z}} a_2[E(z_1)] dz_1. \quad (17)$$

Вычисляя интеграл в этой формуле, получим

$$\begin{aligned} X(\bar{z}, E_0) &= -\frac{1}{K(E_0)} \left[\frac{T_1(\bar{z}, E_0)}{2} + 4,098 T(\bar{z}, E_0) \right]; \\ T_1(\bar{z}, E_0) &= \arctg[0,12(2E_0 + 1)] - \arctg[0,12(2E_0 t(\bar{z}, E_0))]; \\ T(\bar{z}, E_0) &= \ln \left[\frac{1 + 0,057 E_0 (1 + E_0)}{1 + 0,057 E_0 t(\bar{z}, E_0) (1 + E_0 t(\bar{z}, E_0))} \right]; \\ t(\bar{z}, E_0) &= 1 + \bar{z} \frac{K_0(E_0)}{E_0}. \end{aligned} \quad (17a)$$

Рассчитаем, при каких значениях $\bar{z}$ происходит полная изотропизация углового распределения потока электронов, т.е. выполняется соотношение

$$\bar{\mu}_+ [X(\bar{z})] \approx \bar{\mu}_- [X(\bar{z})] \approx \frac{1}{2}.$$

С учетом полученных выше результатов имеем, что соответствующая величина $\bar{E}_1(\bar{z}, E_0)$ находится как решение трансцендентного уравнения

$$X[z_0(E_0)] = 4. \quad (18)$$

Величина $z_0(E_0)$ оказывается много больше единицы и, например, для $E_0 = 2$ кэВ выполняется $z_0 \cong 90$, а для $E_0 = 100$ кэВ параметр $z_0 \cong 3,8 \cdot 10^4$.

В работе [2] было показано, что зависимость $E(\bar{z})$ хорошо описывается линейной функцией. При этом практически полной релаксации по энергиям соответствует расстояние от плоскости вылета:

$$z_e(E_0) = \frac{-E_0}{K(E_0)}, \quad (19)$$

где функция $K(E_0)$ определена в [2].

Расчеты величины $r(E_0) = z_0(E_0) / \bar{z}_e(E_0)$ показывают, что при начальных энергиях электронов $2 \text{ кэВ} < E_0 < 100 \text{ кэВ}$ ее значение находится в диапазоне от 18 до 35 %. При этом оценки средней энергии электронов в области $\bar{z} < z_0(E_0)$ с учетом неупругих столкновений показывают, что ее отличие от начальной энергии не превосходит 0,2 %. Это свидетельствует о том, что изотропизация углового распределения пучка электронов происходит в указанном диапазоне энергий практически без релаксации энергии электронов и на расстояниях от плоскости вылета, заметно меньших размеров области существенного энерговыделения. Но тогда можно предложить следующее решение задачи с учетом неупругих и упругих столкновений электронов с молекулами газа.

Рассмотрим сначала область $\bar{z} > z_0(E_0)$. Как мы видели, при $\bar{z} = z_0(E_0)$ распределение электронов – практически изотропное. Далее электроны испытывают неупругие столкновения с потерей энергии и упругие с изменением направления. Но тогда легко доказать, что при любом $\bar{z} > z_0(E_0)$ функция распределения электронов изотропна. В этом случае, очевидно, упругие столкновения с изменением только направления не приводят к изменению функции распределения и их можно не учитывать. Кроме того, в рамках модели, предложенной в [2], будем считать, что полное сечение неупругих столкновений слабо зависит от энергии электрона. Кинетическое уравнение для функции распределения электронов в этом случае записывается в виде

$$\mu \frac{\partial f(\bar{z}, t, \mu)}{\partial \bar{z}} + f(\bar{z}, t, \mu) = a \int_0^t f(\bar{z}, t', \mu) \sigma_{nd}(t - t') dt', \quad (20)$$

где μ – косинус угла между внутренней нормалью к плоскости и направлением движения электрона;

$$t = 1 - x; \quad x = E / E_0; \quad a = 1 / \sum_n (1, E_0); \quad \sum_n (x, E_0) = E_0 \int_0^x \sigma_{nd}(x, x - x') dx'.$$

Как было показано в работе [1], в данной ситуации для решения кинетического уравнения можно применить так называемое P_1 -приближение. Полагая, как и в работе [2], что сечение $\sigma_{nd}(t - t')$ имеет экспоненциальную форму:

$$\sigma_{nd}(t-t') = \Sigma_n(1, E_0) b(E_0) \exp[-b(E_0)(t-t')], \quad (20a)$$

(формулы для величин, входящих в (20a), приведены в [2]), представим $f(\bar{z}, t, \mu)$ в виде

$$f(\bar{z}, t, \mu) = \frac{1}{2} [f^{(0)}(\bar{z}, t) + 3\mu f^{(1)}(\bar{z}, t)]. \quad (21)$$

Подставим (21) в (20) и проинтегрируем по всем направлениям движения электронов, затем подставим (21) в (20), умножим на μ и также проинтегрируем. В результате получим следующую систему линейных интегродифференциальных уравнений для функций $f^{(0)}(\bar{z}, t), f^{(1)}(\bar{z}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + f^{(0)}(\bar{z}, t) &= a \int_0^t f^{(0)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt'; \\ \frac{1}{3} \frac{\partial f^{(0)}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + f^{(1)}(\bar{z}, t) &= a \int_0^t f^{(1)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt'. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничное условие для системы (22) записывается в виде

$$f^{(0)}(z_0, t) = \Phi_0(t); f^{(1)}(z_0, t) = \Phi_1(t), \quad (23)$$

где $\Phi_0(t), \Phi_1(t)$ – некоторые, пока неизвестные функции.

Исключая функцию $f^{(0)}(z, t)$ из системы (22) и применяя к полученному уравнению преобразование Лапласа по переменной t , получим уравнение для образа Лапласа $g_1(z, p)$ функции $f^{(1)}(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} - 3[1 - al(p)]^2 g_1 = 0; g_1(z_0, p) = G_1(p), \quad (24)$$

где $G_1(p)$ и $l(p)$ – преобразование Лапласа соответственно от функции $\Phi_1(t)$ и $\sigma_{nd}(t)$.

Полагая, что сечение $\sigma_{nd}(t)$ определяется формулой (20a) и применяя обратное преобразование Лапласа к решению уравнения (24), с учетом (23) имеем

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\bar{z}, t)_{z > z_0} &= \Phi_1(t) \exp\{-\sqrt{3}(\bar{z} - z_0)\} + \exp\{-\sqrt{3}(\bar{z} - z_0)\} \sqrt{a(\bar{z} - z_0)} \times \\ &\times \int_0^t \Phi_1(t-y) I_1\left(2\sqrt{a(\bar{z} - z_0)y}\right) \frac{\exp(-ay)}{\sqrt{y}} dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим теперь область $z_0(E_0) > \bar{z}$. Выполняя интегрирование уравнения Больцмана для функции распределения электронов с учетом неупругого и упругого торможений [2], для области $z_0(E_0) > \bar{z}$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + f^{(0)}(\bar{z}, t) &= b(E_0) \int_0^t f^{(0)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt'; \\ \frac{\partial [\bar{\mu}^2(\bar{z}) f^{(0)}(\bar{z}, t)]}{\partial \bar{z}} + f^{(1)}(\bar{z}, t) &= b(E_0) \int_0^t f^{(1)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt', \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{где } \bar{\mu}^2(z) = \int_{-1}^1 \mu^2 f(z, 0, \mu) d\mu \left/ \left(\int_{-1}^1 f(z, 0, \mu) d\mu \right) \right.$$

Действуя аналогично предыдущему, получим

$$\frac{\partial^2 [\bar{\mu}^2(\bar{z}) g_0]}{\partial \bar{z}^2} - [1 - b(E_0)l(p)]^2 g_0 = 0; g_0(z_0, p) = G_0(p), \quad (27)$$

где $G_0(p)$ – преобразование Лапласа от функции $\Phi_0(t)$.

Как показывают оценки, уравнение (27) удовлетворяет условиям применимости ВКБ-приближения [6]. В этом приближении решение уравнения (27) имеет вид

$$g_0(\bar{z}, p) = G_0(p) \frac{\sqrt{\mu^2(0)}}{\sqrt{\mu^2(\bar{z})}} \exp\{-\bar{z}\} \exp\left\{b(E_0)l(p) \int_0^{\bar{z}} \frac{dy}{\sqrt{\mu^2(y)}}\right\}. \quad (28)$$

Из (26) аналогично случаю $z_0(E_0) < \bar{z}$ получим

$$g_1(\bar{z}, p) = G_1(p) \exp\{-(\bar{z} - z_0)\} \exp\left\{b(E_0)l(p) \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{dy}{\sqrt{\mu^2(y)}}\right\}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, для области $z_0(E_0) > \bar{z}$ окончательно имеем

$$f^{(1)}(\bar{z}, t)_{\bar{z} < z_0} = \Phi_1(t) \exp\left\{-\int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2(z)}}\right\} + \exp\left\{-\int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2(z)}}\right\} \times \\ \times \sqrt{b(E_0)(\bar{z} - z_0)} \int_0^t \Phi_1(t-y) I_1\left(2\sqrt{b(E_0)(\bar{z} - z_0)y}\right) \frac{\exp(-b(E_0)y)}{\sqrt{y}} dy. \quad (29)$$

Напомним, что цель настоящей работы – вычисление величин $\bar{E}(\bar{z}, E_0)$; $\frac{d\bar{E}(\bar{z}, E_0)}{d\bar{z}}$. При этом кроме интегрирования функции распределения по переменной E (с весом E) следует провести интегрирование по всем направлениям движения с весом, равным μ . Очевидно, что когда функция распределения определяется выражением (21), слагаемое, в которое входит $f^{(0)}$, обратится в ноль, поэтому нет необходимости в вычислении симметричной части функции распределения электронов.

Теперь следует найти функцию, которая в соответствии с определением имеет вид

$$\Phi_1(t) = \int_{-1}^0 \mu \cdot f(0, t, \mu) d\mu + \delta(t) \exp\left\{-\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2(z)}}\right\}. \quad (29a)$$

Покажем, что в диапазоне начальных энергий электронов $E_0 > 2$ кэВ первым слагаемым в выражении для $\Phi_1(t)$ (29a) можно пренебречь. Из изложенного выше ясно, что поток электронов, движущихся из полупространства к плоскости вылета, слабо анизотропен. Тогда в кинетическом уравнении при $\mu < 0$ можно пренебречь упругими столкновениями. Электроны, движущиеся к плоскости вылета, появляются из-за изменения направления движения электронов в результате упругих столкновений. Ясно, что чем меньше величина $\mu > 0$ перед упругим столкновением, тем больше у этого электрона вероятность иметь после столкновения направление движения к плоскости вылета, т.е. иметь после столкновения $\mu < 0$. Поскольку мы хотим провести оценку сверху, будем считать, что все электроны с $\mu > 0$ движутся с минимально возможным средним косинусом между нормалью к плоскости вылета и направлением скорости, т.е. с $\mu = 0,5$, соответствующим изотропному распределению. Интегрируя кинетическое уравнение по μ в пределах от 0 до -1 с весом 1 и μ , получим систему уравнений:

$$\frac{\partial f_-^{(1)}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + f_-^{(0)}(\bar{z}, t) = b(E_0) \int_0^t f_-^{(0)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt' + \alpha_1 \frac{\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} f_+(\bar{z}, t); \\ \frac{1}{3} \frac{\partial f_-^{(0)}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + f_-^{(1)}(\bar{z}, t) = b(E_0) \int_0^t f_-^{(1)}(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt' + \alpha_0 \frac{\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} f_+(\bar{z}, t), \quad (30)$$

где $\alpha_1 = \int_{-1}^0 g_e\left(E_0, \frac{1}{2} \rightarrow \mu, 1\right) \mu d\mu$; $f_+(\bar{z}, t)$ рассчитывается по формуле (23a) работы [2];

$$\alpha_0 = \int_{-1}^0 g_e\left(E_0, \frac{1}{2} \rightarrow \mu\right) d\mu.$$

Применяя к системе (30) преобразование Лапласа и исключая функцию $g_{-}^{(0)}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка для функции $g_{-}^{(1)}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$g_{-}^{(1)} = \frac{1}{4\beta(p)} \frac{\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} (\alpha_0 - 3\alpha_1) \exp[\beta(p)\bar{z}], \quad (31)$$

где $g_{-}^{(1)}$ – преобразование Лапласа функции $f_{-}^{(1)}(\bar{z}, t)$; $\beta(p) = 1 - b(E_0)l(p)$.

Когда $l(p)$ определена формулой $l(p) = b(E_0)/[p + b(E_0)]$, применение обратного преобразования Лапласа дает

$$f_{-}^{(1)}(0, t) = \frac{1}{4} \frac{\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} (\alpha_0 - 3\alpha_1) [\delta(t) + b(E_0)]. \quad (32)$$

Соответственно, для потока энергии из полупространства $\bar{z} > 0$ через плоскость вылета имеем

$$E_{-}(0) = \frac{E_0}{4} \frac{\sigma_e(E_0)}{\sigma_n(E_0)} (\alpha_0 - 3\alpha_1) \left[1 + \frac{b(E_0)}{2} \right]. \quad (33)$$

Расчеты показывают, что величина $E_{-}(0)/E_0$ при $E_0 = 2$ кэВ составляет единицы процентов от E_0 и быстро падает с увеличением начальной энергии электронов. Физически это объясняется тем, что, во-первых, угол рассеяния при упругих столкновениях сравнительно мал, во-вторых, сечение упругого рассеяния мало по сравнению с сечением неупругого рассеяния. Таким образом, при расчете энерговыделения в газе при $\bar{z} = 0$ можно не учитывать функцию распределения электронов, движущихся к плоскости вылета. Тогда с указанной точностью выполняется соотношение

$$\Phi_1(t) = \delta(t) \exp \left\{ - \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\bar{\mu}^2(z)}} \right\}. \quad (34)$$

Используя формулы (29) и (34), для средней энергии и энерговыделения в области значений $z_0(E_0) > \bar{z}$ можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ne}(\bar{z}) &= \bar{E}_n(Y(\bar{z}, E_0)); \\ \frac{d\bar{E}_{ne}(\bar{z})}{d\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}^2(X(\bar{z}, E_0))}} \frac{d\bar{E}_n(Y(\bar{z}, E_0))}{dY}, \\ Y(\bar{z}, E_0) &= \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{\bar{\mu}^2[X(z, E_0)]}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где величина $X(\bar{z}, E_0)$ рассчитывается по формулам (17а), (18) настоящей работы, а величины $\bar{E}_n(\bar{z})$ и $\frac{d\bar{E}_n(\bar{z})}{d\bar{z}}$ – по формулам соответственно (24) и (25) работы [2].

При численных расчетах для сокращения времени счета удобно пользоваться следующей аппроксимацией для функции $\bar{\mu}^2(z)$:

$$\bar{\mu}^2(z) = \left\{ 0,578 \left[1 + \frac{0,313}{(1 + 0,55z)^{4,2}} \right] \right\}^2.$$

Отметим, что поскольку при $z_0(E_0) < \bar{z}$ с точностью до десятых долей процента выполняется соотношение

$$\sqrt{\bar{\mu}^2(X(\bar{z}, E_0))} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то формулы (35) справедливы во всем полупространстве. Следует иметь в виду, что формулы (35) настоящей работы дают возможность учитывать упругие столкновения вне зависимости от метода,

которым рассчитывается релаксация энергии электронов за счет неупругих столкновений (в том числе, и численно).

Основываясь на вышеизложенных результатах, для величины зоны энерговыделения можно получить формулу

$$h_{ne}(E_0) = z_0 + \frac{\sqrt{3}}{K\left(E_0\left[1 - \frac{z_0(E_0)K(E_0)}{E_0}\right]\right)}. \quad (36)$$

3. Обсуждение полученных результатов. На рис.1 приведены расчеты средней энергии пучка электронов с учетом обоих видов торможения $\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)$ и с учетом только неупругих столкновений $\bar{E}_n(\bar{z}, E_0)$ для начальных энергий вылета электронов соответственно 10 и 5 кэВ. Видно, что учет упругих столкновений приводит к более быстрой энергетической релаксации, что, естественно, должно приводить к более высоким пиковым значениям энерговыделения в газе. На рис.2 для начальной энергии 2 кэВ приведены величины $d\bar{E}_n(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$; $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$, рассчитанные нами и определенные численно методом Монте-Карло ($d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$) [9], а также методом разложения функции по числам столкновений ($d\bar{E}_n(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$) [9]. Из этих данных видно, что аналитические расчеты удовлетворительно совпадают с результатами численных расчетов [9]. Кроме того, зависимости, приведенные на рис.2, свидетельствуют о том, что, во-первых, действительно, величина $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$ превосходит $d\bar{E}_n(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$. Во-вторых, эта величина сначала заметно растет, а затем, пройдя максимум, падает до нуля.

Рассмотрим физические причины указанных закономерностей. При учете только неупругих столкновений энергетическая релаксация пучка электронов происходит при движении по нормали к плоскости вылета $z = 0$, т.е. в элементе объема $dV = dx dy dz$, находящемся в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$, выделяется только часть энергии электронов, которые вылетели с элемента плоскости $dS = dy dx$ из точки $A_2(x_1, y_1, 0)$. Учет упругих столкновений, вызывающих изменение направления движения электронов, приводит к тому, что в элемент объема dV попадают электроны, которые вылетают из других точек плоскости $z = 0$ с координатами $x \neq x_1; y \neq y_1$ (рис.3). Это, естественно, приводит к увеличению энерговыделения в элементе объема dV . При этом ясно, что чем меньше средний косинус угла между нормалью к плоскости вылета и направлением движения электронов $\bar{\mu}_+(z_1)$, тем (при фиксированной координате z_1) больше часть плоскости вылета, «видимая» из точки A_1 . Таким образом, уменьшение $\bar{\mu}_+(z_1)$ приводит к более быстрой энергетической релаксации электронов. Это и является причиной того, что сначала $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$ растет. После того, как величина $\bar{\mu}_+(z_1)$ достигает своего предельного значения, равного 0,5, рост удельного энерговыделения прекращается.

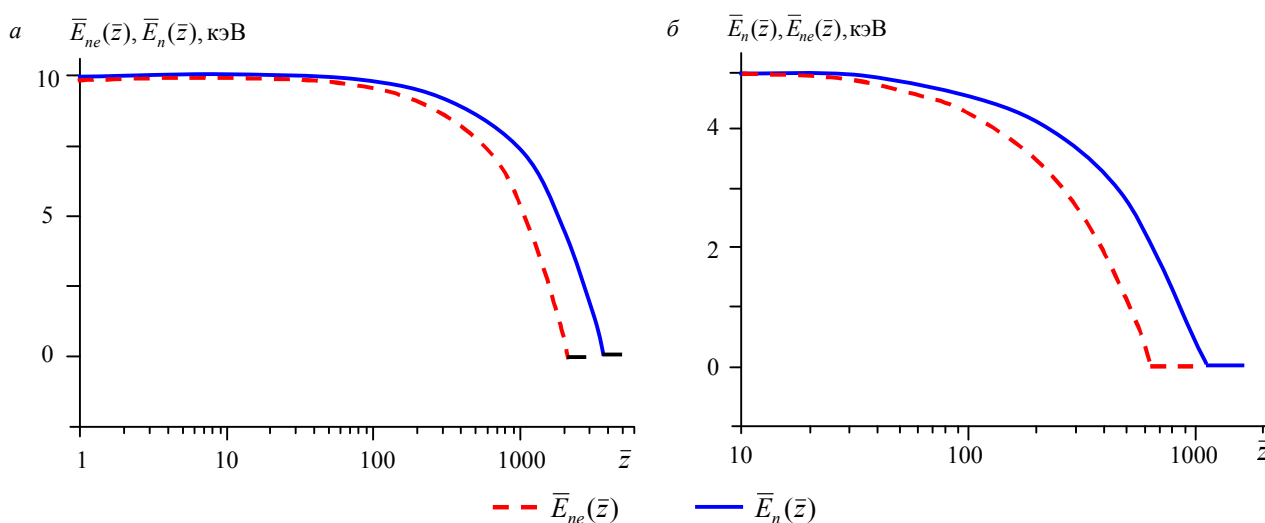


Рис.1. Зависимость средней энергии электронов от числа столкновений, рассчитанной с учетом упругих и неупругих столкновений $\bar{E}_{ne}(\bar{z})$ и только неупругих столкновений $\bar{E}_n(\bar{z})$ при начальной энергии электронов 10 кэВ (а) и 5 кэВ (б)

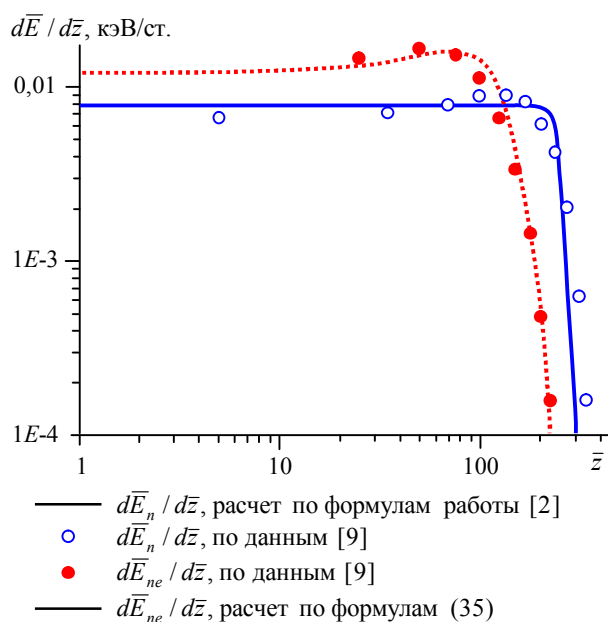


Рис.2. Зависимость удельного энерговыделения от числа столкновений (ст.), рассчитанная с учетом упругих и неупругих столкновений $d\bar{E}_{ne} / d\bar{z}$ и только неупругих столкновений $d\bar{E}_n / d\bar{z}$ при начальной энергии электронов 2 кэВ

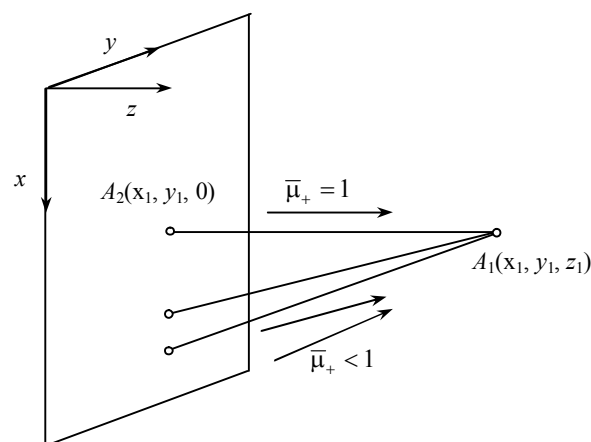


Рис.3. Пояснение к соотношению величин $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}) / d\bar{z}$ и $d\bar{E}_n(\bar{z}) / d\bar{z}$

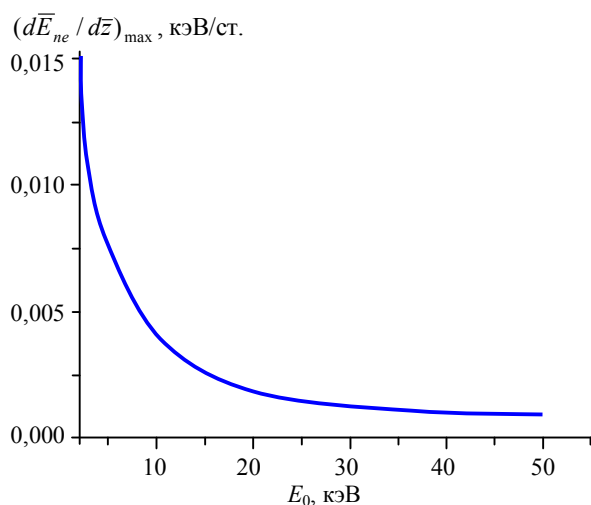


Рис.4. Зависимость максимального удельного энерговыделения от начальной энергии электронов

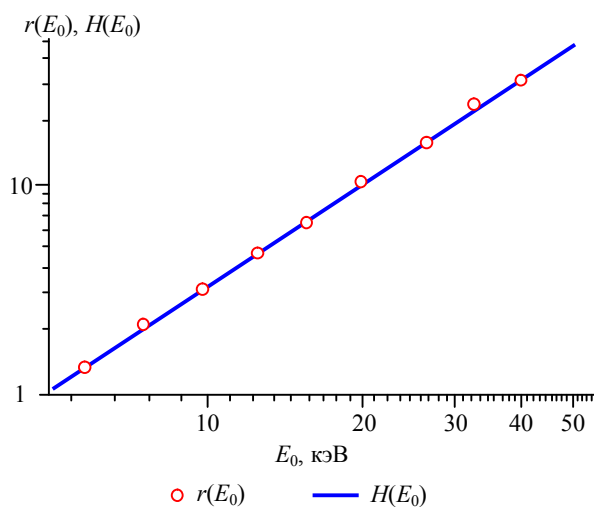


Рис.5. Сравнение относительной ширины зоны энерговыделения $r(E_0)$ и $H(E_0)$, соответственно измеренной автором работы [7] и рассчитанной нами

В работе [7] было экспериментально показано, что зависимость размеров зоны энерговыделения $R(E_0)$ и начальный участок зависимости $\bar{E}_1(\bar{z}, E_0)$ в области начальных энергий $5 \text{ кэВ} < E_0 < 54 \text{ кэВ}$ хорошо описываются следующими соотношениями:

$$R(E_0) = \alpha_1 E_0^{1,66}; \quad \bar{E}_1(\bar{z}, E_0) = E_0 \left(1 - \frac{\bar{z}}{R(E_0)} \right)^{0,6}. \quad (37)$$

Из второго соотношения (37) легко получить

$$\frac{d\bar{E}_1(0, E_0)}{d\bar{z}} = \bar{E}_1'(\bar{z}, E_0)_{\bar{z}=0} = \alpha_2 E_0^{-0,66}, \quad (38)$$

где α_1, α_2 – некоторые численные коэффициенты.

На рис.4 приведены сравнительные данные о максимальном удельном энерговыделении в газе при различных начальных энергиях электронов, а на рис.5, 6 – сравнительные данные расчета величин, не зависящих от констант α_1, α_2 , соответственно:

$$r(E_0) = R(E_0) / R(5keV); \quad H(E_0) = h_{ne}(E_0) / h_{ne}(5keV);$$

$$e(E_0) = \bar{E}_{ne}'(\bar{z}, E_0)_{\bar{z}=0} / \bar{E}_{ne}'(\bar{z}, 5keV)_{\bar{z}=0};$$

$$D(E_0) = \bar{E}_1'(\bar{z}, E_0)_{\bar{z}=0} / \bar{E}_1'(\bar{z}, 5keV)_{\bar{z}=0}.$$

Видно, что аналитические расчеты данной работы хорошо описывают экспериментальные результаты [7]. Кроме того, с ростом E_0 величина $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$ уменьшается, а размер зоны (рассчитанный для энергии электронов E_0 и выраженный в числе неупругих столкновений), где в основном выделяется энергия, – растет. Это связано с тем, что при увеличении энергии вылета падает средняя энергия, переданная при одном столкновении электрона с атомом газа. При этом данное уменьшение происходит по нелинейному закону. Кроме того, при увеличении энергии вылета электронов растет размер области, в которой происходит изотропизация функции распределения электронов. Указанные закономерности и приводят к наблюдаемой зависимости величины $d\bar{E}_{ne}(\bar{z}, E_0)/d\bar{z}$ от E_0 .

Заключение. Перечислим основные результаты, полученные в работе.

- Предложена физическая модель энергетической релаксации быстрых электронов в газе с учетом упругих и неупругих столкновений. Рассчитанная массовая тормозная способность воздуха хорошо описывает известные экспериментальные данные.
- Обнаружено, что учет упругих столкновений важен при энергетической релаксации пучка электронов. В частности, это приводит к значительному увеличению энерговыделения в газе и уменьшению области, в которой, в основном, происходит выделение энергии.
- Получены аналитические выражения для средней энергии по потоку и значения энерговыделения в газе, что существенно (в десятки раз) сокращает время расчета параметров зоны энерговыделения по сравнению с расчетами методом Монте-Карло.
- Проведены расчеты энерговыделения при различных начальных энергиях вылета электронов. Результаты находятся в удовлетворительном согласии с известными данными экспериментов и численных расчетов по методу разложения функции распределения по числам столкновений.

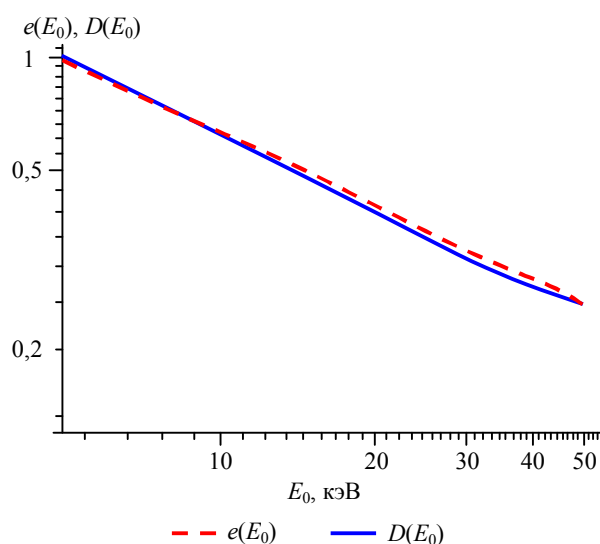


Рис.6. Сравнение удельного энерговыделения электронов $e(E_0)$ и $D(E_0)$, соответственно измеренного автором работы [7] и рассчитанного нами

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. 667 с.
2. Сухомлинов В.С. Аналитическая теория релаксации энергии при распространении пучка быстрых электронов в газе / В.С.Сухомлинов, А.С.Мустафаев // Теплофизика высоких температур. 2016, в печати.
3. Сухомлинов В.С. Влияние неупругих столкновений на релаксацию энергии пучка быстрых электронов в воздухе / В.С.Сухомлинов, А.С.Мустафаев // Записки Горного института. 2016. Т.219. С.392-402. DOI 10.18454/PMI.2016.3.392
4. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
5. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
6. Froman N. JWKB Approximation / N.Froman, P.O.Froman; Inst. of the Theoretical Phys., University of Uppsala. Sweden. 1965. 168 p.
7. Grun A.E. Lumineszenz-photometrische Messungen der Energieabsorption im Strahlungsfeld von Elektronenquellen Eindimensionaler Fall in Luft // Z. Naturforsch A. 1957. Vol.12a. P.89-95.
8. Mayol R.R. Total and transport cross section for elastic scattering of electrons by atoms / R.R.Mayol, F.Salvat // Atomuc Data and Nuclear Data Tables. 1997. Vol.65. N 21. P.55-154.
9. Sheikin E.G. Calculation of Space Distribution of Energy Deposited by E-Beam for Flow Control Applications / E.G.Sheikin, V.S.Sukhomlinov // AIAA Paper. 2006. P.1369-1374.

Авторы: В.С.Сухомлинов, д-р физ.-мат. наук, доцент, prima-ivs@mail.ru (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия), А.С.Мустафаев, д-р физ.-мат. наук, профессор, alexmustafaev@yandex.ru (Санкт-Петербургский горный университет, Россия).

Статья принята к публикации 18.01.2016.