ISSN 2411-3336; e-ISSN 2541-9404

ЗАПИСКИ ГОРНОГО ИНСТИТУТА
Journal of Mining Institute
Сайт журнала: pmi.spmi.ru



Научная статья

Разработка новой формулы для расчета требуемой толщины ледопородного ограждения по условию прочности

М.А.Семин✉, Л.Ю.Левин
Горный институт УрО РАН, Пермь, Россия

***Как цитировать эту статью*:** Семин М.А., Левин Л.Ю. Разработка новой формулы для расчета требуемой толщины ледопородного ограждения по условию прочности // Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668. EDN WEJUBT

Аннотация. Исследована задача об упругопластическом деформировании ледопородного ограждения (ЛПО) с неограниченной высотой заходки, впервые сформулированная С.С.Вяловым. Проанализированы поля напряжений и перемещений, возникающих в ЛПО в результате приложения внешних нагрузок для нескольких пограничных ситуаций – зарождения зоны пластических деформаций и распространения этой зоны на всю толщину ЛПО. Распространение зоны пластических деформаций соответствует предельному равновесию ЛПО, для которого С.С.Вялов вывел формулу толщины ЛПО по условию прочности. Полученные результаты послужили отправной точкой для перехода от одномерной к двухмерной задаче о деформировании ЛПО с конечной высотой заходки. Проведено численное моделирование деформирования ЛПО при помощи ПО FreeFEM++ в двухмерной осесимметричной постановке – в рамках двух расчетных схем с различными граничными условиями на верхнем торце ЛПО. В первой схеме фиксировались как вертикальные, так и радиальные перемещения на всем верхнем торце, а во второй схеме на верхнем торце задавалась вертикальная нагрузка, соответствующая весу вышележащих пород. По результатам исследований предложена модификация формулы С.С.Вялова, основанная на критерии прочности Мора – Кулона и включающая в себя новый параметр – высоту заходки. Для различных слоев пород определены условия, при которых конечная высота заходки не оказывает значительного влияния на расчетную толщину ЛПО, что позволяет применять классическую формулу С.С.Вялова для расчета толщины ЛПО по условию прочности, предполагая неограниченную высоту заходки.

***Ключевые слова*:** ледопородное ограждение; искусственное замораживание пород; напряженно-деформированное состояние; предельное равновесие; критерий Мора – Кулона; статический расчет; моделирование; FreeFEM++

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего образования и науки РФ в рамках проекта № 122030100425-6.

Поступила: 20.12.2021 ***Принята: 02.05.2024*** ***Онлайн: 04.06.2024*** ***Опубликована: 26.08.2024***

Введение. Строительство шахтных стволов в обводненных и неустойчивых породах обычно осуществляется различными способами [1, 2]. В калийных рудниках используется способ искусственного замораживания пород, что связано с особенностями месторождений – водорастворимостью руд и необходимостью защиты горных выработок от проникновения подземных вод [3, 4]. Путем искусственного замораживания пород создается ледопородное ограждение (ЛПО), обеспечивающее гидроизоляцию строящейся горной выработки и дополнительное упрочнение ее незакрепленных стенок. ЛПО должно иметь достаточную толщину, определяемую условиями прочности и ползучести пород [5-7].

Действующими нормативными актами (СП 248.1325800.2016, СНиП 32-02-2003) устанавливается, что проектирование специальных способов проходки подземных сооружений следует выполнять в соответствии с инструкцией ВСН 189-78, в которой предложены простые расчетные формулы толщины ЛПО по условию прочности – формула Ляме – Гадолина и формула Домке.

Формула Ляме – Гадолина учитывает только упругое деформирование ЛПО и применяется при малых нагрузках, в то время как формула Домке частично учитывает упругопластическое

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668
© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

деформирование и применима в более широком, но по-прежнему ограниченном диапазоне нагрузок [8]. В этих формулах используется условие пластичности Треска – Сен-Венана [9, 10], которое плохо применимо к замороженным породам [11]. Более корректный анализ особенностей перехода в зону пластического деформирования замороженных пород должен проводиться на базе других критериев – Мора – Кулона [12-14] и Друкера – Прагера [15] или их модификаций [16, 17]. Параметрами этих критериев являются прочностные свойства замороженных пород – сцепление C и угол внутреннего трения φ [18]. При этом важно понимать, что при замораживании пород на больших глубинах при высоком всестороннем сжимающем давлении критерии Мора – Кулона и Друкера – Прагера также становятся неприменимы и требуют модификаций [19].

Прочностные свойства C и φ вошли в качестве исходных данных в известную формулу С.С.Вялова для определения требуемой по условию прочности толщины ЛПО [20, 21]:

$$E = R\left[\left(1+\frac{P(\Lambda-1)}{\overline{\Lambda}}\right)^{\frac{1}{\Lambda-1}}-1\right]; \quad (1)$$

$$\Lambda = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right); \quad \overline{\Lambda} = 2C\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right), \quad (2)$$

где R – радиус внутренней границы ЛПО, м; P – внешняя нагрузка, Па.

Формула (1) не закреплена в нормативной литературе, но часто используется при анализе толщины ЛПО по условию прочности. Она соответствует случаю неподкрепленного ледопородного цилиндра неограниченной высоты заходки h. Для случая конечной высоты заходки С.С.Вяловым также выведена расчетная формула:

$$E = \frac{\sqrt{3}Ph}{2\sigma_{сж}}, \quad (3)$$

где $\sigma_{сж}$ – предел прочности на одноосное сжатие для замороженной породы, МПа.

Однако при выводе формулы (2) использовались другие, более грубые упрощения, что приводило к существенно завышенным величинам толщин ЛПО в случае рассмотрения реального диапазона значений высот заходки (3-12 м).

Также часто при анализе нелинейного деформирования замороженных пород исследователи используют более сложные реологические модели, например модель Ниширахары [21, 22], модель Barcelona [23] и др. Более сложные модели учета неупругого поведения замороженных пород требуют большего количества параметров, определение которых в рамках лабораторных испытаний может оказаться нетривиальным, а их применение в решении прикладных задач прогноза напряженно-деформированного состояния породного массива при строительстве шахтного ствола – невозможным.

Относительно простые модели нелинейного деформирования замораживаемых вязкоупругопластичных сред применяются в расчете толщины ЛПО по условию ползучести, которое для некоторых типов грунтов и пород является не менее важным, чем условие прочности [24-26]. Расчет по условию ползучести заключается в определении такой толщины ЛПО, при которой максимальное радиальное смещение его внутренней стенки под действием нагрузки на внешнюю не превысит предельной допустимой величины Δ за заданное время t_p. Величина Δ определяется, исходя из технологии проходки ствола или из допустимой величины прогиба замораживающих колонок [8, 27]. В данной статье рассматривается расчет толщины ЛПО именно по условию прочности (или по предельному напряженному состоянию).

Формула (1) для расчета ЛПО по условию прочности не учитывает ряд значимых физических факторов:

1) конечную высоту заходки;

2) частичное восприятие давления бокового распора окружающими горными породами;

3) начальное деформированное состояние пород за счет тепловой деформации твердых частиц породы и расширения воды при замерзании в порах;

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

4) неоднородное поле температур в объеме замороженных пород;

5) вертикальную нагрузку.

В работах [13, 14, 28] были предприняты попытки модификации формулы (1) с учетом факторов 2, 3 и 4. Факторы 1 и 5 на напряженно-деформированное состояние (НДС) замораживаемых пород также учитывались, но в рамках другой методологии – численного моделирования сопряженных термогидромеханических процессов [23, 29, 30]. Однако не удалось получить универсальную формулу определения требуемой толщины ЛПО для произвольного случая.

В статье описана возможность построения аналитической расчетной формулы определения толщины ЛПО из условия предельного напряженного состояния с учетом конечной высоты заходки и предложена модификация формулы (1), включающая в себя новый параметр – высоту заходки.

Методология. *Случай неограниченной высоты заходки.* В исследовании упругопластическое деформирование замороженных пород анализировалось в простой математической постановке. До двухмерной постановки задачи с конечной высотой заходки рассматривается более простая одномерная ситуация полого цилиндра из замороженных пород, имеющего неограниченно большую высоту заходки, внутренний и внешний радиусы a и b соответственно (рис.1). Такая постановка была рассмотрена в источнике [3].

На внешней границе расчетной области прикладывается заданная равномерная нагрузка, а на внутренней задается свободная ненагруженная поверхность. Предполагается, что горная порода представляет собой однородный и изотропный материал, а НДС является плоскодеформированным. Таким образом, имеет место вращательная симметрия в геометрии, свойствах пород и граничных условиях задачи, а потому уместно предположить, что решение задачи в целом также обладает данным видом симметрии. В таком случае только радиальные перемещения окажутся не равными нулю. Математическая постановка задачи:

• уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{4}$$

• зона упругого деформирования

$$\sigma_r = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon_r + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_\theta; \tag{5}$$

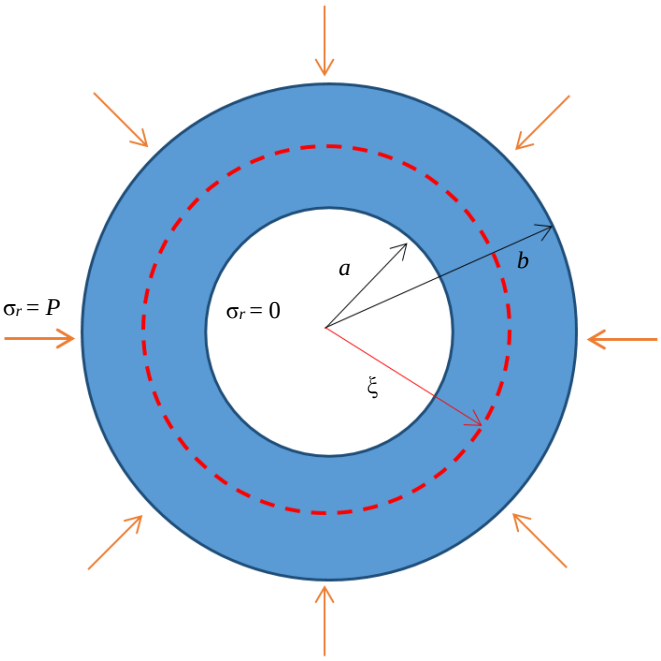

Рис.1. Геометрия расчетной области при рассмотрении неограниченной высоты заходки

$$\sigma_\theta = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon_\theta + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon_r; \tag{6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{7}$$

• зона пластического течения, определяемая критерием Мора – Кулона

$$\sigma_\theta = \Lambda \sigma_r + \overline{\Lambda}; \tag{8}$$

• граничные условия

$$\sigma_r(a) = 0; \quad \sigma_r(b) = P; \tag{9}$$

$$\sigma_r(\xi + 0) = \sigma_r(\xi - 0); \quad \sigma_\theta(\xi + 0) = \sigma_\theta(\xi - 0), \tag{10}$$

где σ_r и σ_θ – радиальная и угловая (тангенциальная) компоненты тензора напряжений соответственно, Па; K – объемный модуль упругости, Па; G – модуль сдвига, Па; ε_r, ε_θ – радиальная и тангенциальная компоненты

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668
© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

тензора деформаций соответственно; u – радиальное перемещение, м; ξ – граница между упругой зоной и зоной пластического течения, м.

Принято, что сжимающие напряжения имеют положительный знак, а растягивающие – отрицательный [31]. В качестве граничных условий между двумя зонами выбраны два условия по напряжениям, но отсутствует условие неразрывности по перемещениям. Тем не менее, оно выполняется автоматически при выполнении равенств (10). Величина ξ является искомым параметром наряду с функциями σ_r, σ_θ и др.

Как указано в источнике [27], зарождение и развитие зоны упругопластического деформирования происходит с внутренней границы ЛПО. Считается, что ЛПО теряет свою несущую способность, когда зона пластического течения распространяется на всю толщину ЛПО и впервые касается его внешней границы. Именно для этого состояния предельного равновесия определяется расчетная толщина ЛПО.

Ранее решение системы уравнений (5)-(10) исследовалось только частично, в терминах напряжений, чего было достаточно для определения предельной нагрузки на ЛПО. Применительно к исследуемому распределению деформаций и перемещений также представляют интерес с точки зрения дальнейших исследований, направленных на модификацию формулы (1). Однако распределение перемещений в объеме замороженных пород не может быть получено в аналитической форме, поэтому необходимо решить задачу (4)-(10) численно. В свою очередь, для разработки численной схемы расчета потребовалось видоизменить и дополнить систему уравнений (4)-(10) ассоциированным законом пластического течения [32, 33]:

$$\varepsilon_i^{(p)} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}; \quad i = (r, \theta), \tag{11}$$

а закон Гука (6)-(7) переписать в следующем виде:

$$\sigma_r = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^{(p)}\right) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^{(p)}\right); \tag{12}$$

$$\sigma_\theta = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^{(p)}\right) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^{(p)}\right), \tag{13}$$

где $\varepsilon_r^{(p)}$, $\varepsilon_\theta^{(p)}$ – пластические части радиальной и тангенциальной компонент тензора деформаций соответственно; λ – пластические множитель; F – поверхность текучести, определяемая условием (8).

Предполагается, что увеличение пластических деформаций в зоне пластического течения происходит в соответствии с ассоциированным законом течения. Закон достаточно простой, однако в его основе лежит ряд упрощений, не в полной мере справедливых для горных пород [34]. Это касается допущения о соосности векторов главных напряжений, линейных и пластических составляющих главных деформаций [35]. Для рассматриваемого случая с нулевыми касательными компонентами тензоров напряжений и деформаций допущение о соосности векторов справедливо.

Численное решение задач (4), (7)-(13) осуществлялось при помощи ПО Wolfram Mathematica методом конечных разностей. Нагружение ЛПО выполнялось итерационно. На каждом шаге итерации $i = 1, \ldots n$ к внешней границе ЛПО прибавлялась нагрузка, равная $\Delta P_i = P/n$. Далее в каждой ячейке расчетной области проверялось выполнение условия

$$F = \sigma_\theta - \Lambda\sigma_r - \overline{\Lambda} \le 0, \tag{14}$$

и при его нарушении рассчитывался прирост пластической части тензора деформаций в соответствии с законом (11).

Случай ограниченной высоты заходки. Следующим этапом исследования был анализ НДС ЛПО для ограниченной высоты заходки, которую можно учесть путем небольшой модификации

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

исходного уравнения равновесия (4) – добавлением дополнительного члена, учитывающего касательное напряжение τ_{rz} [8]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

где z – вертикальная координата, м.

Важно учитывать, что появление касательных напряжений и деформаций приводит к утрате симметрии задачи в вертикальном направлении, и состояние ЛПО уже нельзя рассматривать как плоскодеформированное.

Для анализа и подбора вида функции $\tau_{rz}(r, z)$ применены методы численного моделирования НДС в ЛПО с учетом вращательной симметрии задачи, позволяющей снизить пространственную размерность задачи с 3D до 2D. Численное решение двухмерной задачи получено с помощью метода конечных элементов в программном пакете Free FEM++. В дополнение к уравнению равновесия (15) по радиальной оси учитывалось уравнение равновесия по вертикальному направлению:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

где σ_z – вертикальная компонента тензора напряжений, Па.

Для простоты рассмотрена упругая постановка задачи. На нижнем торце ЛПО задавалось условие нулевых вертикальных перемещений, а на верхнем – два возможных варианта расчетной схемы. В первом случае фиксировались как вертикальные, так и горизонтальные перемещения (классическая постановка С.С.Вялова [27], рис.2, *а*), а во втором – вертикальная нагрузка, соответствующая весу вышележащих пород (q = 1,29 МПа, рис.2, *б*), при этом на внутренней крайней точке верхнего торца ($r = a$) оба перемещения фиксировались. Граничные условия на верхнем торце, соответствующие второй расчетной схеме, использовались также в работах [24, 26] и, по мнению авторов, являются более обоснованными с точки зрения физики. Тем не менее, рассмотрение первой расчетной схемы (как второстепенной) также представляет интерес в отношении сравнительного анализа различных расчетных схем.

В рамках первого варианта расчетной схемы вертикальное перемещение w задавалось равным нулю, а горизонтальное u – функцией $u_0 = a/r$, что физически можно трактовать как некоторое равновесное смещение внутренней границы ЛПО, достигнутое в данном горизонтальном сечении породного массива на предыдущей заходке к моменту возведения бетонной крепи. Принято, что перемещение на внутренней границе ЛПО у верхнего торца ЛПО равно u_0 = 0,5 см. Далее в соответствии с формализмом метода конечных элементов [36] делался переход к вариационной постановке осесимметричной задачи теории упругости и вводились функции формы – первого порядка для перемещений и нулевого порядка для напряжений.

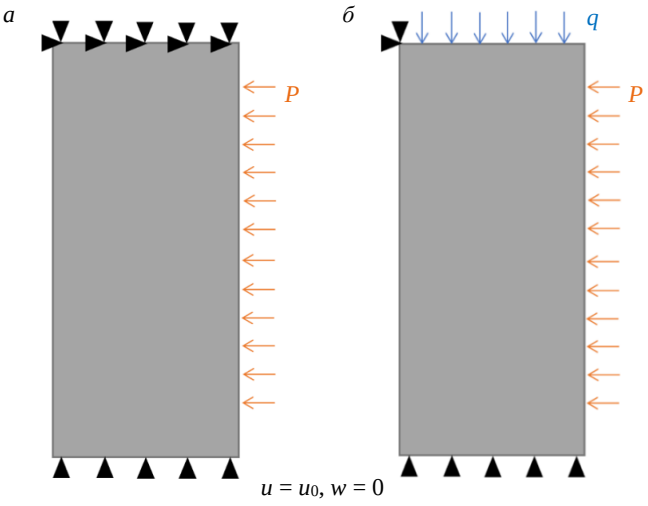

Рис.2. Расчетная схема к двухмерной задаче НДС в ЛПО: *а* – первый, *б* – второй варианты

Обсуждение результатов. *Случай неограниченной высоты заходки.* Рассчитанное распределение абсолютных величин радиальных перемещений в объеме ЛПО представлено на рис.3. Действительные радиальные перемещения имеют отрицательный знак. Расчет производился для следующих параметров задачи: P = 0,86 МПа; K = 981 МПа; G = 869 МПа; Λ = 1,58; $\overline{\Lambda}$ = 4,02 МПа; a = 5 м; b = 6,12 м, что соответствует алевриту [5]. Помимо кривой для упругопластического деформирования ЛПО представлены кривые для упругого деформирования ЛПО при нагрузке, соответствующей возникновению зоны пластических деформаций.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668
© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

Минимальные (по модулю) перемещения соответствуют началу зарождения пластических деформаций (внешняя нагрузка в этом случае несколько меньше и равна 0,67 МПа), а максимальные (по модулю) – упругопластическому деформированию с учетом пластического течения. При этом распределения перемещений во всех трех случаях равномерны по толщине ЛПО, а относительная разница δu между перемещениями в упругой и в упругопластической постановках при внешней нагрузке 0,86 МПа составляет 34-39 % (относительно наименьшего значения перемещений). Данная величина существенно зависит от типа пород и температуры, при которой определялись прочностные характеристики замороженных пород (см. таблицу). Данные по физико-механическим свойствам и длительной прочности пород взяты из лабораторных исследований пород строящегося калийного рудника, частично описанных в статье [5]. Прочностные свойства Λ и $\overline{\Lambda}$ соответствуют длительности нагружения, равной 1 сут.

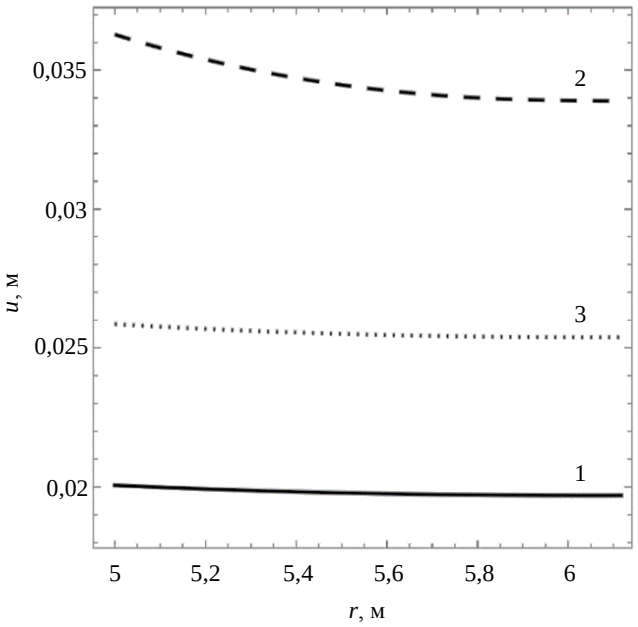

Рис.3. Распределение абсолютных значений радиальных перемещений в объеме ЛПО

1 – начало зарождения пластических деформаций;
2 – предельное состояние равновесия (упругопластическое деформирование);
3 – предельное состояние равновесия (упругое деформирование)

Максимальная относительная разница перемещений в упругой и упругопластической постановках для различных слоев пород по данным расчетов

Слой	Λ	$\overline{\Lambda}$, МПа	K, МПа	G, МПа	P, МПа	δu, %
Алеврит	1,58	4,02	981	869	0,86	39
Супесь	2,04	5,31	654	568	1,45	51
Мел	1,52	4,18	890	800	1,68	57
Глина	1,38	3,75	950	860	2,5	71

Максимальная разница δu радиальных перемещений в объеме ЛПО в упругой и в упругопластической постановках является важным параметром, который будет использован при дальнейшем анализе постановки (4)-(10) и ее усложнении (15). Для упругого деформирования ЛПО существует аналитическая формула для расчета как функции перемещений $u(r)$ [8], так и, в частности, максимального значения перемещения замороженных пород (по модулю), достигаемого на границе $r = a$:

$$u_{\max} = \frac{P'ab^2}{2\left(b^2 - a^2\right)} \frac{4G + 3K}{G\left(G + 3K\right)} = \frac{P'ab^2}{4\left(b^2 - a^2\right)} \frac{1 - \nu}{G}, \qquad (17)$$

где ν – коэффициент Пуассона; P' – внешняя нагрузка.

При выводе итогового выражения в уравнении (17) учитывалась известная зависимость объемного модуля упругости от модуля сдвига и коэффициента Пуассона ($K = 2G(1 + \nu)/3/(1 - 2\nu)$).

Для упругих деформаций максимальное перемещение линейно зависит от внешней нагрузки P'. При упругопластическом деформировании ЛПО зависимость уже не будет справедлива. Оценка для максимального смещения внутренней стенки ЛПО к центру ствола для упругопластического случая может быть сделана путем введения в правую часть уравнения (17) множителя $\xi = 1 + 0{,}01\delta u$, зависящего от параметра δu, который рассчитан ранее и приведен в таблице.

Случай ограниченной высоты заходки. Численное решение задачи о двухмерном осесимметричном деформировании ЛПО конечной высоты заходки представлено на рис.4.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

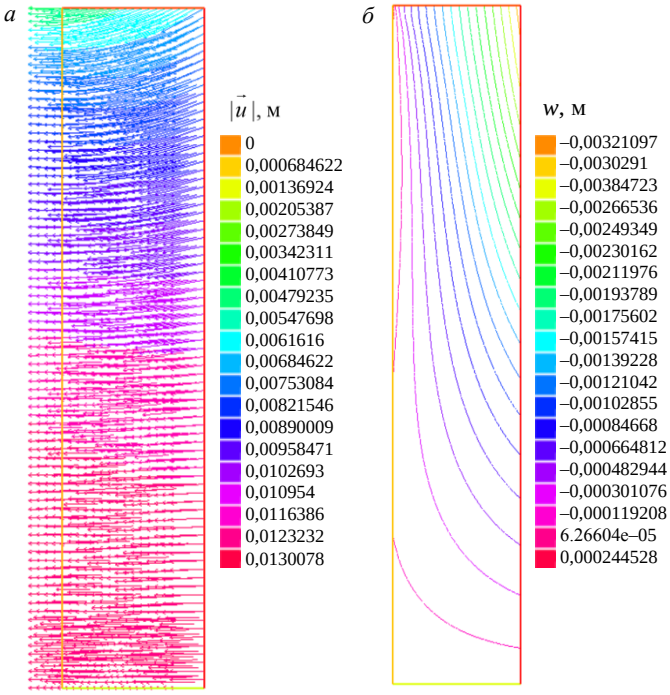

Рис.4. Численное решение задачи НДС в ЛПО для второй расчетной схемы: векторное поле полных перемещений (*а*) и контурные линии вертикальных перемещений (*б*) в вертикальном сечении ЛПО высотой 5 м

Характер деформирования ЛПО (рис.4) показывает, что по абсолютной величине вертикальные перемещения на порядок ниже радиальных перемещений. А радиальные перемещения являются ярко выраженной функцией вертикальной координаты – как для первого варианта расчетной схемы (рис.5, *а*), так и для второго (рис.5, *б*). Это указывает на то, что касательное напряжение $\tau_{rz} \approx G\partial u/\partial z$ становится важнейшим фактором, во многом определяющим НДС в ЛПО, а также развитие зоны пластических деформаций.

Вертикальные перемещения меняются по высоте незначительно, за исключением локальных областей на внешней и внутренней границах ЛПО. Поэтому первым слагаемым в уравнении (16) часто пренебрегают [26], тогда

$$\tau_{rz} = \frac{C(z)}{r}; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{C'(z)}{r}, \qquad (18)$$

где $C(z)$ – некоторая неизвестная функция координаты z.

Зависимость (18) верна только приближенно, поскольку на внутренней границе ЛПО касательное напряжение τ_{rz} должно обращаться в нуль. На внешней границе τ_{rz} может как обращаться в нуль, так и быть не равным нулю – в зависимости от того, как в выбранной расчетной схеме принято условие контакта незамороженных пород и ЛПО. В рассматриваемом случае принято, что контакт «скользящий», а потому на внешней границе τ_{rz} также должно обращаться в нуль.

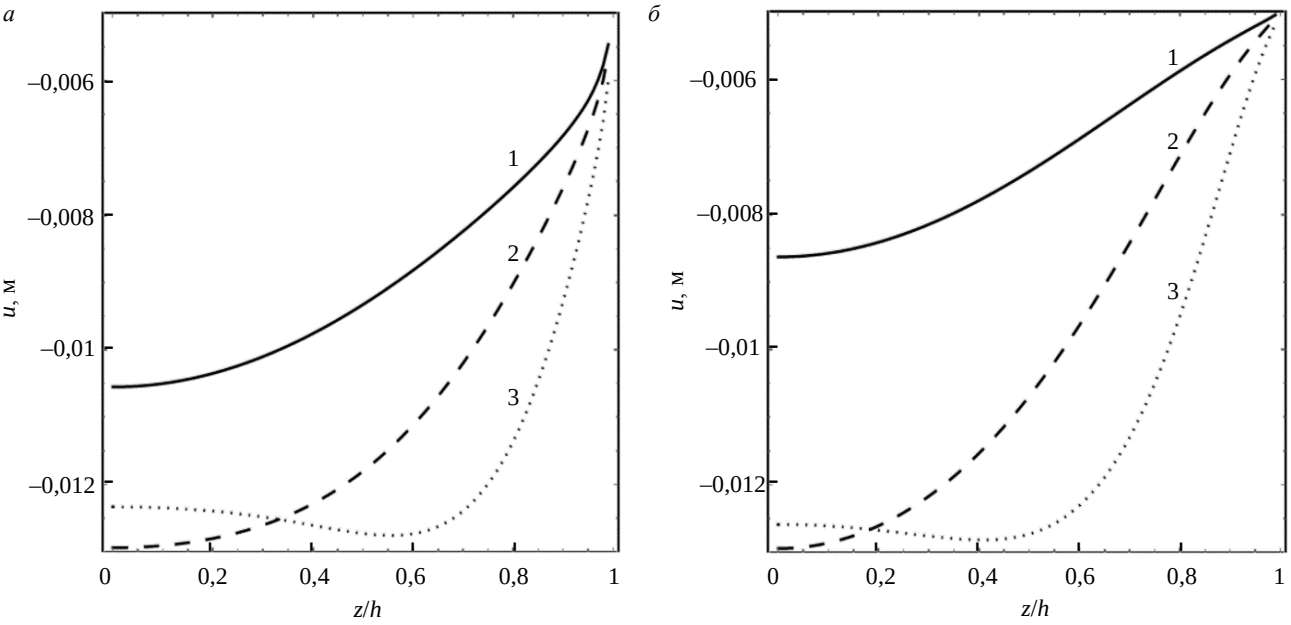

Рис.5. Зависимость радиального перемещения от вертикальной координаты на внутренней границе ЛПО для первой (*а*) и второй (*б*) расчетных схем
1 – h = 2,5 м; 2 – h = 5 м; 3 – h =10 м

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668
© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

Возникает вопрос, как определить функцию $C(z)$. По результатам численного моделирования для случая задания вертикальной нагрузки на верхней границе ЛПО (рис.6, *а*) зависимость $\tau_{rz}(z)$ имеет сложный нелинейный и немонотонный характер. На верхней и нижней границах ЛПО касательное напряжение обращается в нуль, а внутри ЛПО функция $\tau_{rz}(z)$ может иметь один или два локальных экстремума. При этом данная функция также существенно зависит от величины u_0 смещения внутренней стенки ЛПО у верхнего торца ЛПО.

Градиент касательных напряжений $\partial\tau_{rz}/\partial z$, присутствующий в формуле (15), знакопеременен. Особенно ярко это проявляется для расчетной схемы с вертикальной нагрузкой (рис.6). Вблизи верхнего торца ЛПО ($z = h$) он имеет отрицательное значение и максимален по модулю, при z = 0,85-0,97h градиент обращается в нуль, а при дальнейшем уменьшении z он на некотором отрезке сохраняет положительное значение и убывает по абсолютной величине, так как кривая $\tau_{rz}(z)$ становится более пологой. Второй экстремум (если он есть) достигается на пологом участке кривой и потому вызывает меньший интерес. Подобная ситуация складывается для расчетной схемы

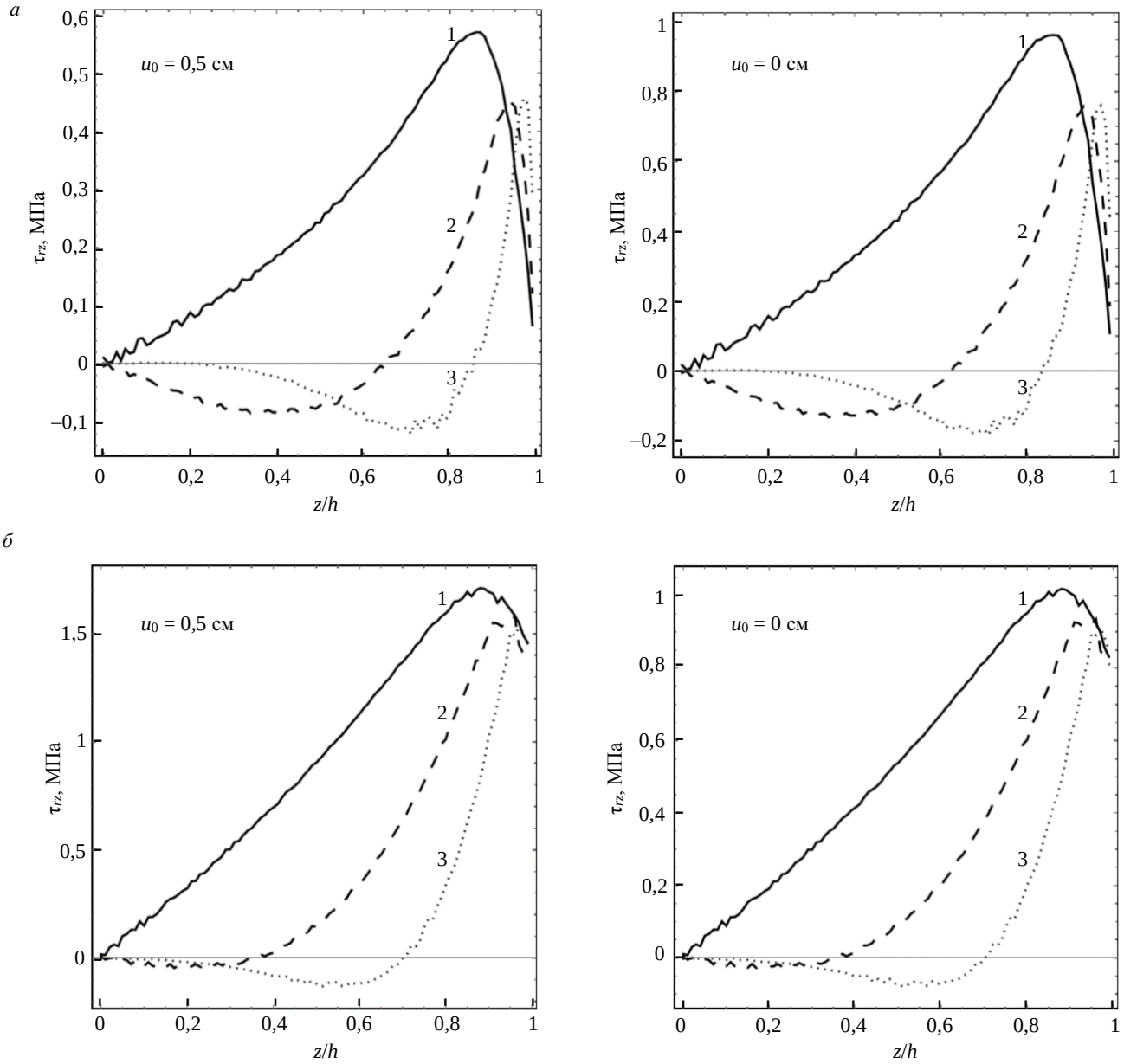

Рис.6. Зависимость касательного напряжения τ_{rz} от вертикальной координаты при различных высотах заходки, срединное радиальное сечение ЛПО, расчетная схема с вертикальной нагрузкой (*а*) на верхнем торце и фиксированными перемещениями (*б*)

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

с фиксированными перемещениями на верхнем торце (рис.6, *б*), при этом для малых высот заходки зависимость касательного напряжения от вертикальной координаты *z* близка к линейной.

В работе [27] для вывода формулы толщины ЛПО по критерию ползучести использовалось допущение о линейной зависимости касательного напряжения от вертикальной координаты $\tau_{rz}(z) = Az + B$. Линейная форма зависимости представляет собой простой подход, требующий минимального числа дополнительных условий для определения неизвестных коэффициентов A и B. Кроме того, с учетом такой зависимости производная $\tau_{rz}(z)$ по z остается постоянной, а параметр z исчезает из уравнения (15), что становится удобным при теоретическом анализе.

При граничных условиях на нижнем и верхнем торцах ЛПО

$$z = 0; \quad \tau_{rz} = 0; \tag{19}$$

$$z = h; \quad u = -u^*(r) = \frac{u_a a}{r}; \tag{20}$$

линейная функция касательных напряжений от z может быть представлена в виде

$$\tau_{rz} = -\frac{u_a a}{r}\,\frac{Gz}{ah} = -\frac{Gu_a}{hr}z\,. \tag{21}$$

Коэффициент при z в линейной зависимости $\tau_{rz}(z)$ формулы (21) получен, исходя из условия линейной взаимосвязи τ_{rz}, $u^*(r)$ в уравнении (20) с модулем G. При этом размерный геометрический параметр $(ah)^{-1}$ подобран так, чтобы получить правильное асимптотическое поведение решения рассматриваемой задачи при малых значениях h.

Выражение (21) находится в хорошем соответствии с условием (18), устанавливающим зависимость касательного напряжения от радиальной координаты. С учетом формулы (21) уравнение (15) может быть записано в таком виде:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{Gu_a}{rh} = 0. \tag{22}$$

В работах [27, 37] уравнение (22) решалось путем подстановки в него выражения для σ_θ из закона Мора – Кулона (8). Полученное дифференциальное уравнение содержало единственную неизвестную функцию σ_r и могло быть решено аналитически с учетом условий (9) на границах расчетной области. Однако, принимая во внимание ненулевое касательное напряжение τ_{rz}, осевые компоненты напряжений в общем случае уже не будут являться главными напряжениями. А в зоне верхнего торца ЛПО угловое напряжение становится вторым главным напряжением и, следовательно, не включается в общий закон Мора – Кулона, который записывается в виде:

$$\sigma_1 = \Lambda\sigma_3 + \overline{\Lambda}\,. \tag{23}$$

В отличие от области верхнего торца ЛПО, для которой не существует простого аналитического решения, в области нижнего торца ЛПО касательное напряжение существенно ниже других компонент тензора напряжений, угловое напряжение выступает в качестве первого главного напряжения σ_1. В этом случае уравнение (22) имеет аналитическое решение для поля напряжений в условиях предельного напряженного состояния, когда во всем объеме породы выполняется закон Мора – Кулона:

$$\sigma_r = \frac{\overline{\Lambda}'}{\Lambda - 1}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\Lambda-1} - 1\right]; \tag{24}$$

$$\overline{\Lambda}' = \overline{\Lambda} + \frac{Gu_a}{h} = \overline{\Lambda} + \frac{P'(1-\nu)\xi}{4}\,\frac{ab^2}{h\left(b^2 - a^2\right)} = \overline{\Lambda} + \overline{\Lambda}(1-\nu)\xi\frac{a}{4h}. \tag{25}$$

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Записки Горного института. 2024. Т. 268. С. 656-668
© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

В формуле (25) в качестве перемещения u_a использовалась зависимость (17). При подстановке равенств (23) и (22) главные напряжения записаны следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Коэффициент $\xi \geq 1$ в данном случае является поправкой, позволяющей учесть влияние пластических деформаций. Его значение может быть определено по данным таблицы либо установлено равным единице при проведении верхней оценки для необходимой толщины ЛПО. В случае, если в уравнении (24) принять $r = b$ и $\sigma_r = P$ и вывести из получившегося выражения величину $E = b - a$, получится следующая формула:

$$E = a\left\{1+\frac{P(\Lambda-1)}{\overline{\Lambda}\left[1+\xi\frac{a(1-\nu)}{4h}\right]}\right\}^{\frac{1}{\Lambda-1}} - a\,. \tag{26}$$

Формула (26) справедлива для области ЛПО, где касательные напряжения ниже нормальных компонент тензора напряжений, т.е. во всем объеме ЛПО за исключением области верхнего торца ЛПО. Применение этой формулы обосновано только в том случае, если область верхнего торца ЛПО не является наиболее опасной с точки зрения предельных напряжений в неподкрепленном участке ЛПО.

Зарождение зоны пластических напряжений в ЛПО с ограниченной высотой заходки происходит в первую очередь на верхнем торце вблизи внутренней границы ЛПО, поскольку радиальные напряжения в этой области минимальны (из-за условия отсутствия нагрузки на границе $r = a$), а вертикальные максимальны и составляют величину около q. При этом в дальнейшем зарождение и развитие зоны пластических деформаций происходит в полном объеме ЛПО, включая также область нижнего торца ЛПО, и именно для нее будет раньше достигнуто условие предельного равновесия при распространении зоны пластических деформаций по всей толщине ЛПО. При этом в области вблизи верхнего торца и внешней границы ЛПО зона пластических деформаций не будет достигнута из-за особенностей задания граничных условий, которые фактически определяют поле напряжений: касательные напряжения окажутся малы, радиальные напряжения будут иметь значение около P, а вертикальные – около q. Если принять в расчет соотношение P и q, которое следует из классической формулы А.Н.Динника для давления бокового распора пород [38], а также некоторого заданного гидростатического давления со стороны подземных вод в поровом пространстве пород,

$$P = q\frac{\nu}{1-\nu} + P_h, \tag{27}$$

где ν – коэффициент Пуассона незамороженных пород, окружающих ЛПО; P_h – гидростатическое давление поровых вод, Па.

Если подставить уравнение (27) в качестве третьего главного напряжения в закон Мора – Кулона (23), то с учетом $\sigma_1 = q$ после преобразования получится неравенство

$$q \leq \frac{\overline{\Lambda} + \Lambda P_h}{\Lambda\frac{\nu}{1-\nu} - 1}. \tag{28}$$

Для рассматриваемых типов пород из таблицы и глубин их залегания неравенство (28) справедливо в широком диапазоне возможных значений $\nu \in [0{,}35;\ 0{,}5]$ даже при нулевом параметре P_h.

При больших значениях высоты заходки h формула (26) принимает вид классической формулы (1), поэтому важным является определение критического значения h, при котором дополнительное слагаемое (26) становится незначительным, т.е. для расчета толщины ЛПО с предположением о неограниченной высоте заходки можно использовать формулу (1).

В результате серии численных расчетов определены зависимости толщины ЛПО по формуле (26) от h для четырех различных типов пород, приведенных в таблице. Предполагается, что $\xi = 1$, $\nu = 0{,}35$, численно рассчитанные кривые $E(h)$ представлены на рис.7.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

© М.А.Семин, Л.Ю.Левин, 2024

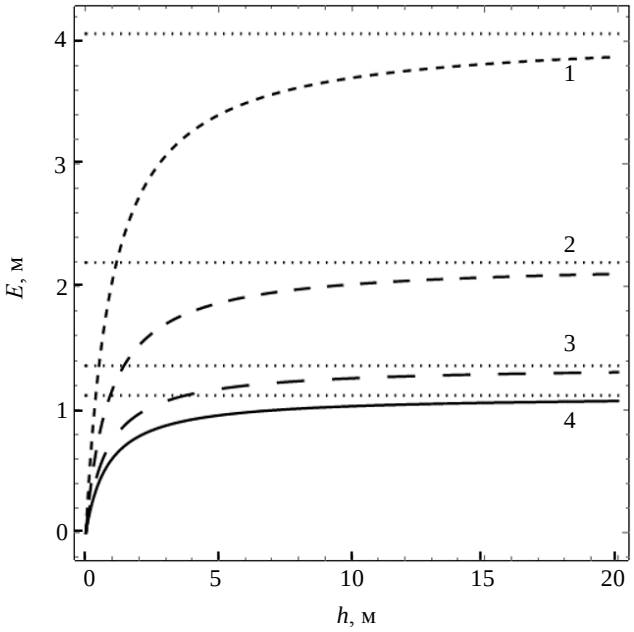

Рис.7. Зависимости толщины E от высоты заходки h для четырех рассматриваемых типов пород
1 – алеврит; 2 – супесь; 3 – мел; 4 – глина

На рис.7 точками обозначены горизонтальные асимптоты, которые получены в результате расчета толщины ЛПО по формуле (1), т.е. в ситуации, когда h неограниченно велико. Как видно из рис.7, уже при высоте заходки 9 м различия между формулами (1) и (26) составляют менее 10 %. При высоте заходки 4 м эти различия лежат в диапазоне от 16 до 20 %.

Схожий по методологии анализ был проведен в работе [8], где рассматривался случай определения u_a в выражении (22) не на основе решения упругой задачи (15), а исходя из предельно допустимых смещений внутренней стенки ЛПО, что привело к критическим значениям высоты заходки, в несколько раз превышающим результаты данного исследования. Таким образом, предложенный подход может рассматриваться как уточнение предыдущих исследований.

Особенность предложенной формулы (26) для расчета требуемой толщины ЛПО связана с тем, что при стремлении h к бесконечности толщина ЛПО в формуле (26) имеет асимптоту, в то время как в классических формулах С.С.Вялова для толщин ледопородного цилиндра по критериям предельных напряжений (3), а также предельных деформаций [20, 27] отсутствует такое асимптотическое поведение, а сама толщина стремится к бесконечности при $h \to +\infty$. Здесь нет противоречия, поскольку формула С.С.Вялова для толщины ЛПО по критерию предельных деформаций выводилась для малых высот заходки и не применима для случая больших высот заходки, что следует как из анализа, проведенного в статье [20], так и из допущений, использованных в работе [27] при выводе классической формулы. Существование асимптоты при стремлении h к бесконечности логично при использовании допущения о предельном равновесном состоянии конструкции и замороженных пород, как в данной работе. Этого не делалось при выводе формулы для расчета минимальной толщины ЛПО по критерию предельных деформаций в работе [27].

Представляет интерес рассмотрение другого предельного случая – когда h стремится к нулю. В условиях малых h предложенную формулу (26) можно представить в виде линейной функции от h. Для этого необходимо разложить формулу (26) в ряд Тейлора в окрестности $h = 0$ с сохранением членов до линейного включительно:

$$E \approx \frac{4Ph}{\overline{\Lambda}\xi(1-\nu)}. \tag{29}$$

Выражение (29) дает качественно одинаковую зависимость $E = f(P, h)$ от основных параметров задачи, однако имеется множество отличий в деталях. Если допустить, что формула (3) представит корректный прогноз по толщинам ЛПО при малых h, то при помощи уравнения (29) можно определить коэффициент ξ таким образом, чтобы выполнялось равенство толщин ЛПО, рассчитанных по формулам (29) и (3). В результате выводятся выражения:

$$\xi = \frac{8}{\sqrt{3}(1-\nu)}; \quad E = a\left\{1 + \frac{P(\Lambda-1)}{\overline{\Lambda}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a}{h}\right]}\right\}^{\frac{1}{\Lambda-1}} - a. \tag{30}$$

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

Полученная формула (30) для расчета толщины ЛПО выведена с учетом $\overline{\Lambda} = 2C\tan(\pi/4 + \varphi/2) = \sigma_{сж}$ [24]. Она хорошо согласуется с формулами (1) и (3) С.С.Вялова для обоих предельных случаев по высоте заходки. Помимо этого, преимуществом формулы (30) по сравнению с уравнением (26) является отсутствие дополнительных коэффициентов, характеризующих физико-механические свойства замороженных пород ν и характер пластических деформаций ξ. Коэффициент ξ в равенстве (30) имеет существенно более высокое значение, чем по результатам численных расчетов из таблицы.

Заключение. Основным результатом исследования является получение формулы расчета требуемой толщины ледопородного ограждения с учетом конечности высоты заходки и общепринятого критерия прочности Мора – Кулона для замороженных горных пород. Учет конечности высоты заходки особенно важен в условиях строительства шахтных стволов калийных рудников с применением искусственного замораживания и совмещенной технологической схемы проходки и крепления [39, 40].

Исходя из проведенных ранее исследований о влиянии напряженно-деформированного состояния окружающих пород и неравномерности поля температур на требуемую толщину ледопородного ограждения [13, 14, 28], формула может быть обобщена для учета этих факторов. Данная задача является предметом дальнейших исследований авторов.

Прочностной фактор замороженных пород, рассмотренный в статье, чаще всего является определяющим для относительно неглубоко залегающих слоев пород (до глубины 100-150 м). При этом для более глубоких слоев пород помимо условия прочности замороженных горных пород важно учитывать фактор ползучести и исследовать предельное деформированное состояние пород. Поэтому статический (геомеханический) расчет также должен включать в себя расчет толщины ледопородного цилиндра по критерию ползучести, например в соответствии с методикой и формулами, описанными в работе [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шуплик М.Н.* Анализ специальных способов строительства подземных сооружений в городских условиях // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2014. № S1. С. 523-546.

2. *Ehringhausen N., Schweppe G., te Kamp L., Akinshin I.* Numerical Simulation of Shaft Sinking Using the Artificial Freezing Method // Mining Report. 2021. Vol. 157. Iss. 4. P. 350-359.

3. *Барях А.А., Евсеев А.В.* Ликвидация калийных рудников и соляных шахт: обзор и анализ проблемы // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2019. № 9. С. 5-29. DOI: 10.25018/0236-1493-2019-09-0-5-29

4. *Ольховиков Ю.П.* Крепь капитальных выработок калийных и соляных рудников. М.: Недра, 1984. 238 с.

5. *Семин М.А., Бровка Г.П., Пугин А.В. и др.* Исследование влияния неоднородности поля температур на прочность ледопородных ограждений стволов шахт // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2021. № 9. С. 79-93. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_9_0_79

6. *Казикаев Д.М., Сергеев С.В.* Диагностика и мониторинг напряженного состояния крепи вертикальных стволов. М.: Горная книга, 2011. 244 с.

7. *Song Zhang, Zurun Yue, Xiangzhong Lu et al.* Model test and numerical simulation of foundation pit constructions using the combined artificial ground freezing method // Cold Regions Science and Technology. 2023. Vol. 205. № 103700. DOI: 10.1016/j.coldregions.2022.103700

8. *Семин М.А., Левин Л.Ю.* Методы расчета искусственного замораживания пород при строительстве шахтных стволов. М.: Научный мир, 2021. 152 с.

9. *Ковриженых А.М., Усольцева О.М., Ковриженых С.А. и др.* Исследование прочности анизотропных горных пород в условиях осевого сжатия с боковым давлением // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2017. № 5. С. 37-43. DOI: 10.15372/FTPRPI20170505

10. *Левин Л.Ю., Семин М.А., Плехов О.А.* Сравнительный анализ существующих методов расчета толщины ледопородного ограждения строящихся шахтных стволов // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. 2018. Т. 9. №. 4. С. 93-103. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.4.09

11. *Chenchen Hu, Zhijiang Yang, Tao Han, Weihao Yang.* Calculation Method of the Design Thickness of a Frozen Wall with Its Inner Edge Radially Incompletely Unloaded // Applied Sciences. 2023. Vol. 13. Iss. 23. № 12650. DOI: 10.3390/app132312650

12. *Sanger F.J., Sayles F.H.* Thermal and rheological computations for artificially frozen ground construction // Engineering Geology. 1979. Vol. 13. Iss. 1-4. P. 311-337. DOI: 10.1016/0013-7952(79)90040-1

13. *Yang Wei-hao, Du Zi-bo, Yang Zhi-jiang, Bo Dong-liang.* Plastic design theory of frozen soil wall based on interaction between frozen soil wall and surrounding rock // Chinese Journal of Geotechnical Engineering. 2013. Vol. 35. Iss. 10. P. 1857-1862.

14. *Bo Zhang, Weihao Yang, Baosheng Wang.* Plastic Design Theory of Frozen Wall Thickness in an Ultradeep Soil Layer Considering Large Deformation Characteristics // Mathematical Problems in Engineering. 2018. Vol. 2018. № 8513413. DOI: 10.1155/2018/8513413

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

15. *Akhtar S., Li B.* Numerical Analysis of Pipeline Uplift Resistance in Frozen Clay Soil Considering Hybrid Tensile-Shear Yield Behaviors // International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering. 2020. Vol. 6. Iss. 4. № 47. DOI: 10.1007/s40891-020-00228-9

16. *Xingyan Liu, Enlong Liu.* Application of new twin-shear unified strength criterion to frozen soil // Cold Regions Science and Technology. 2019. Vol. 167. № 102857. DOI: 10.1016/j.coldregions.2019.102857

17. *Jilin Qi, Wei Ma.* A new criterion for strength of frozen sand under quick triaxial compression considering effect of confining pressure // Acta Geotechnica. 2007. Vol. 2. Iss. 3. P. 221-226. DOI: 10.1007/s11440-007-0034-z

18. *Pouragha M., Jebeli M., Glade R.* Failure of partially saturated frozen soils: A micromechanical analysis // Cold Regions Science and Technology. 2023. Vol. 210. № 103842. DOI: 10.1016/j.coldregions.2023.103842

19. *Dongwei Li, Xin Yang, Junhao Chen.* A study of Triaxial creep test and yield criterion of artificial frozen soil under unloading stress paths // Cold Regions Science and Technology. 2017. Vol. 141. P. 163-170.

20. *Kostina A., Zhelnin M., Plekhov O. et al.* An Applicability of Vyalov's equations to ice wall strength estimation // Frattura ed Integrità Strutturale. 2020. Vol. 14 (53). P. 394-405. DOI: 10.3221/igf-esis.53.30

21. *Feng Hou, Yuanming Lai, Enlong Liu et al.* A creep constitutive model for frozen soils with different contents of coarse grains // Cold Regions Science and Technology. 2018. Vol. 145. P. 119-126. DOI: 10.1016/j.coldregions.2017.10.013

22. *Li Dong-Wei, Fan Ju-Hong, Wang Ren-He.* Research on visco-elastic-plastic creep model of artificially frozen soil under high confining pressures // Cold Regions Science and Technology. 2011. Vol. 65. Iss. 2. P. 219-225. DOI: 10.1016/j.coldregions.2010.08.006

23. *Nishimura S., Gens A., Oliverlla S., Jardine R.J.* THM-coupled finite element analysis of frozen soil: formulation and application // Géotechnique. 2009. Vol. 59. Iss. 3. P. 159-171. DOI: 10.1680/geot.2009.59.3.159

24. *Kostina A., Zhelnin M., Plekhov O. et al.* Creep behavior of ice-soil retaining structure during shaft sinking // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 13. P. 1273-1278. DOI: 10.1016/j.prostr.2018.12.260

25. *Vyalov S.S., Zaretsky Yu.K., Gorodetsky S.E.* Stability of Mine Workings in Frozen Soils // Developments in Geotechnical Engineering. 1979. Vol. 26. P. 339-351. DOI: 10.1016/B978-0-444-41782-4.50031-2

26. *Zhelnin M., Kostina A., Plekhov O. et al.* Numerical analysis of application limits of Vyalov's formula for an ice-soil wall thickness // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. Vol. 13 (49). P. 156-166. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.17

27. *Вялов С.С.* Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. 254 с.

28. *Semin M.* Calculation of frozen wall thickness considering the non-uniform distribution of the strength properties // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 32. P. 180-186. DOI: 10.1016/j.prostr.2021.09.026

29. *Bekele Y.W., Kyokawa H., Kvarving A.M. et al.* Isogeometric analysis of THM coupled processes in ground freezing // Computers and Geotechnics. 2017. Vol. 88. P. 129-145. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.02.020

30. *Tounsi H., Rouabhi A., Jahangir E.* Thermo-hydro-mechanical modeling of artificial ground freezing taking into account the salinity of the saturating fluid // Computers and Geotechnics. 2020. Vol. 119. № 103382. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.103382

31. *Vallier F., Mitani Y., Boulon M. et al.* A Shear Model Accounting Scale Effect in Rock Joints Behavior // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2010. Vol. 43. Iss. 5. P. 581-595. DOI: 10.1007/s00603-009-0074-9

32. *Huabei Liu.* Unified sand modeling using associated or non-associated flow rule // Mechanics Research Communications. 2013. Vol. 50. P. 63-70. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.04.003

33. *Shi Z., Buscarnera G., Finno R.J.* Simulation of cyclic strength degradation of natural clays via bounding surface model with hybrid flow rule // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2018. Vol. 42. Iss. 14. P. 1719-1740. DOI: 10.1002/nag.2813

34. *Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б.* Моделирование деформирования и разрушения анизотропных пород вблизи горизонтальной скважины // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2017. № 3. С. 12-21.

35. *Безматерных А.В., Офрихтер В.Г.* Явление дилатансии и его влияние на характер деформирования грунтов под нагрузкой // Master's Journal. 2017. № 2. С. 85-90.

36. *Junchen Zhou, Keyong Wang, Peichao Li.* Hybrid fundamental solution based finite element method for axisymmetric potential problems with arbitrary boundary conditions // Computers & Structures. 2019. Vol. 212. P. 72-85. DOI: 10.1016/j.compstruc.2018.10.012

37. *Насонов И.Д., Шуплик М.Н.* Закономерности формирования ледопородных ограждений при сооружении стволов шахт. М.: Недра, 1976. 237 с.

38. *Оловянный А.Г.* Боковой распор в массиве горных пород // Записки Горного института. 2010. Т. 185. С. 141-147.

39. *Мишедченко А.А.* О необходимости применения инновационной конструкции чугунной крепи при строительстве вертикальных шахтных стволов глубиной более 500 м // Маркшейдерия и недропользование. 2017. № 4 (90). С. 37-39.

40. *Semin M., Golovatyi I., Levin L., Pugin A.* Enhancing efficiency in the control of artificial ground freezing for shaft construction: A case study of the Darasinsky potash mine // Cleaner Engineering and Technology. 2024. Vol. 18. № 100710. DOI: 10.1016/j.clet.2023.100710

***Авторы*: М.А.Семин,** *д-р техн. наук, заведующий лабораторией, seminma@inbox.ru, https://orcid.org/ 0000-0001-5200-7931* (*Горный институт УрО РАН, Пермь, Россия*), **Л.Ю.Левин,** *д-р техн. наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом, https://orcid.org/0000-0003-0767-9207* (*Горный институт УрО РАН, Пермь, Россия*).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0