

УДК 02.2, 04.1

ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ НА РЕЛАКСАЦИЮ ЭНЕРГИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ВОЗДУХЕ

В.С.СУХОМЛИНОВ¹, А.С.МУСТАФАЕВ²¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Россия² Санкт-Петербургский горный университет, Россия

Работа посвящена разработке аналитической теории для расчета пространственного распределения энерговыделения при распространении пучка быстрых электронов в газе (в частности, в воздухе) с учетом неупругого взаимодействия. Рассматриваются энергии электронов 1-100 кэВ. На основании анализа данных о сечениях упругого и неупругого взаимодействия электронов с молекулами газов, содержащихся в воздухе, делается вывод о том, что неупругое взаимодействие, в основном, приводит к релаксации энергии, а упругое – к релаксации импульса. При решении кинетического уравнения Больцмана для электронов используется модельное сечение неупругих столкновений электронов с молекулами, которое обеспечивает хорошее описание экспериментально найденной энергетической зависимости массовой тормозной способности электронов. Полученные результаты для зависимости средней энергии электронов от числа неупругих столкновений находятся в хорошем соответствии с расчетами по методу разложения функции распределения по числам столкновений и решению аналогичной задачи методом Монте-Карло.

Ключевые слова: взаимодействие пучка электронов с энергией 1-100 кэВ с плазмой, упругое и неупругое взаимодействие, релаксация энергии, релаксация импульса, кинетическое уравнение Больцмана, численное моделирование методом Монте-Карло.

Как цитировать эту статью: Сухомлинов В.С. Влияние неупругих столкновений на релаксацию энергии пучка быстрых электронов в воздухе / В.С.Сухомлинов, А.С.Мустафаев // Записки Горного института. 2016. Т.219. С.392-402. DOI 10.18454/PMI.2016.3.392

Введение. В настоящее время для создания гиперзвуковых летательных аппаратов [9, 16] одной из актуальных задач является релаксация быстрых электронов с энергиями до 100 кэВ в газе. Для оптимизации внешнего аэродинамического обтекания, а также улучшения характеристик двигателей таких летательных аппаратов предлагается использовать МГД-управление газовыми потоками [10, 14]. При этом для ионизации газа (необходимой для создания МГД-эффекта) можно использовать высокоэнергетичный электронный пучок [12]. Расчет степени ионизации возникающей плазмы сводится к вычислению пространственного распределения выделяемой в газе энергии. В свою очередь, это распределение рассчитывается с использованием метода Монте-Карло. Поскольку начальные энергии электронов велики, а дифференциальное сечение столкновения электронов с атомами и молекулами газа быстро падает с увеличением переданной атому энергии, потери энергии электронов при каждом столкновении малы. Это обстоятельство приводит к необходимости учета многих тысяч столкновений, что даже при современном быстродействии вычислительной техники требует больших затрат машинного времени [17, 18].

В работе [15] для решения поставленной задачи был реализован известный метод разложения функции распределения электронов по числам столкновений [6], который существенно снижает время расчета зоны энерговыделения при прохождении пучка быстрых электронов в газе. Однако для задач плазменной аэродинамики и этого оказывается недостаточно. Действительно, для описания взаимодействия пучка быстрых электронов с неоднородным газом необходимо решать самосогласованную задачу. Так, например, для неоднородности, вызванной ударной волной, распределение плотности зависит от пространственного распределения энерговыклада в области ударного слоя. Последнее, в свою очередь, определяется распределением плотности, что требует решения самосогласованной задачи. С учетом того, что задача о косой ударной волне при наличии источника

энергии в области ударного слоя решается численно, можно ожидать, например, что реализация метода последовательных приближений для решения самосогласованной задачи с использованием численного расчета зон энерговыделения также потребует больших затрат машинного времени.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим задачу в одномерном приближении. Пусть в полупространство $z > 0$, заполненное газом с концентрацией молекул (атомов) $N(z)$, по нормали к плоскости $z = 0$ влетает поток электронов с энергией E_0 (рис.1). Электроны испытывают упругие и неупругие столкновения, в результате чего направление их движения отклоняется от оси z , а энергия уменьшается. Пусть функция распределения элект-

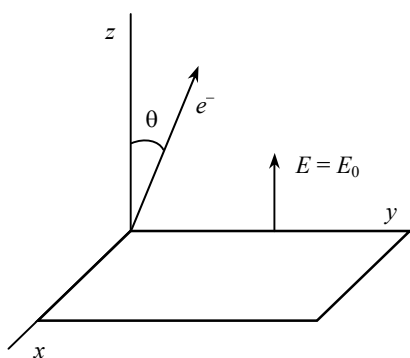


Рис.1. Система координат в задаче о релаксации пучка электронов



тронов по энергиям и направлениям движения $f(E, \mu, z)$, где $\mu = \cos \theta$; θ – угол между осью z и направлением движения электрона. В задаче требуется найти величину $dE_1(z)/dz$. При этом

$$E_1(z) = \int_0^{E_0} \int_{-1}^1 E f(E, \mu, z) \mu dE d\mu; \quad \int_0^{E_0} \int_{-1}^1 f(E, \mu, z) dE d\mu = 1. \quad (1)$$

Поставленная задача сводится к решению следующего интегродифференциального уравнения Больцмана для функции $f(E, \mu, z)$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial f}{\partial z} + \Lambda_n(E, z) f + \Lambda_e(E, z) f = 2\pi N(z) \int_{E-1}^{E_0} \int_{-1}^1 f(E', \mu', z) \sigma_n(E', \mu' \rightarrow E, \mu) d\mu' dE' + \\ + 2\pi N(z) \int_{E-1}^{E_0} \int_{-1}^1 f(E', \mu', z) \sigma_e(E', \mu' \rightarrow E, \mu) d\mu' dE', \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Lambda_n(E, z)$ и $\Lambda_e(E, z)$ – обратные длины свободного пробега электрона соответственно до неупругого и упругого столкновений; $\sigma_n(E', \mu' \rightarrow E, \mu)$ и $\sigma_e(E', \mu' \rightarrow E, \mu)$ – сечения соответственно неупругого и упругого рассеяния электрона на атоме (молекуле), без штриха обозначаются переменные после столкновения, а со штрихом – до столкновения.

Для обратной длины свободного пробега выполняется

$$\begin{aligned} \Lambda_n(E, z) = 2\pi N(z) \int_0^E \int_{-1}^1 \sigma_n(E, \mu \rightarrow E', \mu') d\mu' dE'; \\ \Lambda_e(E, z) = 2\pi N(z) \int_0^E \int_{-1}^1 \sigma_e(E, \mu \rightarrow E', \mu') d\mu' dE'. \end{aligned} \quad (2a)$$

Уравнение (2) дополняется граничными условиями

$$\begin{aligned} f(E, \mu, 0) = \delta(E - E_0) \delta(\mu - 1) \text{ при } \mu > 0; \\ f(E, \mu, z)_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2б)$$

Соотношения (2), (2a) и (2б) и являются исходными для решения поставленной задачи.

В общей постановке найти решение уравнения (2) не удастся. Для математического упрощения поставленной задачи проанализируем процессы, происходящие при упругих и неупругих столкновениях с учетом конкретных зависимостей сечений столкновений от энергии и угла рассеяния электрона на атомах (молекулах) газа.

Дифференциальное сечение по переданной энергии при неупругих столкновениях электрона (на один электрон мишени) определяется соотношением [4]

$$\frac{d\sigma_n(E, W)}{dW} = \frac{2\pi r_0^2 m_e c^2}{\beta^2 W^2} \left[1 + \frac{W^2}{(E - W)^2} + \frac{\tau^2}{(1 + \tau)^2} \frac{W^2}{E^2} - \frac{(1 + 2\tau)}{(1 + \tau)^2} \frac{W}{(E - W)} \right], \quad (3)$$

а средние потери энергии при одном столкновении

$$\bar{W}_n = \int W \frac{d\sigma_n}{dW} dW / \int \frac{d\sigma_n}{dW} dW, \quad (3a)$$

где E – энергия электрона; $W = E' - E$ – энергия, переданная атому (молекуле) газа при неупругом столкновении; r_0 – классический радиус электрона; $\beta = v/c$; $\tau = E/m_e c^2$.

Принимается, что максимальное значение $W = E/2$ [4] или $W = E$ [7]. При релятивистских энергиях электрона параметр β следует рассчитывать по формуле $\beta^2 = \tau(\tau + 2)/(\tau + 1)^2$. При этом вводят понятия далеких и близких столкновений с помощью задания некоторой пороговой энергии W_c . Для далеких столкновений $W < W_c$, для близких $W > W_c$. При расчете угла рассеяния быстрого электрона используется соотношение

$$\mu_{0n} = \sqrt{\frac{(1 - w)(2 + \tau)}{2(1 - w) + \tau}}, \quad (4)$$

где $w = W/E$.



Для дифференциального сечения упругого рассеяния σ_e по углу рассеяния Ω авторами [12] было предложено следующее выражение:

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \frac{r_0^2 Z^2 (1-\beta^2)}{\beta^4 (1-\cos\theta + 2\eta)^2}, \quad (5)$$

где Z – заряд ядра атома.

Параметр экранирования η в приближении Мольера определяется соотношением [2]

$$\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} Z^{\frac{2}{3}} \frac{(1-\beta^2)}{\beta^2} \left(1,33 + 3,76 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right), \quad (5a)$$

где $\alpha = Z/137$.

Косинус угла рассеяния при упругом столкновении определяется соотношением

$$\mu_0 = \int \mu \frac{d\sigma_e}{d\Omega} d\Omega / \int \frac{d\sigma_e}{d\Omega} d\Omega. \quad (6)$$

Потери электрона $\overline{W}$ при упругом столкновении определяются по формуле

$$\overline{W}(E) = \int \mu \frac{d\sigma_e}{d\Omega} W(\mu, E) d\Omega / \int \frac{d\sigma_e}{d\Omega} d\Omega, \quad (6a)$$

при этом

$$W(\mu, E) = E \left[\frac{\sqrt{M^2 - 1 + \mu^2} - \mu}{M - 1} - 1 \right]^2, \quad (6b)$$

где M – отношение массы атома к массе электрона.

Соотношение (6b) справедливо для упругих столкновений при любом потенциале сталкивающихся частиц [6].

С использованием формул (3)–(6b) проведено большое число расчетов среднего косинуса угла рассеяния и средней потери энергии при упругом и неупругом рассеянии электрона на молекулах азота, кислорода и углекислого газа (основных газов воздуха). Расчеты проводились в диапазоне энергий электронов от нескольких единиц до 100 кэВ. Выяснилось, что основной вклад в торможение электронов в этих условиях вносят неупругие столкновения, а в изменение направления движения электронов – упругие. Кроме того, интегральное сечение неупругих столкновений оказывается много больше такового для упругих столкновений. Исходя из этого, можно упростить уравнение (2), считая, что неупругие столкновения происходят при сохранении направления, а упругие – при сохранении энергии.

Таким образом, мы имеем возможность считать, что в интеграле неупругих столкновений сечение столкновений зависит только от переменных E, W , а в интеграле упругих столкновений – от E, μ_0 , где μ_0 – косинус угла рассеяния электрона. Это существенно упрощает задачу.

Дальнейшее решение поставленной задачи разобьем на три этапа. Сначала рассмотрим процесс распространения электронов в газе с учетом только неупругих столкновений, затем – только упругих и на заключительном этапе – с учетом обоих процессов.

2. Решение кинетического уравнения с учетом только неупругих столкновений. Введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{E}{E_0}; \quad \bar{z} = \int_0^z \Lambda_n(1, E_0, y) dy, \quad (7)$$

где $\Lambda_n(1, E_0, z) = \Lambda_n(E_0 x, z)_{x=1}$.

Тогда с учетом вышесказанного уравнение (2) перепишется в виде

$$\frac{\partial f(\bar{z}, x)}{\partial \bar{z}} + f(\bar{z}, x) A(x) = a \int_x^1 f(\bar{z}, x') \sigma_{nd}(x', x' - x) dx'; \quad (8)$$

$$f(0, x) = \delta(x - 1),$$



где $A(x) = \Sigma_n(x, E_0) / \Sigma_n(1, E_0)$; $a = 1 / \Sigma_n(1, E_0)$; $\Sigma_n(x, E_0) = E_0 \int_0^x \sigma_{nd}(x, x-x') dx'$; $\sigma_{nd}(x', x'-x) = d\sigma_n(E_0 x', E_0(x'-x)) / (E_0 d(x'-x))$ – дифференциальное по переданной энергии сечение неупругого столкновения электрона.

Для решения уравнения (8) введем функцию $\varphi(\bar{z}, x)$:

$$f(\bar{z}, x) = \varphi(\bar{z}, x) + \exp(-\bar{z})\delta(x-1). \quad (9)$$

Очевидно, что это соотношение соответствует разбиению потока электронов на рассеянную (функция $\varphi(\bar{z}, x)$) и нерассеянную части. Для дальнейшего упрощения задачи предположим, что полное сечение неупругого рассеяния слабо зависит от энергии электронов. Как будет видно из дальнейшего, это предположение оправдано. Тогда $\sigma_n(x, x-x') = \sigma_n(x-x')$; $A(x) = 1$. Вводя переменные $t = 1-x$; $t' = 1-x'$ и функцию

$$F(\bar{z}, t) = \varphi(\bar{z}, 1-t) \text{ при } t < 1;$$

$$F(\bar{z}, t) = 0 \text{ при } t > 1,$$

из (8) получим кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial F(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} + F(\bar{z}, t) = a \int_0^t F(\bar{z}, t') \sigma_{nd}(t-t') dt' + a \exp(-\bar{z}) \sigma_{nd}(t). \quad (10)$$

Применяя преобразование Лапласа по переменной t и пользуясь теоремой о свертке [5], получим

$$\frac{\partial g(\bar{z}, p)}{\partial \bar{z}} + [1 - al(p)]g(\bar{z}, p) = a \exp(-\bar{z})l(p) \text{ при } g(0, p) = 0, \quad (11)$$

где $g(\bar{z}, p) = \int_0^\infty F(\bar{z}, t) \exp(-pt) dt$; $l(p) = \int_0^\infty \sigma_{nd}(t) \exp(-pt) dt$.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (11) с нулевыми граничными условиями при $\bar{z} = 0$ имеет решение

$$g(\bar{z}, p) = \exp(-\bar{z}) \{ \exp[al(p)\bar{z}] - 1 \}. \quad (12)$$

Соответственно, для $\varphi(\bar{z}, x) = F(\bar{z}, t)_{t=1-x}$ получим

$$F(\bar{z}, t) = \frac{\exp(-\bar{z})}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{ \exp[azl(p)] - 1 \} \exp(pt) dp \text{ при } t = 1-x. \quad (13)$$

Для вычисления обратного преобразования Лапласа можно воспользоваться теоремой о разложении образа Лапласа в ряд Лорана по степеням $1/p$ в окрестности точки $p \rightarrow \infty$ [5]. Тогда имеем

$$F(\bar{z}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(\bar{z}) t^k, \text{ если } g(\bar{z}, p)_{p \rightarrow \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^{-k}. \quad (14)$$

Для получения явных выражений для функций $c_k(\bar{z})$ удобно пользоваться тем, что разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности по отрицательным степеням аргумента тождественно разложению в ряд Тейлора в окрестности нуля. Кроме того, можно получить соотношение, которое оказывается полезным при вычислении коэффициентов в (14):

$$l(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_{nd}^{(k)}(0)}{p^{k+1}}, \quad (15)$$

где $\sigma_{nd}^{(k)}(0) = \left. \frac{\partial^k \sigma_{nd}(x)}{\partial x^k} \right|_{x=0}$.

Ряд авторов при решении задач, подобных той, которая рассматривается в данной работе, используют приближение непрерывного торможения [11, 13]. Оказывается, в рассматриваемой ситуации это не совсем правомерно. Действительно, как известно, приближение непрерывного торможе-

ния используется в случаях, когда обмен энергией между сталкивающимися частицами за одно столкновение мал. Тогда в интеграле столкновений используют разложение функции распределения в ряд Тейлора

$$f(\bar{z}, x') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x' - x)^k. \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в уравнение (8), получим

$$\frac{\partial f(\bar{z}, x)}{\partial \bar{z}} + f(\bar{z}, x) A(x) = a \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) f^{(k)}(\bar{z}, x), \quad (17)$$

где $b_k(x) = \frac{1}{k!} \int_x^1 (x' - x)^k \sigma_{nd}(x', x' - x) dx'.$

Далее используют метод последовательных приближений, увеличивая число слагаемых в правой части формулы (17). Как правило, ограничиваются членами $k = 1$ или $k = 2$. Отметим, что в общем случае нельзя ожидать быстрой сходимости ряда в правой части (17). Для этого необходимо, чтобы члены ряда в правой части этого выражения, по крайней мере, не возрастали. В работе [6] показано, что можно ограничиться членами до $k = 2$, если функция распределения по энергиям близка к максвелловской с истинной средней энергией. Однако в нашем случае это не так в силу граничного условия (8).

Оценим сходимость ряда в правой части уравнения (17), считая, что $f(\bar{z}, x)$ как функция переменной x имеет колоколообразную форму с максимумом около $x = x_0 < 1$ и шириной Δ . Легко видеть, что модуль первой производной $|f^{(1)}(\bar{z}, x)|$ имеет два максимума, при этом

$$|f^{(1)}(\bar{z}, x)|_{\infty} \approx \frac{2f(\bar{z}, x_0)}{\Delta}.$$

Аналогично модуль второй производной имеет три максимума и по порядку величины

$$|f^{(2)}(\bar{z}, x)|_{\infty} \approx \frac{2f(\bar{z}, x_0)}{\Delta^2},$$

где знак « ∞ » означает «по порядку».

Таким образом, выполняется уравнение

$$a_k(\bar{z}, x) = \frac{2f^{(k)}(\bar{z}, x)}{k!} \int_x^1 (x' - x)^k \sigma_{nd}(x, x' - x) dx' \approx \frac{2f(\bar{z}, x_0)}{\Delta^k k!} \int_x^1 (x' - x)^k \sigma_{nd}(x, x' - x) dx'.$$

Как показывают расчеты, для оценок достаточно считать, что дифференциальное сечение неупругого столкновения по переданной энергии имеет следующую зависимость:

$$\sigma_{nd}(x, x' - x) \cong \Sigma(x)(x' - x)^{-2} \text{ при } x' - x > x_{\min}; x_{\min} \ll 1,$$

где $\Sigma(x)$ – некоторая функция безразмерной энергии.

Используя это выражение, для величины $a_k(\bar{z}, x)$ получим оценку

$$a_k(\bar{z}, x) \approx \frac{2f(\bar{z}, x_0)\Sigma(x)}{k!(k-1)\Delta^k} [(1-x)^{k-1} - (x_{\min})^{k-1}]. \quad (18)$$

Видно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Как уже говорилось, из-за резко падающей зависимости дифференциального сечения от переданной энергии релаксация энергии электронов в рассматриваемых условиях происходит очень медленно. Учитывая, что при $\bar{z} = 0$ выполняется условие $\Delta = 0$, можно полагать, что в широкой пространственной области полуширина функции распределения мала. Тогда, считая, что $\Delta \ll 1, f(\bar{z}, x_0) \cong 1; 1 - x \gg x_{\min}$, оценим величину k , при которой выполняется соотношение $a_k(\bar{z}, x) \approx f(\bar{z}, x_0)\Sigma(x)$. Именно при выполнении этого соотношения поправки, вносимые при



добавлении следующего члена в оборванный ряд в правой части (18), начинают убывать. Используя для $k!$ формулу Стирлинга, имеем

$$k \approx \left[\frac{e(1-x)}{\Delta} \right],$$

где $[x]$ означает целую часть числа x .

Видно, что в основной области значений безразмерной энергии выполняется неравенство $k \gg 1$. Таким образом, доказано, что применение приближения непрерывного торможения с $k = 1, 2$ в рассматриваемой задаче неправомерно. Использование же дифференциальных уравнений более четвертого порядка наталкивается на известные трудности.

При выборе конкретной функции $\sigma_{nd}(x' - x)$ поступим следующим образом. К сожалению, в литературе отсутствуют экспериментальные данные о реальной зависимости $\sigma_{nd}(x' - x)$ и формула (8) получена чисто теоретически. Однако при ее использовании в соотношениях, приведенных выше, возникает необходимость в громоздких вычислениях. На наш взгляд, критерием применимости той или иной зависимости дифференциального сечения неупругого рассеяния от переданной атому газа энергии должно служить совпадение рассчитанной с ее помощью и экспериментально измеренной массовой тормозной способности. Как известно, она определяется следующим образом [7]:

$$\frac{1}{\rho} S = NZ \int_{E_{\min}(E_0)}^{E_0} W \sigma_{nd}(E_0, W) dW, \quad (19)$$

где S – тормозная способность; ρ – плотность.

Предположим, что сечение $\sigma_{nd}(x' - x)$ описывается следующей зависимостью:

$$\sigma_{nd}(x' - x) = \Sigma_n(1, E_0) b(E_0) \exp[-b(E_0)(x' - x)]. \quad (20)$$

При этом параметры $\Sigma_n(1, E_0), b(E_0)$ находят из наилучшего совпадения рассчитанной и экспериментально определенной [7] зависимостей массовой тормозной способности воздуха $S(E_0)/\rho$.

Таким образом, нами было получено:

$$b(E_0) = \frac{\frac{E_0}{E_{\min}} - 1}{\ln\left(\frac{E_0}{E_{\min}}\right) + \frac{E_{\min}}{E_0} - 1}; \quad (21)$$

$$\Sigma_n(1, E_0) = \frac{A(E_0)}{b(E_0)} \frac{1}{E_0} \left\{ \exp\left[-b(E_0) \frac{E_{\min}(E_0)}{E_0}\right] - \exp[-b(E_0)] \right\}; \quad (21a)$$

$$\frac{E_{\min}(E_0)}{E_0} = 2,258 \frac{\exp[-0,025(E_0 - 0,4)]}{E_0^{0,8}} \text{ при } E_0 < 10 \text{ кэВ};$$

$$\frac{E_{\min}(E_0)}{E_0} = 2,258 \frac{\exp[-0,025(E_0 - 0,4)]}{E_0^{0,8}} \left[1 + 2,7 \cdot 10^{-4} (E_0 - 10)^2 \right] \text{ при } E_0 > 10 \text{ кэВ};$$

$$A(E_0) = 16,2 \frac{b(E_0)}{E_0} \frac{\left(\frac{E_0}{E_{\min}} - 1\right)}{E_0^2} \exp\left(b(E_0) \frac{E_{\min}}{E_0}\right).$$

Величины $\Sigma_n(1, E_0)$ и E_0 в (21a) выражены соответственно в квадратных сантиметрах и килоэлектрон-вольтах; $E_{\min}(E_0)$ – в электрон-вольтах; $A(E_0)$ – в 10^{-18} квадратных сантиметров на килоэлектрон-вольт.

Далее сравнивали значения $S(E_0)/\rho$ для воздуха. Видно, что рассчитанные и экспериментальные данные по тормозной способности хорошо совпадают (рис.2). Зависимость $E_{\min}(E_0)$ оказывается падающей функцией (рис.3). При этом абсолютная величина $E_{\min}(E_0)$ весьма мала. Полное сечение

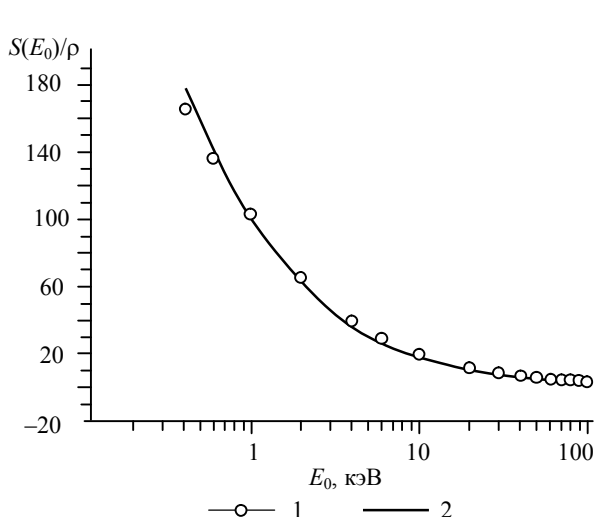


Рис.2. Экспериментальные данные работы [5] (1) и рассчитанная по разработанной теории зависимость (2) массовой тормозной способности воздуха от энергии электронов

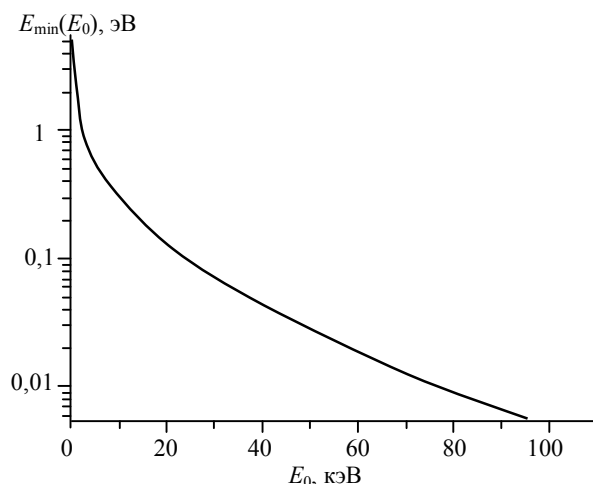


Рис.3. Рассчитанная по разработанной теории зависимость величины $E_{\min}(E_0)$ от энергии электронов E_0

неупругого рассеяния, полученное из формулы (20), оказывается слабо зависящим от энергии и для воздуха равно приблизительно $3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$.

Когда $\sigma_{nd}(x' - x)$ определяется формулой (20), выполняется соотношение

$$al(p) = \frac{b(E_0)}{p + b(E_0)}. \quad (22)$$

Вычисления функции $F(\bar{z}, t)$ с помощью уравнения (13) дают [3]

$$F(\bar{z}, t) = \sqrt{\frac{b(E_0)\bar{z}}{t}} \exp[-(\bar{z} + b(E_0)t)] I_1(2\sqrt{b(E_0)\bar{z}t}), \quad (23)$$

где $I_1(y)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка.

Соответственно для функции распределения электронов по энергиям $f(\bar{z}, x)$ и средней энергии $E_1(\bar{z}, E_0)$ имеем

$$f(\bar{z}, x) = \sqrt{\frac{b(E_0)\bar{z}}{1-x}} \exp[-(\bar{z} + b(E_0)(1-x))] I_1(2\sqrt{b(E_0)(1-x)\bar{z}}) + \exp(-\bar{z})\delta(x-1); \quad (23a)$$

$$E_1(\bar{z}, E_0) = E_0 \left\{ \exp(-\bar{z}) + 2\sqrt{b(E_0)\bar{z}} \int_0^1 (1-y^2) f_1(\bar{z}, y, E_0) dy \right\}, \quad (24)$$

где $f_1(\bar{z}, y, E_0) = \exp[-(\bar{z} + b(E_0)y^2)] I_1(2\sqrt{b(E_0)\bar{z}y})$.

Дифференцируя выражение (24), получим

$$\frac{dE_1(\bar{z}, E_0)}{d\bar{z}} = E_0 \left\{ -\exp(-\bar{z}) + \sqrt{\frac{b(E_0)}{\bar{z}}} \int_0^1 (1-y^2) [f_1(\bar{z}, y, E_0) + 2\bar{z}f_2(\bar{z}, y, E_0)] dy \right\}, \quad (25)$$

где

$$f_2(\bar{z}, y, E_0) = \exp[-(\bar{z} + b(E_0)y^2)] \times \left\{ -I_1(2\sqrt{b(E_0)\bar{z}y}) + \sqrt{\frac{b(E_0)}{\bar{z}}} \left[I_0(2\sqrt{b(E_0)\bar{z}y})y - \frac{I_1(2\sqrt{b(E_0)\bar{z}y})}{2\sqrt{b(E_0)\bar{z}}} \right] \right\};$$

$I_0(y)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Можно показать, что в области существенного энерговыделения с точностью до нескольких процентов выполняется соотношение

$$\frac{dE_1(\bar{z}, E_0)}{d\bar{z}} = K(E_0) = -E_0 \left\{ \frac{1}{b(E_0)} - \exp[-b(E_0)] \left[1 - \frac{1}{b(E_0)} + \frac{1}{b^2(E_0)} \right] \right\}. \quad (26)$$

В случае, когда выполняется условие $\sqrt{b(E_0)\bar{z}}y > 200$ для вычислений удобно использовать асимптотику модифицированных функций Бесселя [1]. Тогда при $\sqrt{b(E_0)\bar{z}}y > 200$ формулы для функций $f_1(\bar{z}, y, E_0)$ и $f_2(\bar{z}, y, E_0)$ приобретут следующий вид:

$$f_1(\bar{z}, y, E_0) = \frac{\exp[2\sqrt{b(E_0)\bar{z}}y - b(E_0)y^2 - \bar{z}]}{2\sqrt{\pi y}(b(E_0)\bar{z})^{0.25}}, \quad (27)$$

$$f_2(\bar{z}, x, E_0) = -f_1(\bar{z}, x, E_0) \left(1 + \frac{1}{4\bar{z}} - y\sqrt{\frac{b(E_0)}{\bar{z}}} \right).$$

Напомним, что безразмерная координата $\bar{z}$ выражена в числах столкновений.

3. Сравнение расчетов по полученным формулам с известными данными и обсуждение результатов. Результаты вычислений сравнивали с данными, полученными с помощью численного метода разложения функции распределения по числам столкновений [15], при $E_0 = 2$ кэВ и $E_0 = 10$ кэВ (рис.4-6). Как видно из рис.4 оба метода дают достаточно близкие результаты. Расчеты показывают,

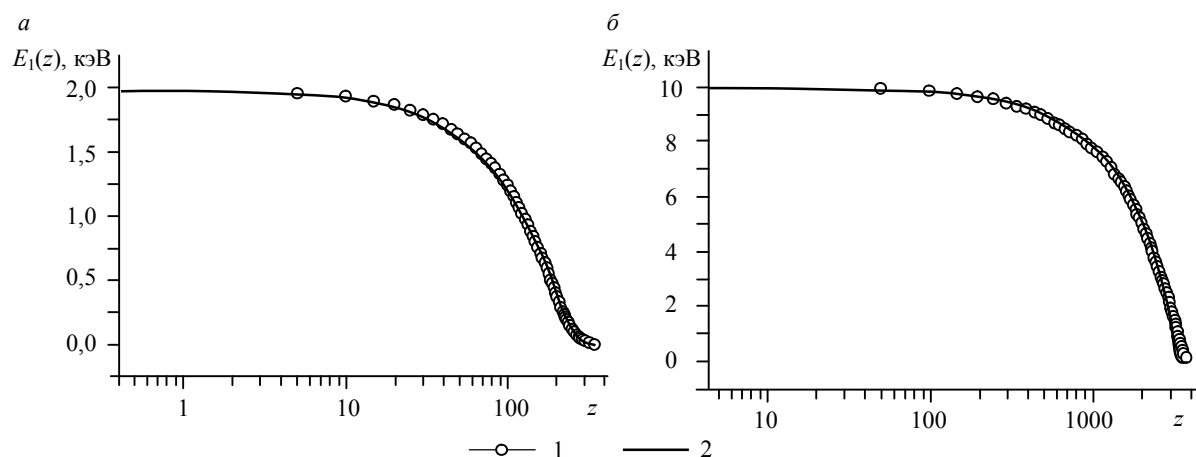


Рис.4. Сравнение средней энергии электронов от числа неупругих столкновений в воздухе, взятой из работы [15] (1) и рассчитанной по полученным формулам (2), при начальной энергии электронов $E_0 = 2$ кэВ (а) и $E_0 = 10$ кэВ (б)

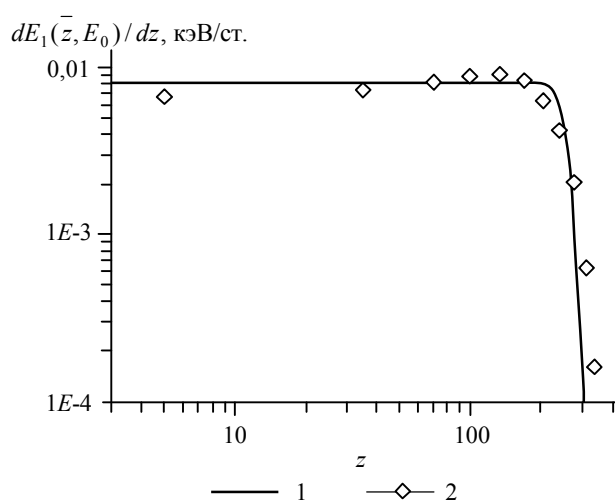


Рис.5. Сравнение энергосвечения $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$ от числа неупругих столкновений (ст.) в воздухе: 1 – рассчитанных по формуле (25); 2 – приведенных в работе [15], – при начальной энергии электронов $E_0 = 2$ кэВ

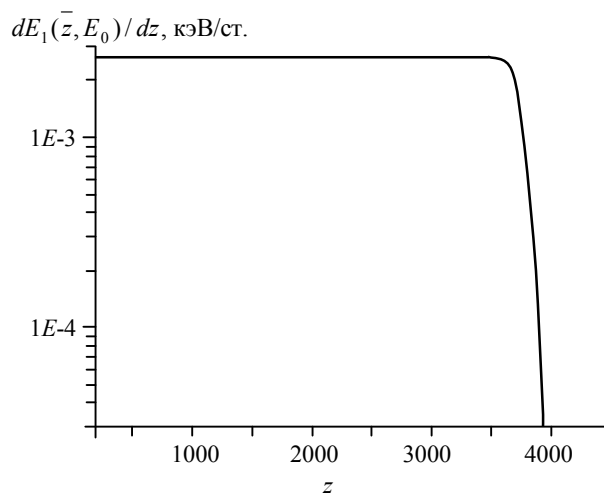


Рис.6. Зависимость энергосвечения $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$ от числа неупругих столкновений (ст.) в воздухе, рассчитанная по формуле (25), при начальной энергии электронов $E_0 = 10$ кэВ

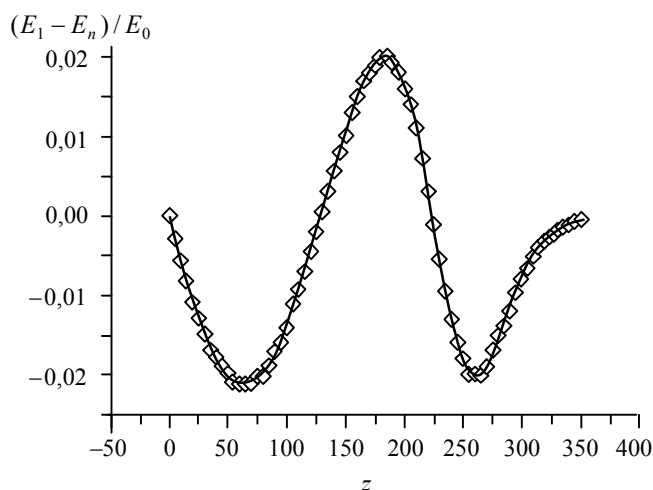


Рис.7. Относительная разность средних энергий $(E_1 - E_n)/E_0$ при распространении пучка электронов в воздухе; начальная энергия электронов $E_0 = 2$ кэВ; E_1 рассчитана по формуле (24); E_n приведена в работе [15]

что расхождение при $E_0 = 2$ кэВ не превосходит 2 %, а при $E_0 = 10$ кэВ – 5 % (рис.7). Зависимость $E_1(\bar{z}, E_0)$ имеет монотонно падающий характер, что физически вполне понятно. Видно, что даже при $E_0 = 10$ кэВ электроны полностью теряют энергию после порядка 4000 столкновений. Это говорит о том, что для $E_0 = 100$ кэВ расчеты методами Монте-Карло по адекватным моделям столкновений будут, по-видимому, затруднительны.

Сравнение данных, приведенных на рис.5, 6, показывает, что расчеты обоими методами дают качественно схожие результаты. Отличие лишь в том, что начальная величина $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz_{z=0}$, вычисленная в настоящей работе, несколько выше. Далее она остается практически постоянной, а затем резко падает. Аналогичная зависимость, полученная методом

разложения по числам столкновений, вначале растет и при некотором значении координаты начинает превышать величину $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$, вычисленную по формуле (25), а затем также резко падает. В целом размеры областей существенного энерговыделения, рассчитанные обоими методами, хорошо согласуются, а средние величины $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$ близки. Это, по-видимому, вызвано тем, что при расчете тормозной способности оба метода дают одинаковые результаты. Тот факт, что величина $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$, полученная в данной работе, практически постоянна в области существенного энерговыделения, видимо, связан с пренебрежением зависимостью полного сечения неупругого рассеяния от текущей энергии электронов.

Заключение. Основные полученные результаты следующие:

- найдено аналитическое решение уравнения Больцмана для электронов: 1) в случае, когда учитываются только неупругие столкновения; 2) полное сечение неупругих столкновений не зависит от энергии электронов; 3) для произвольной зависимости дифференциального сечения неупругого столкновения от переданной энергии и без учета изменения направления движения в результате неупругих столкновений;
- получены аналитические выражения для средней энергии по потоку и значения энерговыделения в газе; рассчитанная массовая тормозная способность воздуха хорошо описывает известные экспериментальные данные;
- проведены расчеты величин $dE_1(\bar{z}, E_0)/dz$, $E_1(\bar{z}, E_0)$ при различных начальных энергиях вылета электронов; результаты хорошо согласуются с численными расчетами по методу разложения функции распределения по числам столкновений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М.Абрамовиц, И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
2. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. М.: Энергоатомиздат, 1991. 200 с.
3. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований / Г.Бейтмен, А.Эрдейи. М.: Наука, 1969. Т.1. 343 с.
4. Кольчужкин А.М. Введение в теорию прохождения частиц через вещество / А.М.Кольчужкин, В.В.Учайкин. М.: Атомиздат, 1978. 255 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн. М.: Наука, 1974. 831 с.
6. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. 667 с.
7. Berger E. Stopping powers for electrons and positrons // International Commission on Radiation Units and Measurements. Maryland. 1984. Vol.37. P.42-45.
8. E-beam Sustained Low Power Budget Air plasma / P.Palm, E.Plonjes, I.V.Adamovich, J.W.Rich // AIAA Paper. 2002. P.0637-0642.
9. Fraishtadt V.L. Use of MHD System in Hipersonic Aircraft / V.L.Fraishtadt, A.L.Kuranov, E.G.Sheikin // Technical Physics. 1998. Vol.43. P.1309-1314.
10. Kuranov A.L. Magnetohydrodynamic Control on Hipersonic Aircraft under AJAX Concept / A.L.Kuranov, E.G.Sheikin // Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. Vol.40. N 2. P.174-182.



11. Maurizio D. Secondary electron emission yield calculation performed using two different Monte Carlo strategies // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2011. P.1668-1671.
12. Mayol R.R. Total and transport cross section for elastic scattering of electrons by atoms / R.R.Mayol, F.Salvat // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1997. Vol.65. N 21. P.55-154.
13. O'Macheret S.O. External Supersonic Flow and Scramjet Intel Control By MHD with Electron Beam Ionization / S.O.O'Macheret, M.N.Shnieder, R.B.Miles // AIAA Paper. 2001. P.0492-0498.
14. Park C. Theoretical Performance of a Magnetohydrodynamic-Bypass Scramjet Engine with Nonequilibrium Ionization / C.Park, D.W.Bogdanoff, U.B.Mehta // Journal of Propulsion and Power. 2003. Vol.19. N 4. P.529-537.
15. Sheikin E.G. Calculation of Space Distribution of Energy Deposited by E-Beam for Flow Control Applications / E.G.Sheikin, V.S.Sukhomlinov // AIAA Paper. 2006. P.1369.
16. Sheikin E.G. MHD Control in Hipersonic Aircraft / E.G.Sheikin, A.L.Kuranov // AIAA Paper. 2005. P.1335-1339.
17. Sheikin E.G. The effective differential cross section for elastic scattering of electrons by atoms and its use for Monte Carlo simulation of electron passage through matter // Phys. Scr. 2010. Vol.81. P.045702-045710.
18. Sheikin E.G. The effective differential cross section for inelastic energy loss of electrons in matter // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2014. P.1-7.

Авторы: В.С.Сухомлинов, д-р физ.-мат. наук, доцент, prima-ivs@mail.ru (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия), А.С.Мустафаев, д-р физ.-мат. наук, профессор, alexmustafaev@yandex.ru (Санкт-Петербургский горный университет, Россия).

Статья принята к публикации 18.01.2016.

INFLUENCE OF INELASTIC COLLISIONS ON FAST ELECTRON BEAM ENERGY RELAXATION IN GAS

V.S.SOUKHOMLINOV¹, A.S.MUSTAFAEV²

¹ Saint-Petersburg State University, Russia

² Saint-Petersburg Mining University, Russia

This work is dedicated to the formulation of an analytical theory for calculating the spacial distribution of energy release in a fast electron beam moving in gas and, particularly, in air, considering inelastic interaction. Electron energies of 1-100 keV are considered. Based on the analysis of data on the cross sections for inelastic and elastic interaction of electrons with gas molecules contained in air, it is concluded that inelastic collisions mainly cause energy relaxation, and elastic collisions cause mostly impulse relaxation. Solving Boltzmann's kinetic equation for the electrons, it is used a model cross-section for the inelastic collisions of electrons with molecules, which guarantees a good description of the measured energy dependence of the mass stopping power of the electrons. Obtained results for dependence of electrons' mean energy on the number of inelastic collisions are in good compliance with the results obtained with the method of expanding distribution function in collision numbers and also with the results of Monte-Carlo simulation.

Key words: interaction of electron beam at an energy of 1-100 keV with plasma, elastic and inelastic interaction, energy relaxation, impulse relaxation, Boltzmann's kinetic equation, Monte-Carlo numerical simulation.

How to cite this article: Soukhomlinov V.S., Mustafae A.S. Influence of inelastic collisions on fast electron beam energy relaxation in gas. Zapiski Gornogo instituta. 2016. Vol.219, p.392-402. DOI 10.18454/PMI.2016.3.392

REFERENCES

1. Abramovich M., Stigan I. Spravochnik po special'nym funkciyam (*Handbook of Mathematical Functions*). Moscow: Nauka, 1979, p.830.
2. Akkerman A.F. Modelirovanie traektorij zarjzhennykh chastic v veshhestve (*Simulation of trajectories of charged particles in matter*). Moscow: Jenergoatomizdat, 1991, p.200.
3. Beitmen G., Erdei M. Tablicy integral'nykh preobrazovanij (*Tables of integral transforms*). Moscow: Nauka, 1969. Vol.1, p.343.
4. Kolchuzhkin A.M., Uchaikin V.V. Vvedenie v teoriiyu prohozhdeniya chastic cherez veshhestvo (*Introduction to the theory of particles passing through the matter*). Moscow: Atomizdat, 1978, p.255.
5. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnykh rabotnikov i inzhenerov (*Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*). Moscow: Nauka, 1974, p.831.
6. Marchuk G.I. Metody rascheta jadernykh reaktorov (*Methods of calculation of nuclear reactors*). Moscow: Gosatomizdat, 1961, p.667.
7. Berger E. Stopping powers for electrons and positrons. International Commission on Radiation Units and Measurements. Maryland. 1984. Vol.37, p.42-45.
8. Palm P., Plonjes E., Adamovich I.V., Rich J.W. E-beam Sustained Low Power Budget Air plasma. AIAA Paper. 2002, p.0637-0642.
9. Fraishtadt V.L., Kuranov A.L., Sheikin E.G. Use of MHD System in Hipersonic Aircraft. Technical Physics. 1998. Vol.43, p.1309-1314.
10. Kuranov A.L., Sheikin E.G. Magnetohydrodynamic Control on Hipersonic Aircraft under AJAX Concept. Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. Vol.40. N 2, p.174-182.
11. Maurizio D. Secondary electron emission yield calculation performed using two different Monte Carlo strategies. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2011, p.1668-1671.



12. *Mayol R.R., Salvat F.* Total and transport cross section for elastic scattering of electrons by atoms. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. 1997. Vol.65. N 21, p.55-154.
13. *O'Macheret S.O., Shnieder M.N., Miles R.B.* External Supersonic Flow and Scramjet Inlet Control By MHD with Electron Beam Ionization. *AIAA Paper*. 2001, p.0492-0498.
14. *Park C., Bogdanoff D.W., Mehta U.B.* Theoretical Performance of a Magnetohydrodynamic-Bypass Scramjet Engine with Nonequilibrium Ionization. *Journal of Propulsion and Power*. 2003. Vol.19. N 4, p.529-537.
15. *Sheikin E.G., Sukhomlinov V.S.* Calculation of Space Distribution of Energy Deposited by E-Beam for Flow Control Applications. *AIAA Paper*. 2006, p.1369-1374.
16. *Sheikin E.G., Kuranov A.L.* MHD Control in Hypersonic Aircraft. *AIAA Paper*. 2005, p.1335-1339.
17. *Sheikin E.G.* The effective differential cross section for elastic scattering of electrons by atoms and its use for Monte Carlo simulation of electron passage through matter. *Phys. Scr.* 2010. Vol.81, p.045702-045710.
18. *Sheikin E.G.* The effective differential cross section for inelastic energy loss of electrons in matter. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. 2014, p.1-7.

Authors: *V.S.Soukhomlinov, Dr. of Physics & Mathematics, Associate Professor, prima-ivs@mail.ru (Saint-Petersburg State University, Russia), A.S.Mustafaev, Dr. of Physics & Mathematics, Professor, alexmustafaev@yandex.ru (Saint-Petersburg Mining University, Russia).*

Manuscript Accepted 18.01.2016.