ISSN 2411-3336; e-ISSN 2541-9404

ЗАПИСКИ ГОРНОГО ИНСТИТУТА
Journal of Mining Institute
Сайт журнала: pmi.spmi.ru

Научная статья
Геотехнология и инженерная геология

Прогноз предельного состояния и дилатансии пород вокруг горных выработок

А.Г.Протосеня, **М.А.Карасев**✉, **Н.А.Беляков**, **П.К.Тулин**
Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Россия

***Как цитировать эту статью*:** Протосеня А.Г., Карасев М.А., Беляков Н.А., Тулин П.К. Прогноз предельного состояния и дилатансии пород вокруг горных выработок // Записки Горного института. 2025. Т. 276. Вып. 2. С. 107-122. EDN YMRWQB

Аннотация
Цель работы – совершенствование метода прогноза геомеханических процессов при строительстве горных выработок в упругопластическом породном массиве с дилатансией. Приведены результаты экспериментальных исследований объемной прочности горных пород и особенностей развития объемных деформаций при пластическом сдвиге. Показано проявление дилатансии горных пород, представлены диаграммы изменения объемных деформаций пластического сдвига при различной величине достигнутых сдвиговых деформаций. Выполнена обработка результатов испытаний горных пород с использованием условия пластичности А.Н.Ставрогина. Предложено новое аналитическое решение задачи прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива в зоне развития неупругих деформаций на основании условия пластичности А.Н.Ставрогина, в том числе уравнения для расчета зоны предельного состояния пород в окрестности горной выработки. Представлен алгоритм прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива. Изучены закономерности связи размеров зоны предельного состояния породного массива в окрестности горной выработки с параметрами дилатансии горных пород, коэффициентом бокового распора и глубиной заложения выработки. Исследован характер развития смещений контура горной выработки кругового очертания в постановке плоской деформации при различных параметрах условия пластичности и показателях дилатансии горных пород. Выполнено внедрение условия пластичности А.Н.Ставрогина в программный комплекс Abaqus. Результаты исследований позволили установить область применения аналитического решения. Оно сохраняет физический смысл только при формировании зоны предельного состояния в окрестности всего контура горной выработки. Представленный подход к численному решению не содержит это ограничение и может распространяться на произвольное геомеханическое состояние породного массива и на любую форму сечения горной выработки.

Ключевые слова
горная порода; прочность; условие пластичности; дилатансия; неупругое деформирование; смещения контура; горная выработка; геомеханическая модель

Финансирование
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-17-00144).

Поступила: 11.07.2024 ***Принята: 09.10.2025*** ***Онлайн: 26.11.2025*** ***Опубликована: 29.12.2025***

Введение

С увеличением глубины разработки месторождений полезных ископаемых наблюдается снижение устойчивости породных обнажений [1-3], которое сопровождается развитием пластических деформаций в зоне предельного состояния [4]. Решение задачи прогноза зоны предельного состояния и смещений в окрестности породных обнажений, расположенных в упругопластическом породном массиве, представляет значительный интерес при освоении подземного пространства и разработке месторождений полезных ископаемых [3, 4]. Оно включает в себя изучение механических характеристик пород [5-8], породного массива [9, 10], формулировку новых критериев прочности пород [11-13] и разработку моделей прогноза геомеханического состояния породного массива в окрестности горных выработок как от его естественного напряженного состояния, так и с учетом внутреннего давления, возникновение которого возможно в выработанном пространстве. На основании полученных решений разрабатываются мероприятия по приведению породных обнажений к устойчивому состоянию [14].

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Расчет зон предельного состояния пород вокруг выработок в плоской постановке сводится к решению двумерных упругопластических задач [15, 16] с заранее недетерминированной границей, разделяющей упругую и пластическую области в породном массиве, в которых деформирование сред определяется различными наборами уравнений. Аналитическое решение этих задач представляет известные трудности, поскольку форма и размеры пластической области заранее не известны и должны быть определены при решении [17-19].

Впервые точное решение упругопластической задачи о распределении напряжений вокруг кругового отверстия в бесконечной плоскости дал Л.А.Галин. Решение можно использовать для оценки зон предельного состояния вокруг выработки в массиве, растягиваемом постоянными напряжениями на бесконечности, и с нормальными усилиями, приложенными на ее контуре. Смещения в пластической области для задачи Галина были определены методом малого параметра Д.Д.Ивлевым, а Н.И.Остросаблиным получено точное решение системы уравнений для смещений в этой области. Дальнейшие исследования плоской упругопластической задачи связаны с изменением формы отверстия с круговой на эллиптическую.

Большинство из существующих аналитических и полуаналитических решений для прогноза размеров зон предельного состояния вокруг выработки основаны на рассмотрении бесконечной плоскости в окрестности породного обнажения как упругопластической среды с использованием условия пластичности Кулона [20, 21]. Получен ряд аналитических решений для прогноза напряженно-деформированного состояния с использованием нелинейных критериев прочности горных пород [22-25]. Основное внимание было уделено формированию напряженно-деформированного состояния в окрестности горной выработки кругового очертания. Решение такой задачи получено для условий идеальной упругопластической среды [26-28], упругопластической среды с учетом изотропного упрочнения или разупрочнения [29-31]. Представлены аналитические зависимости для прогноза размеров зоны предельного состояния и деформаций контура породных обнажений как для малых, так и для больших деформаций [32, 33]. Отдельные работы были посвящены вопросам прогноза напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки**,** расположенной в анизотропном породном массиве [34] или в массиве, представленном вязкопластической средой [35]. Работы последних лет нашли широкое применение при прогнозе напряженно-деформированного состояния породных массивов, склонных к развитию больших деформаций. К отдельным задачам можно отнести прогноз напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности тоннелей некругового очертания [36] или сдвоенных тоннелей [37].

Несмотря на перечисленные результаты, аналитические решения получены для простых условий прочности, преимущественно линейных. Известно, что многие горные породы обладают нелинейными огибающими предельных кругов Мора. Этот факт желательно учитывать при выполнении геомеханических прогнозов. В работе уделено внимание выводу аналитического решения и созданию численной модели для прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности горной выработки кругового очертания на основании условия прочности А.Н.Ставрогина.

Методы исследования

Условие прочности А.Н.Ставрогина. Форма огибающей предельных кругов Мора горной породы имеет криволинейный вид, что связано со сложным характером ее разрушения при различных видах напряженных состояний. В частных случаях огибающая может быть упрощена и представлена в виде линейной зависимости, называемой условием прочности Кулона. Для описания нелинейной огибающей предлагается [25] использовать различные кривые, в том числе параболу, экспоненту, циклоиду и другие в комбинации с прямолинейными отрезками и без них. А.Н.Ставрогиным предложены критерии прочности для предельного упругого состояния и предела прочности следующего вида:

$$\tau_{\text{у}} = \tau_{\text{у}}^{0} e^{BC}; \tag{1}$$

$$\tau_{\text{п}} = \tau_{\text{п}}^{0} e^{AC}, \tag{2}$$

где уравнение (1) – условие предельных упругих состояний; уравнение (2) – условие пределов прочности; $\tau_{\text{у}} = \left(\sigma_1^{\text{у}} - \sigma_3\right)/2$; $\tau_{\text{п}} = \left(\sigma_1^{\text{п}} - \sigma_3\right)/2$ – пределы упругости и прочности; $\tau_{\text{у}}^{0}$, $\tau_{\text{п}}^{0}$ – константы,

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

являющиеся пределами упругости и прочности при одноосном сжатии; B, A – константы, отражающие упрочнение горных пород с ростом гидростатического давления; $C = \sigma_3/\sigma_1$ – параметр, характеризующий вид напряженного состояния.

Из условия равенства $\tau_п = \tau_у$ находим координату

$$C_p = \ln\left(\frac{\tau_п^0}{\tau_у^0}\right)\frac{1}{A-B}. \quad (3)$$

Значение C_p, подставленное в условия (1) или (2), позволяет получить вторую координату точки пересечения предельных кривых $\ln\tau_п$. После этого можно подсчитать прочность на отрыв по формуле

$$\sigma_p = \frac{2\tau_п}{\left(\frac{1}{C_p}-1\right)}. \quad (4)$$

Постановка задачи прогноза зоны предельного состояния в окрестности горной выработки. Прогноз зоны предельного состояния в окрестности горной выработки рассматривается в постановке плоской деформации (рис.1). Размер горной выработки принимается равным r_0, размер расчетной области $R >> r$. Внешнее воздействие по границам расчетной области задается через давление, равное γH (вертикальная составляющая) и $\lambda\gamma H$ (горизонтальная составляющая). В результате внешнего воздействия в расчетной области формируется напряженное состояние, определяемое компонентами тензора напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$. При определении размера зоны предельного состояния принято, что размер зоны составляет R_L, при этом аналитическое решение имеет смысл только в том случае, когда зона предельного состояния полностью охватывает контур горной выработки. Численное решение не обладает такими ограничениями.

Условие прочности А.Н.Ставрогина не реализовано в программных продуктах для выполнения прочностных расчетов с применением численных методов анализа, а условия пластичности для геоматериалов ограничиваются их линейным видом. Для внедрения условия пластичности требуется разработка специальной процедуры, которая будет обновлять напряженное состояния при упругопластическом деформировании материала. Разделив нелинейное условие пластичности А.Н.Ставрогина на набор линейных участков, можно добиться его реализации без разработки модели с полным описанием всех процедур, характерных для численной теории пластического течения.

В качестве линейного условия пластичности принято хорошо зарекомендовавшее себя на практике условие пластичности Кулона – Мора:

$$\tau = c + \sigma_п \mathrm{tg}\varphi, \quad (5)$$

где c – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

Для перевода показателей прочности А.Н.Ставрогина к эквивалентным показателям прочности Кулона, т.е. к эквивалентным сцеплению и углу внутреннего трения, будем использовать аппроксимацию экспоненциальной огибающей кругов предельного состояния (2) кусочно-линейной функцией. Точность аппроксимации определяется только количеством точек, выбранных на исходной экспоненциальной огибающей.

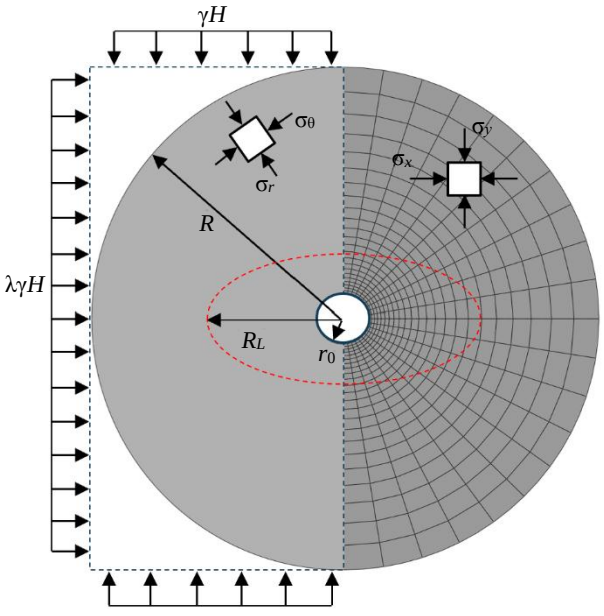


Рис.1. Постановка задачи прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности горной выработки: слева – расчетная схема; справа – конечно-элементная модель; σ_x, σ_y – компоненты нормальных напряжений; σ_θ, σ_r – тангенциальные и радиальные напряжения; R – радиус до внешнего контура расчетной области ($R >> r$); R_L – размер зоны предельного состояния

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Для двух последовательно расположенных на экспоненциальной огибающей точек, представляющих на аппроксимирующей кусочно-линейной огибающей начальную и конечную точку одного линейного участка функции с постоянными значениями сцепления и угла внутреннего трения, значения будут определяться согласно выражениям:

$$c = \frac{\tau_M \sigma_N - \tau_N \sigma_M}{\tau_B - \tau_A}; \tag{6}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tau_M - \tau_N}{\sigma_M - \sigma_N}\right), \tag{7}$$

где $\tau_M, \tau_N, \sigma_M, \sigma_N$ – координаты соседних точек M и N на экспоненциальной огибающей.

Результаты исследований

Аналитическое решение для прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива с условием А.Н.Ставрогина в окрестности горной выработки кругового очертания. В работе [26] рассмотрены вопросы расчета зоны пластических деформаций в окрестности горной выработки кругового очертания для случая гидростатического естественного напряженного состояния. Границы зоны предельного состояния определяются условием пластичности А.Н.Ставрогина.

Размер области предельного состояния получен с использованием метода малого параметра и может быть записан в следующем виде:

$$R_L = \left(r_0 + \varepsilon r_1 \cos 2\theta\right) R_0, \tag{8}$$

где $\varepsilon = 0{,}5(1-\lambda)$; θ – угловая координата;

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= \tau_{\text{п}}^0 C_1 \frac{\exp\left[\dfrac{2A}{(A-N_1)}\right]}{\left[(\lambda_1 \gamma H k)^2 (A-N_1)^{2A}\right]}; \\ r_1 &= \frac{2r_0}{\lambda_1 k} \frac{\left[(A-N_1)^2 - A(1+A-N_1)\right]}{\left[(A-N_1)^2 - 2A(1+A-N_1)\right]}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$\lambda_1 = 0{,}5(1+\lambda)$; H – глубина заложения выработки; γ – удельный вес толщи пород; R_0 – радиус выработки; $N_1 = \ln\dfrac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_{\text{п}}^0}$.

Величина $k = a/r_0^2$ определяется из уравнения

$$A - N_1 = k(A + N_1). \tag{10}$$

В формулах (9) постоянная C_1 равна

$$C_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_{\text{п}}^0}\left(A - \ln\frac{\tau_1}{\tau_{\text{п}}^0}\right)^{2A} \exp\left[-\frac{2A}{\left(A - \ln\dfrac{\tau_1}{\tau_{\text{п}}^0}\right)}\right]; \tag{11}$$

τ_1 определяется из уравнения

$$p_0 = 2\tau_1 \frac{\left(\ln\dfrac{\tau_1}{\tau_{\text{п}}^0}\right)}{\left(A - \ln\dfrac{\tau_1}{\tau_{\text{п}}^0}\right)}, \tag{12}$$

где p_0 – отпор крепи.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Компоненты напряжений в упругой зоне около выработки записываются в виде:

$$\sigma_r = \gamma H\left[\lambda_1\left(1-\frac{a}{r^2}\right)-\varepsilon\left(1-\frac{2b}{r^2}+\frac{d_2}{r^4}\right)\cos 2\theta\right]; \tag{13}$$

$$\sigma_\theta = \gamma H\left[\lambda_1\left(1+\frac{a}{r^2}\right)+\varepsilon\left(1+\frac{d_2}{r^4}\right)\cos 2\theta\right]; \tag{14}$$

$$\tau_{r\varphi} = \gamma H\left(1+\frac{b}{r^2}-\frac{d_2}{r^4}\right)\sin 2\theta, \tag{15}$$

где a, b, d_2 – коэффициенты, учитывающие граничные условия.

Перейдем к определению смещений вокруг горной выработки для случая геостатического естественного напряженного состояния, когда коэффициент бокового давления λ отличен от единицы. Смещения в породном массиве вокруг выработки в этом случае зависят от радиальной r и угловой φ координат. При решении задачи ограничимся линейной аппроксимацией дилатансии.

Условие дилатансии в полярной системе координат может быть записано в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = d\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+d_1, \tag{16}$$

где u, v – радиальное и окружное смещения.

Экспериментальные данные показывают, что для некоторых пород коэффициент d при линейной аппроксимации изменяется от 0 до –0,86.

В силу изотропности изменение объема при пластическом деформировании пород не зависит от направления и не влияет на деформации сдвига, поэтому в предельной зоне вблизи контура выработки деформации сдвига

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \tag{17}$$

Тогда для определения смещений u и v необходимо решить уравнения (16) и (17). Для этого используем полуобратный метод решения. Ограничиваясь первым приближением по малому параметру ε, смещения будем искать в виде:

$$u = \frac{u_0}{r^{\frac{1-d}{1+d}}}-\frac{d_1}{2}r+\varepsilon f(r)\cos 2\theta; \tag{18}$$

$$v = \varepsilon\varphi(r)\sin 2\theta, \tag{19}$$

где u_0 – постоянная функция; $f(r)$, $\varphi(r)$ – искомые функции.

Внося функции (18) и (19) в уравнения (16) и (17) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим систему

$$\begin{cases}(1+d)f'+(1-d)\dfrac{f}{r}+2(1-d)\dfrac{\varphi}{r}=0;\\ \varphi'-\dfrac{\varphi}{r}-\dfrac{2}{r}f=0.\end{cases} \tag{20}$$

Сведем эту систему уравнений к дифференциальному уравнению Эйлера:

$$r^2\varphi''+N_2 r\varphi'+3N_2\varphi = 0, \tag{21}$$

где $N_2 = \dfrac{1-d}{1+d}$ и характеристическое уравнение записывается как

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

$$K^2 - \frac{2d}{1+d}K + 3N_2 = 0, \tag{22}$$

имеет корни

$$K_{1,2} = \frac{d}{1+d} \pm iN_3, \ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < d \le 0\right), \tag{23}$$

$$N_3 = \frac{\sqrt{3-4d^2}}{1+d},$$

$$K_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{4-d^2}}{1+d}, \ \left(-1 < d \le -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{24}$$

Учитывая, что коэффициент d согласно экспериментальным данным находится в диапазоне $-\sqrt{3}/2 < d \le 3$, рассмотрим только случай комплексных корней. Тогда функция $\varphi(r)$ уравнения (21) будет записываться в виде:

$$\varphi(r) = r\frac{d}{1+d}\left[c_1\cos\left(N_3\ln r\right) + c_2\sin\left(N_3\ln r\right)\right]. \tag{25}$$

Определяя из уравнения (25) $\varphi(r)$ и подставляя (25) в (18) и (19), смещения u и v запишем так:

$$u = u_1 + u_2\left(u_3 - u_4\right)\cos 2\theta, \tag{26}$$

где

$$u_1 = \frac{u_0}{r^{N_2}} - \frac{d}{2}r;$$

$$u_2 = \frac{r^{N_2}}{2\left(1+d\right)};$$

$$u_3 = \left[\left(1+2d\right)c_1 + c_2\sqrt{3-4d^2}\right]\cos\left(N_3\ln r\right);$$

$$u_4 = \left[\sqrt{3-4d^2}c_1 + \left(1+2d\right)c_2\right]\sin\left(N_3\ln r\right);$$

$$v = \varepsilon r^{1+d}\left[c_1\cos\left(N_3\ln r\right) + c_2\sin\left(N_3\ln r\right)\right]\sin 2\theta. \tag{27}$$

В упругой зоне напряжения и смещения связаны законом Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\varphi + \sigma_z\right)\right]; \tag{28}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left[\sigma_\varphi - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right], \tag{29}$$

где E, ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона массива горных пород.

Смещения в указанной зоне найдем, внося напряжения (13) и (14) в (28) и (29), интегрируя полученные выражения и ограничиваясь первым приближением по малому параметру ε, получим:

$$u = u_1\left(u_2 - u_3\right)\cos 2\theta, \tag{30}$$

где

$$u_1 = -\frac{\gamma H}{2E};$$

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

$$u_2 = (2-\nu)\left[\lambda_1\left(r_0+\frac{a}{r_0}\right)+\varepsilon\lambda_1 r_1(\varphi)\left(1-\frac{a}{r_0^2}\right)-\varepsilon\left(r_0+\frac{2b}{r_0}-\frac{d}{3r_0^3}\right)\cos 2\theta\right];$$

$$u_3 = 3\nu\left[\lambda_1\left(r_0-\frac{a}{r_0}\right)+\varepsilon\lambda_1 r_1(\varphi)\left(1+\frac{a}{r_0^2}\right)+\varepsilon\left(r_0-\frac{d}{3}\frac{1}{r_0^3}\right)\cos 2\theta\right];$$

$$v = \varepsilon\frac{\gamma H}{2E}\left[(2-\nu)\left(r_0+\frac{b}{r_0}+\frac{1}{3}\frac{d}{r_0^3}\right)+3\nu\left(r_0-\frac{b}{r_0}+\frac{1}{3}\frac{d}{r_0^3}\right)\right]\sin 2\theta. \quad (31)$$

Неизвестные коэффициенты u_0, c_1, c_2 находятся из условий непрерывности смещений u и ν на границе области предельных деформаций (26) и (27). Попарно приравнивая выражения (26), (30) и (27), (31), найдем:

$$u_0 = \frac{d_1}{2}r_0^{\frac{2}{1+d}}+\frac{\gamma H\lambda_1}{2E}r_0^{N_2}\left[(2-\nu)\left(r_0+\frac{a}{r_0}\right)-3\nu\left(r_0+\frac{a}{r_0}\right)\right]; \quad (32)$$

$$c_{1,1}+c_{1,2}=n_1, \quad (33)$$

где

$$\begin{cases} c_{1,1} = c_1\left[(1+2d)\cos(N_3\ln r_0)-\sqrt{3-4d^2}\sin(N_3\ln r_0)\right]; \\ c_{1,2} = c_2\left[\sqrt{3-4d^2}\cos(N_3\ln r_0)+(1+2d)\sin(N_3\ln r_0)\right]; \\ c_1\cos(N_3\ln r_0)+c_2\sin(N_3\ln r_0)=n_2; \end{cases} \quad (34)$$

$$n_1 = n_{1,1}n_{1,2}+n_{1,3}; \quad (35)$$

$$n_{1,1} = \frac{\gamma H(1+d)}{E}r_0^{-\frac{d}{1+d}};$$

$$n_{1,2} = \lambda_1 r_1\left[(2-\nu)\left(1-\frac{a}{r_0^2}\right)-3\nu\left(1+\frac{a}{r_0^2}\right)\right]+\frac{2-\nu}{3}\left(\frac{5b}{r_0}-2r_0\right)-\nu\left(2r_0-\frac{b}{r_0}\right);$$

$$n_{1,3} = 2r_1(1-d)u_0 r_0^{-\frac{2-d}{1+d}};$$

$$n_2 = \frac{\gamma H}{2E}r_0^{-\frac{d}{1+d}}\left[\frac{2-\nu}{3}\left(4r_0-\frac{b}{r_0}\right)+2\nu\left(2r_0-\frac{b}{r_0}\right)\right]. \quad (36)$$

Из системы (34) получаем:

$$c_1 = n_2\cos(N_3\ln r_0)-\frac{n_1(1+2d)n_2}{\sqrt{3-4d^2}}\sin(N_3\ln r_0); \quad (37)$$

$$c_2 = \frac{n_1-(1+2d)n_2}{\sqrt{3-4d^2}}\cos(N_3\ln r_0)+n_2\sin(N_3\ln r_0). \quad (38)$$

Смещение контура выработки получим из выражения (30), внося в него полученные коэффициенты c_1, c_2 и $r = 1$:

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

$$u = u_1 + u_2 u_3 \cos 2\theta, \tag{39}$$

где

$$u_1 = \left(u_0 - \frac{d_1}{2} \right) R_0;$$

$$u_2 = \frac{(1-\lambda) R_0}{4(1+d)};$$

$$u_3 = \left[n_1 \cos\left(N_3 \ln r_0 \right) - \frac{n_1(1+2d) - 4n_2(1+d)}{\sqrt{2-4d^2}} \sin\left(N_3 \ln r_0 \right) \right].$$

Обсуждение результатов исследования

Для изучения применимости условия А.Н.Ставрогина для описания прочности горных пород рассмотрены результаты испытаний, выполненных в условиях объемных напряженных состояний по схеме Кармана $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. На рис.2, *а* показаны полные диаграммы деформирования горной породы, полученные при разных величинах бокового давления. По горизонтали на графиках отложены продольные (осевые) ε_1 и поперечные ε_3 деформации, по вертикали – величина главного

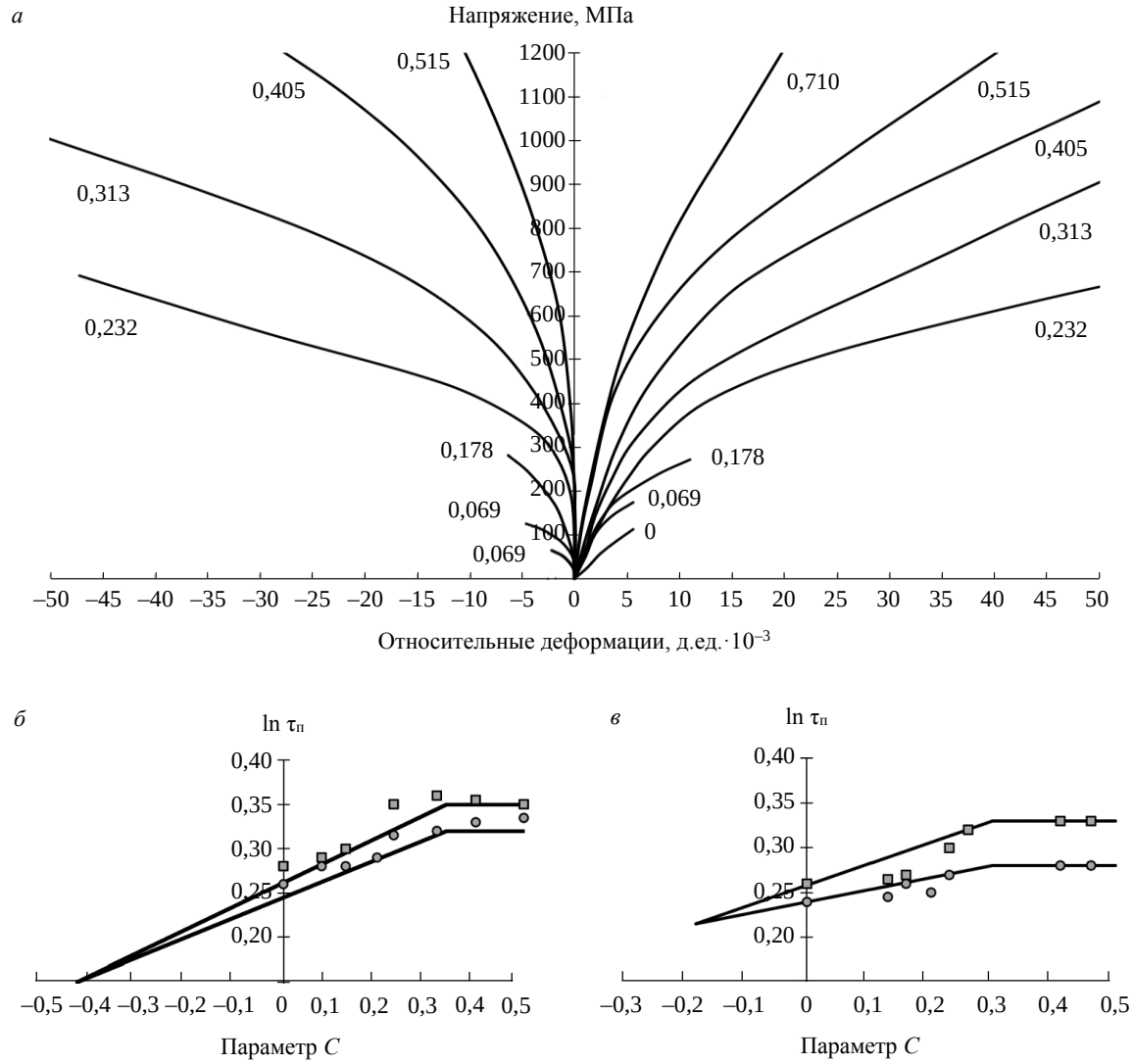


Рис.2. Диаграмма деформирования мрамора при различных величинах бокового обжатия (*а*) и зависимости пределов прочности и пределов упругости от параметра *C* для мрамора № 1 (*б*) и мрамора № 2 (*в*)

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

осевого напряжения σ_1. Возле кривых указаны величины параметра *C*, характеризующего напряженное состояние, при котором выполнялся лабораторный эксперимент. Экспериментальные графики предельных упругих и предельных прочностных состояний в координатах ($\ln \tau$ – *C*) для образцов мрамора представлены на рис.2, *б*, *в*.

Из экспериментальных зависимостей видно, что исследованные породы при деформировании показали отклонения от закона Гука. Наибольшие отклонения были получены на образцах двух разновидностей белого мрамора одинакового минерального состава (мрамор № 1 и мрамор № 2). Результаты обработки экспериментальных исследований образцов мрамора приведены на рис.3. При анализе результатов экспериментов определились главные относительные упругие деформации ε_1^e, $\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e$ и неупругие деформации $\varepsilon_1^п = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^e$, $\varepsilon_2^п = \varepsilon_2 - \varepsilon_2^e$, а также относительное полное $\theta = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$, упругое $\theta^e = \varepsilon_1^e + 2\varepsilon_2^e$ и неупругое $\theta^п = \varepsilon_1^п + 2\varepsilon_2^п = \theta - \theta^e$ изменения объема.

Коэффициент неупругой поперечной деформации определяется по формуле

$$\mu = -\varepsilon_2^п / \varepsilon_1^п .$$

У исследованных пород в зависимости θ от σ наблюдается отклонение кривых при разных величинах *C* от линии гидростатического сжатия, что указывает на возникновение в испытанных образцах микротрещин. Деформации были разделены на упругие и остаточные по изложенному выше методу, после чего были построены зависимости между остаточными деформациями и параметром напряженного состояния *C*.

Величины предельного остаточного изменения объема $\theta^п$ при разрушающем значении напряжений в зависимости от параметра *C* представлены на рис.2. Аналогичные зависимости были получены по другим испытанным породам. Для всех испытанных пород характерен максимум изменения

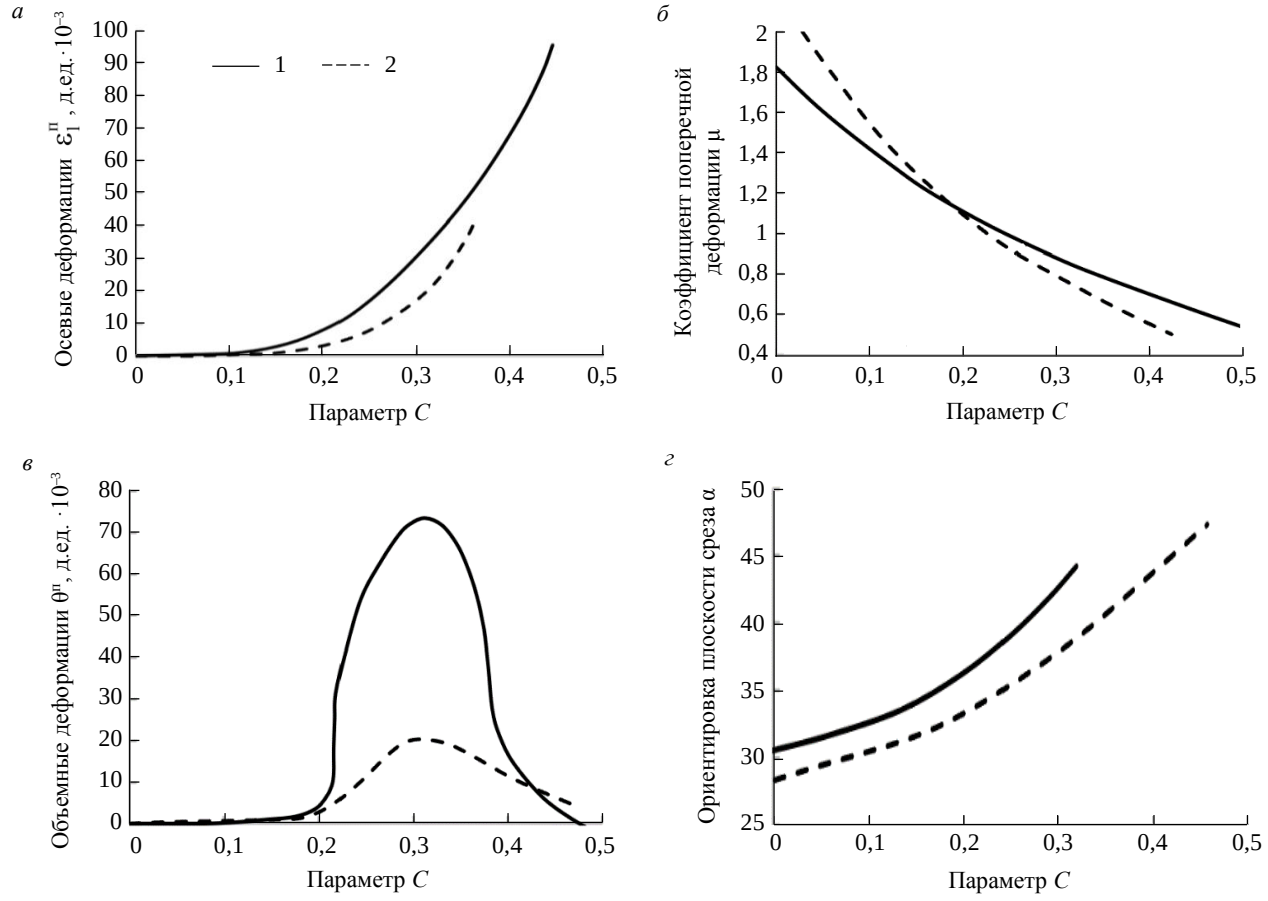


Рис.3. Зависимости остаточных деформаций $\varepsilon_1^п$ (*а*); коэффициента поперечной деформации μ (*б*) (угол отсчитывается от направления действия осевых напряжений); объемных деформаций (*в*) и угла ориентировки плоскости среза α (*г*) от параметра *C* для мрамора № 1 (1) и мрамора № 2 (2)

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

объема, расположение которого на оси C зависит от свойств конкретной породы. Для мрамора № 1 значение $\theta^{п}$ в максимуме оказалось наибольшим из всех испытанных пород. Коэффициент поперечной остаточной деформации μ при C, близких к нулю, во всех случаях имеет наибольшее значение и для некоторых пород достигает величины, превышающей 2. С возрастанием C величина μ постепенно падает и стремится к 0,5. При условии $\mu = 0{,}5$ остаточное изменение объема равно нулю. Аналогичная зависимость имеет место и для других исследованных пород.

При значениях C, когда $\mu \to 0{,}5$, а $\theta^{п} \to 0$, угол среза стремится к 45°. При одноосном сжатии α существенно меньше 45°. Отдельные точки на графике разбросаны, однако общая зависимость α от C во всех случаях прослеживается довольно четко. При этом абсолютные значения предельной деформации $\varepsilon_1^{п}$ возрастают, что означает повышение пластичности материалов.

Полученные экспериментальные результаты не удается объяснить, если исходить из представления о том, что природа остаточных деформаций горных пород состоит из чисто сдвиговых процессов. Против такого подхода свидетельствуют увеличение $\theta^{п}$ и значения коэффициента μ, намного превышающие величину 0,5. Отклонение угла среза α от 45° только формально объяснено в теории Мора без раскрытия его физической сущности.

Перечисленные экспериментальные результаты можно объяснить, исходя из упрощенной гипотетической схемы протекания процесса деформирования и разрушения в изотропном материале неоднородного строения. При разрушении образца, деформируемого главными напряжениями σ_1 и σ_2, образуются макроскопическая плоскость среза, наклоненная к оси образца под углом α, и микротрещины разрыва, которые располагаются по площадкам, нормальным к главным напряжениям. Формирование отрицательной дилатансии (разрыхления) связано с развитием микротрещин разрыва, а ее уменьшение с ростом показателя C при $\mu \to 0{,}5$ объясняется закрытием микротрещин разрыва.

Наряду с деформационной дилатансией, связанной с процессами деформирования и разрушения в процессе разгружения, на дилатансию также оказывает влияние начальная эффективная пористость горных пород. Анализ экспериментальных данных изменения дилатансии мрамора № 1 показывает, что она достигает максимума при $C = 0{,}313$ и является отрицательной, т.е. имеет место разрыхление породы. При изменении показателя C от 0 до 0,313 наблюдается увеличение дилатансии, а в интервале от 0,313 до 0,5 – уменьшение дилатансии до нуля.

Экспериментальные данные для различных типов горных пород показывают, что пластическая дилатансия зависит от параметра C и является нелинейной функцией:

$$\theta^{п} = \theta^{п}(C).$$

С учетом связи между параметром C, напряжениями σ и τ условие дилатансии можно записать как

$$\theta^{п} = \theta^{п}(\tau, \sigma).$$

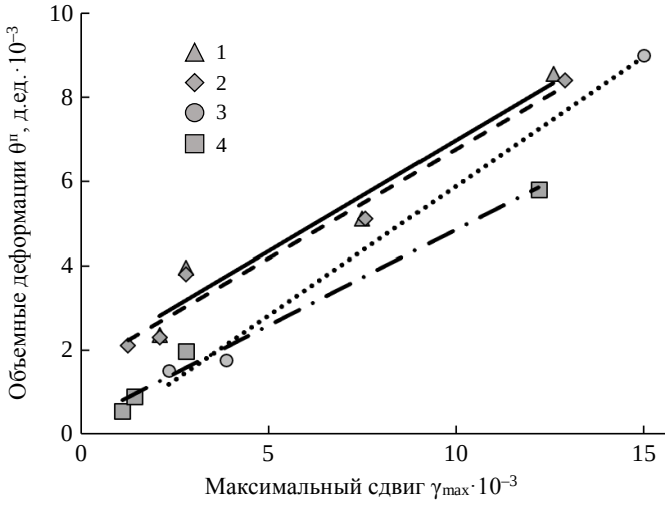


Рис.4. Линейная аппроксимация экспериментальных зависимостей дилатансии от максимального сдвига

1 – мрамор № 1; 2 – мрамор № 2;
3 – алевролит; 4 – кварцевый диорит

Экспериментальные данные показывают, что дилатансия горных пород пропорциональна наибольшему сдвигу $\gamma_{max} = \varepsilon_1^{п} - \varepsilon_3^{п}$ и может быть описана зависимостью

$$\theta^{п} = \lambda(C)\gamma_{max},$$

где $\lambda(C)$ – известная функция, определяемая на основе экспериментальных данных.

Для некоторых горных пород экспериментальная зависимость близка к линейной (рис.4). Для таких горных пород обобщенное выражение для дилатансии можно записать как

$$\theta^{п} = d\gamma_{max} + d_1,$$

где d, d_1 – константы линейной интерполяции зависимости пластической дилатансии от наибольшего сдвига.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Рассмотрим вопросы применения условия А.Н.Ставрогина для решения прикладных задач. На основании представленных теоретических положений прогноза зон предельного состояния породного массива в окрестности горной выработки и смещений породного контура предложен алгоритм их расчета по выведенным аналитическим формулам с учетом условия А.Н.Ставрогина (см. таблицу) применительно к тестовой задаче. Необходимо оценить размеры зоны предельного состояния и радиальные смещения контура незакрепленной горной выработки кругового очертания радиусом в проходке $r_0 = 5$ м (см. рис.1), расположенной на глубине $H = 1000$ м от земной поверхности в горном массиве со следующими физико-механическими свойствами: $\gamma = 25$ кН/м^3; $E_0 = 1000$ МПа; $\nu = 0{,}3$; $\tau_п^0 = 8$ МПа; $A = 5$. Задача решается для коэффициентов бокового давления в горном массиве 0,6; 0,8 и 1,0. Дополнительно рассмотрены варианты, когда горный массив не подвержен дилатансии при пластическом деформировании и дилатирующий горный массив с параметрами $d = -0{,}268$ и $d_1 = 0{,}615$. Напряженное состояние задавалось через горизонтальную σ_x и вертикальную σ_y компоненты.

Алгоритм прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности горной выработки

Наименование расчетного этапа	Содержание расчетного этапа
Этап 1. Получение исходных данных	• Средневзвешенный удельный вес пород γ. • Глубина заложения выработки H. • Параметры прочности критерия А.Н.Ставрогина $\tau_п^0$ и A. • Радиус горной выработки в проходке R_0. • Коэффициент бокового распора λ. • Модуль деформации E_0. • Коэффициент поперечной деформации ν. • Отпор на контуре горной выработки p_0. • Коэффициенты линейной аппроксимации дилатансии горных пород d и d_1.
Этап 2. Расчет зоны предельного состояния вокруг горной выработки	• Рассчитываются: $\lambda_1 = \frac{1+\lambda}{2}$ и $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$; k; $A - N_1 = k(A + N_1)$, где $N_1 = \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_п^0}$; $p_0 = 2\tau_1 \frac{\left(\ln \frac{\tau_1}{\tau_п^0}\right)}{\left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_п^0}\right)}$; если выработка не закреплена ($p_0 = 0$), то $\tau_1 = \tau_п^0$; $C_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_п^0}\left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_п^0}\right)^{2A} \exp\left[-\frac{2A}{\left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_п^0}\right)}\right]$; $r_0 = \sqrt{\tau_п^0 C_1 \frac{\frac{2A}{e^{(A-N_1)}}}{\left[(\lambda_1 \gamma H k)^2 (A - N_1)^{2A}\right]}}$; $r_1 = \frac{2r_0}{\lambda_1 k} \frac{\left[(A-N_1)^2 - A(1 + A - N_1)\right]}{\left[(A - \ln N_1)^2 - 2A(1 + A - N_1)\right]}$. • Построение зоны предельного состояния вокруг горной выработки (при $0 \le \theta \le 2\pi$) по формуле $R_L = (r_0 + \varepsilon r_1 \cos 2\theta) R_0$.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Окончание таблицы

Наименование расчетного этапа	Содержание расчетного этапа
Этап 3. Расчет смещений контура горной выработки	• Рассчитываются: $a = kr_0^2$; $b = \frac{2r_0^2\left(1-\frac{\lambda_1 a}{r_0^3}r_1\right)N_1}{A-N_1} + \frac{\lambda_1(1+k)\left[\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{k}+\frac{A}{1+k}\right)-\frac{r_1}{r_0}\left(1+\frac{aA}{r_0^3(1+k)}\right)\right]}{A-N_1}$; $u_0 = \frac{d_1}{2}r_0^{\frac{2}{1+d}} + \frac{\gamma H\lambda_1}{2E}r_0^{\frac{1-d}{1+d}}\left[(2-\nu)\left(r_0+\frac{a}{r_0}\right)-3\nu\left(r_0+\frac{a}{r_0}\right)\right]$; $n_1 = \frac{\gamma H(1+d)}{E}r_0^{-\frac{d}{1+d}}\left\{\lambda_1 r_1\left[(2-\nu)\left(1-\frac{a}{r_0^2}\right)-3\nu\left(1+\frac{a}{r_0^2}\right)\right]+\frac{2-\nu}{3}\left(\frac{5b}{r_0}-2r_0\right)-\nu\left(2r_0-\frac{b}{r_0}\right)\right\}+2r_1(1-d)u_0 r_0^{-\frac{2-d}{1+d}}$; $n_2 = \frac{\gamma H}{2E}r_0^{-\frac{d}{1+d}}\left[\frac{2-\nu}{3}\left(4r_0-\frac{b}{r_0}\right)+2\nu\left(2r_0-\frac{b}{r_0}\right)\right]$. • Построение эпюры радиальных смещений контура горной выработки (при $0 \le \theta \le 2\pi$) по формуле $u = \left(u_0-\frac{d_1}{2}\right)R_0 + \frac{(1-\lambda)R_0}{4(1+d)}\left[n_1\cos(N_3\ln r_0)-\frac{n_1(1+2d)-4n_2(1+d)}{\sqrt{2-4d^2}}\sin(N_3\ln r_0)\right]\cos 2\theta$, где $N_3 = \frac{\sqrt{3-4d^2}}{1+d}$

Результаты расчетов зоны предельного состояния в окрестности горной выработки представлены на рис.5. Из используемых при расчетах уравнений следует, что параметры дилатансии в рамках заложенных в аналитическую методику гипотез не влияют на размер зоны предельного состояния, а потому было рассмотрено только влияние на него коэффициента бокового распора. На графических зависимостях линейные размеры зоны предельного состояния для удобства анализа представлены в долях радиуса выработки.

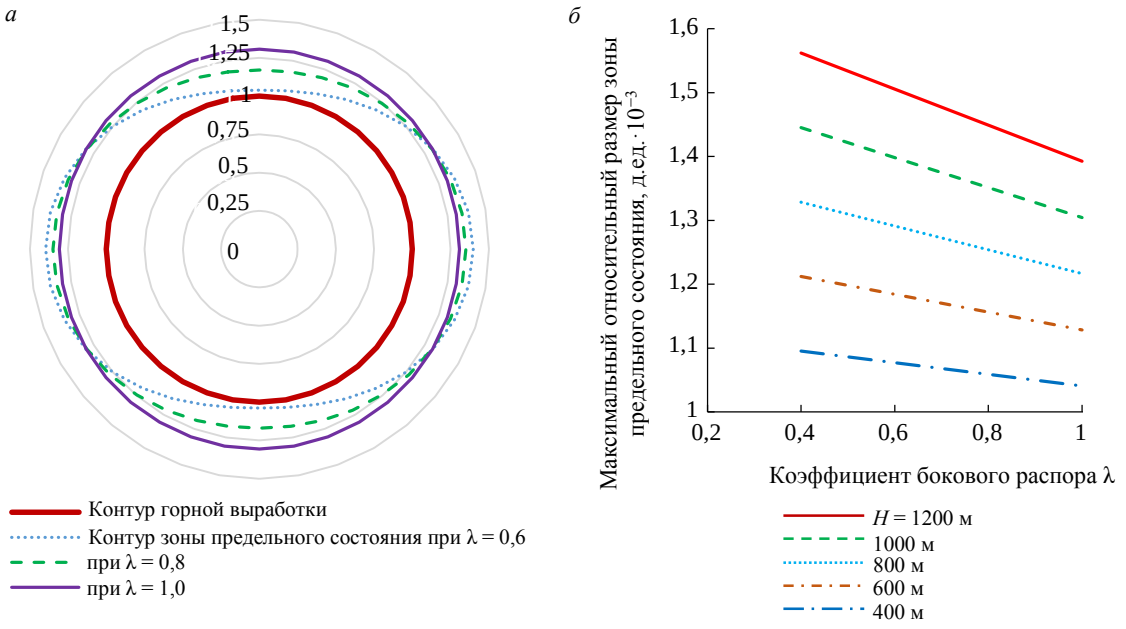


Рис.5. Зона предельного состояния в окрестности горной выработки: закономерности изменения контура (*а*) и максимального линейного размера (*б*)

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

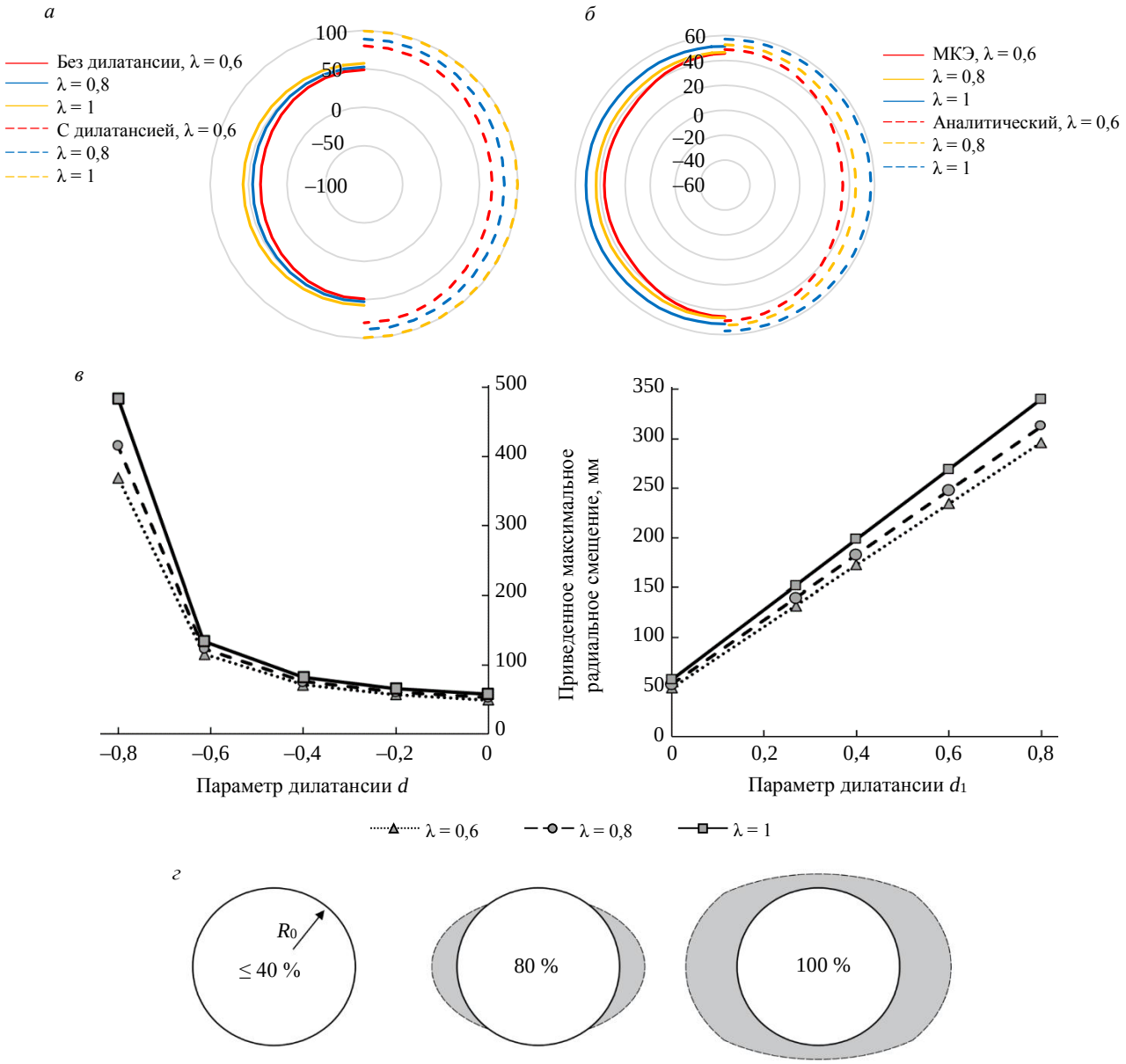


Рис.6. Результаты прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива:
а – распределение радиальных смещений по контуру; *б* – сопоставление эпюр радиальных смещений контура выработки без учета дилатансии горных пород, полученных аналитическим и численным методами; *в* – закономерности изменения радиальных смещений от параметров дилатансии; *г* – формирование зоны предельного состояния вокруг горной выработки, цифрами показана процент перераспределения НДС в окрестности горной выработки (0 – вне зоны влияния выработки; 100 % – на бесконечности от лба забоя горной выработки)

Наибольший размер зоны предельного состояния при гравитационном поле естественных напряжений ориентирован горизонтально, чем меньше величина коэффициента бокового распора λ, тем более вытянутой в этом направлении становится зона. Анализ выполненных расчетов показывает, что полный охват зоной предельного состояния горной выработки достигается при величинах бокового распора не ниже 0,6, что ограничивает области применения аналитической методики.

Для изложенной в настоящей работе аналитической методики характерной является обратная линейная зависимость наибольшего линейного размера зоны предельного состояния от величины коэффициента бокового распора и от глубины заложения горной выработки, что подтверждается результатами, представленными на рис.5, *б*.

Результаты расчетов смещений контура горной выработки без учета и с учетом дилатансии горных пород представлены на рис.6, *а*, *б*. Для удобства анализа результатов величины смещений на графиках приведены к радиусу горной выработки. Для условий гравитационного поля напряжений

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

наибольшие величины радиальных смещений возникают в своде горной выработки при коэффициентах бокового распора, отличных от единицы. Учет дилатансии при прогнозе радиальных смещений приводит к значительному росту их величины, при этом закономерности связи с параметрами дилатансии d и d_1 неодинаковы. Анализ показывает, что расчетная величина радиальных смещений контура нелинейно обратно пропорциональна параметру d и линейно прямо пропорциональна параметру d_1.

Реализация критерия прочности А.Н.Ставрогина в рамках численного моделирования позволяет существенно расширить область решаемых задач геомеханики и механики подземных сооружений. На рис.6, *в* показан процесс формирования в окрестности горной выработки зоны предельного состояния. Ввиду итерационного характера вычислений при получении численного решения каждая картинка соответствует определенной части полных напряжений, реализованных на модели.

На начальных этапах решения задачи при малых величинах изменения НДС массива зона предельного состоянии имеет незамкнутую форму (рис.6, *г*), т.е. не охватывает полностью весь контур выработки. Такую картину принципиально нельзя получить с помощью рассмотренного аналитического решения, а значит численное решение обладает более широкой областью применения и его можно использовать для задач прогноза в слабонапряженных или прочных горных массивах, а также в условиях малых коэффициентов бокового распора $\lambda < 0{,}6$.

Сопоставим результаты расчета радиальных смещений, полученные с применением аналитического метода и метода конечных элементов. Для наглядности эпюры смещений контура горной выработки при решении задачи без учета дилатансии горных пород совмещены на рис.6, *б, в*. Если выполнить сопоставление по экстремальным значениям прогнозных радиальных смещений, то расхождение между данными прогноза составляет от 3 до 11 %, а в среднем по длине контура горной выработки расхождение находится в диапазоне 6-7 %. Такой результат с учетом принятых допущений при выводе уравнений аналитического решения и упрощений, заложенных в преобразование нелинейного условия прочности А.Н.Ставрогина в форму кусочно-линейной функции в рамках пользовательской подпрограммы для численного решения, можно считать допустимым, а сходимость двух решений удовлетворительной.

Важно отметить, что в рамках численного решения не удалось реализовать учет пластической дилатансии горных пород, так как принятая модель деформирования горной породы не позволяет воспроизводить явления, характерные для породного массива. В связи с этим следует ее совершенствовать в части изменения функции пластического потенциала в зависимости от достигнутых величин сдвиговых и объемных деформаций.

Заключение

Совершенствование методов решения задач геомеханики и механики подземных сооружений направлено на повышение достоверности прогноза за счет постепенного усложнения применяемых моделей и подходов. Это достигается за счет последовательного отказа от некоторых допущений и упрощений. Факт нелинейной связи между средними напряжениями и прочностью горных пород установлен давно, но реализация его в практических задачах становится реальной только в настоящее время ввиду значительного развития расчетных возможностей численных методов. Реализация критерия прочности А.Н.Ставрогина при численном моделировании позволяет получать решение задач прогноза смещений контура горных выработок и размеров зон предельного состояния в их окрестности, сопоставимое по точности с аналитическим решением. Такое решение не имеет существенных ограничений в области применения, характерных для аналитического решения и обусловленных изначальными посылками, заложенными при выводе уравнений. Помимо этого, метод конечных элементов позволяет решать задачи в рамках пространственной постановки, что аналитическим методом невозможно.

При выполнении настоящей работы была выявлена необходимость совершенствования модели деформирования горной породы к виду, в котором в полной мере могут быть учтены особенности объемного деформирования при пластическом сдвиге. Это направление исследований является естественным продолжением работы.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басалаева П.В., Куранов А.Д.* Оценка влияния угла падения литологически неоднородной прослойки пород на устойчивость горизонтальной горной выработки при ее проходке // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2024. № 3. С. 17-30. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_3_0_17

2. *Беликов А.А., Беляков Н.А.* Методика прогноза напряженно-деформированного состояния междукамерных целиков, закрепленных податливой тросовой крепью // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2023. № 4. С. 20-34. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_4_0_20

3. *Деменков П.А., Романова Е.Л., Котиков Д.А.* Исследование формирования напряженно-деформированного состояния крепи вертикального ствола и вмещающего массива горных пород в условиях неравномерности его контура // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2023. № 11. С. 33-48. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_11_0_33

4. *Протосеня А.Г., Карасев М.А., Беляков Н.А.* Упруго-пластическая задача для выработок различных форм поперечных сечений при условии предельного равновесия Кулона // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2016. № 1. С. 71-81.

5. *Господариков А.П., Зацепин М.А.* Математическое моделирование нелинейных краевых задач геомеханики // Горный журнал. 2019. № 12. С. 16-20. DOI: 10.17580/gzh.2019.12.03

6. *Ильинов М.Д., Коршунов В.А., Поспехов Г.Б., Шоков А.Н.* Комплексные экспериментальные исследования механических свойств горных пород: проблемы и пути их решения // Горный журнал. 2023. № 5. С. 11-18. DOI: 10.17580/gzh.2023.05.02

7. *Господариков А.П., Киркин А.П., Трофимов А.В., Ковалевский В.Н.* Определение физико-механических свойств горных пород при применении противоударных разгрузочных мероприятий // Горный журнал. 2023. № 1. С. 26-34. DOI: 10.17580/gzh.2023.01.04

8. *Коршунов В.А., Павлович А.А., Бажуков А.А.* Оценка сдвиговой прочности горных пород по трещинам на основе результатов испытаний образцов сферическими инденторами // Записки Горного института. 2023. Т. 262. С. 606-618. DOI: 10.31897/PMI.2023.16

9. *Вербило П.Э., Вильнер М.А.* Изучение анизотропии прочности и масштабного эффекта трещиноватого массива горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2022. № 6-2. С. 47-59. DOI: 10.25018/0236_1493_2022_62_0_47

10. *Ильинов М.Д., Петров Д.Н., Карманский Д.А., Селихов А.А.* Аспекты физического моделирования процессов структурных изменений образцов горных пород при термобарических условиях больших глубин // Горные науки и технологии. 2023. Т. 8. № 4. С. 290-302. DOI: 10.17073/2500-0632-2023-09-150

11. *Schwartzkopff A.K., Sainoki A., Bruning T., Karakus M.* A conceptual three-dimensional frictional model to predict the effect of the intermediate principal stress based on the Mohr-Coulomb and Hoek-Brown failure criteria // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2023. Vol. 172. № 105605. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2023.105605

12. *Naiyu Liu, Puhui Chen.* A failure envelope proposal based on the analysis of the requirements of nonlinear Mohr-Coulomb criteria // Mechanics Research Communications. 2023. Vol. 129. № 104086. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2023.104086

13. *Jianbin Tang, Xi Chen, Liusheng Cui, Zongqi Liu.* Strain localization of Mohr-Coulomb soils with non-associated plasticity based on micropolar continuum theory // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2023. Vol. 15. Iss. 12. P. 3316-3327. DOI: 10.1016/j.jrmge.2023.02.029

14. *Трушко В.Л., Баева Е.К.* Обоснование рациональных параметров крепи комплекса горных выработок, проводимых в сложных горно-геологических условиях // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2023. № 12. С. 55-69. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_12_0_55

15. *Pin-Qiang Mo, Hai-Sui Yu.* Plasticity Solutions of an Undrained Cavity Contraction for the Prediction of Soil Behaviour around Tunnels // Fourth Geo-China International Conference, 25-27 July 2016, Shandong, China. American Society of Civil Engineers, 2016. P. 150-157. DOI: 10.1061/9780784480038.019

16. *Yu-Lin Lee, Chih-Sheng Chen, Tseng-Hsing Hsu, Chi-Min Lee.* Explicit Analysis for the Ground Reaction of a Circular Tunnel Excavated in Anisotropic Stress Fields based on Hoek–Brown Failure Criterion // Mathematics. 2024. Vol. 12. Iss. 17. № 2689. DOI: 10.3390/math12172689

17. *Kai Guan, Quanyun Zhang, Honglei Liu, Wancheng Zhu.* A New Numerical Procedure for the Excavation Response in Mohr–Coulomb Rock Mass Exhibiting Strain-Softening Behavior // Frontiers in Earth Science. 2022. Vol. 10. № 872792. DOI: 10.3389/feart.2022.872792

18. *Yong Li, Shugang Cao, Nicholas Fantuzzi, Yanbao Liu.* Elasto-plastic analysis of a circular borehole in elastic-strain softening coal seams // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2015. Vol. 80. P. 316-324. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2015.10.002

19. *Jin-feng Zou, Shuai-shuai Li, Yuan Xu et al.* Theoretical solutions for a circular opening in an elastic–brittle–plastic rock mass incorporating the out-of-plane stress and seepage force // KSCE Journal of Civil Engineering. 2016. Vol. 20. Iss. 2. P. 687-701. DOI: 10.1007/s12205-015-0789-y

20. *Yuming Sheng, Peng Li, Shutong Yang, Jinfeng Zou.* Elastoplastic solutions for deep-buried twin tunnels with arbitrary shapes and various arrangements under biaxial in-situ stress field based on Mohr-Coulomb and generalized Hoek-Brown criteria // Computers and Geotechnics. 2024. Vol. 165. № 105896. DOI: 10.1016/j.compgeo.2023.105896

21. *Tianzheng Li, Wenping Gong, Xiaoli Yang.* Stability analysis of a non-circular tunnel face in soils characterized by modified Mohr-Coulomb yield criterion // Tunnelling and Underground Space Technology. 2021. Vol. 109. № 103785. DOI: 10.1016/j.tust.2020.103785

22. *Yuming Sheng, Jinfeng Zou, Yuepeng Dong, Guang-Hui Chen.* Novel perturbation solutions for deep-buried non-circular tunnels under biaxial in situ stress field based on Mohr-Coulomb criterion // Applied Mathematical Modelling. 2022. Vol. 110. P. 408-440. DOI: 10.1016/j.apm.2022.06.006

23. *Zenghui Zhao, Wei Sun, Shaojie Chen et al.* Displacement of surrounding rock in a deep circular hole considering double moduli and strength-stiffness degradation // Applied Mathematics and Mechanics. 2020. Vol. 41. Iss. 12. P. 1847-1860. DOI: 10.1007/s10483-020-2665-9

24. *Hongying Wang, Qiang Zhang, Peinan Wu et al.* Elastoplastic solution of a circular tunnel in surrounding rock with any nonlinear yield criteria and plastic flow envelopes // Computers and Geotechnics. 2024. Vol. 166. № 105954. DOI: 10.1016/j.compgeo.2023.105954

25. *Yiouta-Mitra P., Sakurai S.* Critical strain method incorporating calculation of equivalent H-B strength parameters for back analysis during tunnel excavation // Tunnelling and Underground Space Technology. 2023. Vol. 140. № 105252. DOI: 10.1016/j.tust.2023.105252

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

26. *Baotang Shen, Jingyu Shi, Barton N.* An approximate nonlinear modified Mohr-Coulomb shear strength criterion with critical state for intact rocks // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2018. Vol. 10. Iss. 4. P. 645-652. DOI: 10.1016/j.jrmge.2018.04.002

27. *Pei-Zhi Zhuang, Hai-Sui Yu.* Two-dimensional elastoplastic analysis of cylindrical cavity problems in Tresca materials // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2019. Vol. 43. Iss. 8. P. 1612-1633. DOI: 10.1002/nag.2925

28. *Xiongfei Yang, Hong Yuan, Jiayu Wu, Shanqing Li.* Elastoplastic Analysis of Circular Tunnel Based on Drucker–Prager Criterion // Advances in Civil Engineering. 2018. Vol. 2018. № 5149789. DOI: 10.1155/2018/5149789

29. *Zareifard M.R.* Ground response curve of deep circular tunnel in rock mass exhibiting Hoek–Brown strain-softening behaviour considering the dead weight loading // European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2021. Vol. 25. Iss. 14. P. 2509-2539. DOI: 10.1080/19648189.2019.1632745

30. *Pijush Pal Roy, S. Rama Raju, Dipankar Chattopadhyay.* An Overview of Tunnel Support Systems under Squeezing Rock Condition in Arun Hydroelectric Project, Stage-III, Eastern Nepal // SSRN. 2023. 15 p. DOI: 10.2139/ssrn.4461004

31. *Chen Xu, Sheng Wang, Caichu Xia.* Analytical prediction for time-dependent interaction of a circular tunnel excavated in strain-softening rock mass // Rock Mechanics Bulletin. 2024. Vol. 3. Iss. 3. № 100127. DOI: 10.1016/j.rockmb.2024.100127

32. *Vrakas A., Anagnostou G.* A finite strain closed-form solution for the elastoplastic ground response curve in tunnelling // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2014. Vol. 38. Iss. 11. P. 1131-1148. DOI: 10.1002/nag.2250

33. *Vrakas A., Anagnostou G.* Finite strain elastoplastic solutions for the undrained ground response curve in tunnelling // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2015. Vol. 39. Iss. 7. P. 738-761. DOI: 10.1002/nag.2335

34. *Galindo R.A., Serrano A., Olalla C.* Ultimate bearing capacity of rock masses based on modified Mohr-Coulomb strength criterion // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2017. Vol. 93. P. 215-225. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2016.12.017

35. *Arora K., Gutierrez M.* Viscous-elastic-plastic response of tunnels in squeezing ground conditions: Analytical modeling and experimental validation // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2021. Vol. 146. № 104888. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2021.104888

36. *Yaocai Ma, Aizhong Lu, Hui Cai, Xiangtai Zeng.* A semi-analytical method for elastic-plastic analysis of a deep-buried elliptical tunnel // Computers and Geotechnics. 2022. Vol. 142. № 104589. DOI: 10.1016/j.compgeo.2021.104589

37. *Yaocai Ma, Aizhong Lu, Hui Cai, Xiangtai Zeng.* Analytical solution for determining the plastic zones around two unequal circular tunnels // Tunnelling and Underground Space Technology. 2022. Vol. 120. № 104267. DOI: 10.1016/j.tust.2021.104267

***Авторы*: Анатолий Григорьевич Протосеня,** *д-р техн. наук, заведующий кафедрой* (*Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Россия*), *https://orcid.org/0000-0001-7829-6743*, **Максим Анатольевич Карасев,** *д-р техн. наук, профессор* (*Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Россия*), *Karasev_MA@pers.spmi.ru*, *https://orcid.org/0000-0001-8939-0807*, **Никита Андреевич Беляков,** *канд. техн. наук, доцент* (*Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Россия*), *https://orcid.org/0000-0002-9754-501X*, **Павел Кириллович Тулин,** *канд. техн. наук, доцент* (*Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Россия*), *https://orcid.org/0000-0002-0820-4759*.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0