Записки Ленинградского горного института, т. X, вып. 3, 1937
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad, vol. X. livr. 3, 1937

Об инерционных грохотах

Über die Trägheitssieb

Доц. Н. Р. Малкин
Von Doz. *N. R. Malkin*

А. О ПРОСТЕЙШИХ КОЛЕБАНИЯХ РАМЫ ИНЕРЦИОННОГО ГРОХОТА

Инерционный грохот представляет собой решето, наклоненное над углом α (от 5 до 40°) к горизонту и поддерживаемое несколькими (обычно четырьмя) сильными пружинами, перпендикулярными к раме грохота. От жесткости k этих пружин и от веса G всего грохота зависит период T_c собственных колебаний его, равный, как известно из механики,

$$T_c = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\frac{g}{g}}{k}} = \sim\sqrt{\frac{g}{k}} \qquad (1)$$

где $g = 9{,}81$ *м/сек*, m есть масса грохота, а делитель 4 под корнем отвечает тому случаю, когда число пружин равно четырем.

На раме грохота расположен быстро вращающийся ($n = 1500 \div 3000$ *об/мин*) приводной вал с невыбалансированным шкивом; центробежные силы инерции шкива вызывают в грохоте весьма быстрые вынужденные колебания, вследствие которых порода подбрасывается в воздух и с силой просеивается через сито. Подача материала вдоль грохота достигается наклоном его (угол α).

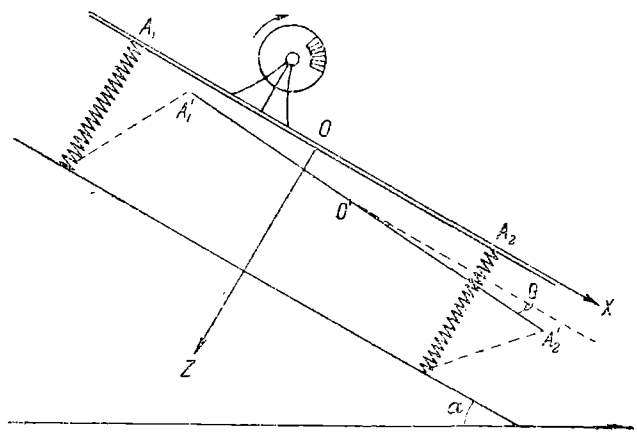


Рис. 1.

Приведенные сведения заимствованы из подробного описания грохотов, данного в книге Л. Б. Левенсона[1].

Как указывает автор, направление пружин и вызываемых ими вибраций обычно бывает перпендикулярно к раме A_1A_2 грохота (рис. 1).

[1] „Машины для обогащения", гл. V.

Для исследования движения рамы грохота примем за начало прямоугольных координат центр тяжести рамы в том ее положении, которое отвечает нормальному положению пружин (т. е. при отсутствии всякой нагрузки на них). Ось OX направим по линии наибольшего ската рамы, ось OZ перпендикулярно к ней в сторону земли. Рассматривая раму как тело, имеющее три степени свободы, будем определять положение ее координатами x и z центра тяжести ее O и углом наклона ее θ относительно невозмущенного положения.

Обозначим через $l_1 = A_1O = A_1'O'$ расстояние от центра тяжести рамы до места прикрепления первой пружины, через k_1 — жесткость этой пружины на сжатие параллельно оси OZ и через k_1' — жесткость ее на изгиб по направлению OX.

Соответственные величины для второй пружины обозначим через l_2, k_2 и k_2' и положим $l_1 + l_2 = l$, а также обозначим через l_3 расстояние между валом и центром тяжести O (см. рис. 2).

Движение рамы грохота будет определяться тремя уравнениями Лагранжа во второй форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial v}{\partial q_i} + Q_i, \tag{2}$$

где q_i обозначает одну из трех обобщенных координат x, z и θ; T есть кинетическая энергия; V — потенциальная энергия сил, имеющих потенциал, и Q_i — обобщенная сила, не имеющая потенциала:

$$Q_i = \sum_j \left(X_j \frac{\partial x_j}{\partial qi} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial qi} + Z \frac{\partial z_j}{\partial qi} \right) \tag{3}$$

Обозначим через G_0 и M_0 вес и массу инерционного груза и через G и M вес и массу остальных частей грохота. Кинетическая энергия этих последних частей будет равна

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 . \tag{4}$$

где z и x обозначают прямоугольные координаты нового положения O' центра тяжести грохота, J есть момент инерции грохота относительно оси, проходящей через центр тяжести его параллельно оси Oy, и θ — угол наклона грохота, отсчитываемый от его нормального направления (т. е. направления α).

Потенциальная энергия пружин, отвечающая значениям z, x, θ обобщенных координат, будет:

$$V_1 = \frac{k_1}{2} \left(z - l_1 \theta \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left(z + l_2 \theta \right)^2 + \frac{k'}{2} x^2 + \text{const}, \tag{5}$$

где k_1 и k_2 — жесткости обеих пружин в направлении z и k' есть сумма жесткостей их в перпендикулярном направлении.

Потенциальная энергия силы тяжести, действующей на грохот, будет

$$V_2 = \text{const} - G\zeta = \text{const}\ G(z \cos\alpha + x \sin\alpha) \tag{5'}$$

(где отсчитывается по вертикали).

Складывая эти выражения, находим:

$$V = \frac{k_1}{2} \left(z - l_1 \theta \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left(z + l_2 \theta \right)^2 + \frac{k'}{2} x^2 - G \cos\alpha\, z - G \sin\alpha\, x. \tag{6}$$

Чтобы составить уравнение (2) Лагранжа, нужно найти еще обобщенные силы Q, обусловленные воздействием инерционного груза G_0 на грохот. Уравнение движения инерционного груза можно записать в виде:

$$F = M_0 w = M_0(w_r + w_l + w_k),$$

где w_r, w_l и w_k обозначают соответственно: относительное, переносное (вместе с грохотом) и кориолисово ускорения. Заменив еще F на $F_1 + G_0$, где через F_1 обозначены силы, могущие действовать на инерционный груз лишь со стороны грохота (если положим, что электромотор укреплен на самом грохоте), получим для обратной силы воздействия груза на грохот величину

$$-F_1 = G_0 - M_0 w_r - M_0 (w_l + w_k), \tag{7}$$

причем $M_0 w_r$ будет просто центробежная сила инерции, равная $P_0 = M_0 r w^2$, где w — угловая скорость вращения вала электромотора. Последним членом формулы (7) можно в первом приближении пренебречь, так как размах переносного движения на практике очень мал по сравнению с движением относительным. Член G_0 из (7) может быть отнесен к силам, имеющим потенциал.

Обозначая через $-l_3$ и $-h$ относительные координаты вала C (рис. 2), получим для абсолютных координат его z_1 и x_1 значения:

$$z_1 = z - l_3 \sin\theta - h\cos\theta;$$
$$x_1 = x - l_3\cos\theta + h\sin\theta.$$

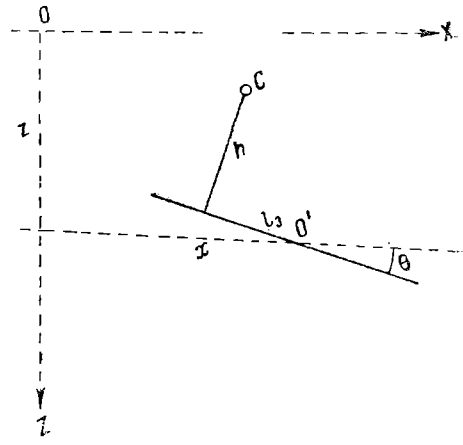


Рис. 2.

Далее составляющие центробежной силы P_0 будут:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= P_0\cos\omega t \\ X_1 &= P_0\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и, следовательно, обобщенные силы будут:

$$\left.\begin{aligned} Q_z &= Z_1\frac{\partial z_1}{\partial z} = P_0\cos\omega t, \\ Q_x &= X_1\frac{\partial x_1}{\partial x} = P_0\sin\omega t, \\ Q_\theta &= Z_1\frac{\partial z_1}{\partial\theta} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial\theta} = P_0\,[\cos\omega t\,(h\sin\theta - l_3\cos\theta) + \sin\omega t\,(h\cos\theta + \\ &\quad + l_3\sin\theta)] = P_0[h\sin(\omega t+\theta) - l_3\cos(\omega t+\theta)] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исходя из (4), (6) и (9), можно написать теперь уравнения (2) Лагранжа в виде:

$$\left.\begin{aligned} Mz &= -k_1(z - l_1\theta) - k_2(z + l_2\theta) + (G+G_0)\cos\alpha + P_0\cos\omega t + \Delta_1 \\ M\ddot{x} &= -k'x + P_0\sin\omega t + \Delta_2 + G\sin\alpha; \\ J\ddot{\theta} &= k_1 l_1(z - l_1\theta) - k_2 l_2(z + l_2\theta) + P_0[h\sin(\omega t+\theta) - l_3\cos(\omega t+\theta)] + \Delta_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где Δ_1, Δ_2 и Δ_3 обозначают опущенные члены.

Из этой системы видно, что при условии

$$k_1 l_1 = k_2 l_2, \tag{11}$$

первое уравнение не зависит от θ, а последнее от z, т. е. система распадается на три отдельные уравнения, причем при малом θ в правой части последнего уравнения мы можем заменить $\cos\theta$ на 1 и $\sin\theta$ на θ, т. е.

$$J\ddot{\theta} = -(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta + P_0[h\sin\omega t + h\theta\cos\omega t - l_3\cos\omega t \quad l_3\theta\sin\omega t];$$

полагая еще

$$l_3 = 0, \quad h = 0,^1 \tag{11a}$$

видим из последнего уравнения, что при соблюдении условий (11) и (11a) θ должно быть очень мало, что оправдывает до некоторой степени пренебрежение членами Δ_1, Δ_2 и Δ_3, зависящими от переносного движения.

Условия (11) и (11a) сводятся к тому, что вал должен быть расположен как раз над центром тяжести грохота и что, соответственно несколько большей загрузке левой (верхней) части грохота, правая пружина должна быть несколько мягче левой или же быть расположеноой не у самого края (чтобы при $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$, рис. 3).

Ослабив, таким образом, колебания по θ, которые, надо думать, являются вредными, ибо они должны то очень ускорять движение породы, то останавливать его, можем, как известно из теории вынужденных колебаний, удачным выбором коэфициентов k_1, k_2, k', l_1k_1 и l_2k_2 добиться, чтобы любое из колебаний по z, x или по θ либо усилилось благодаря резонансу, либо, наоборот, ослабилось в произвольное число раз (коэфициент динамичности).

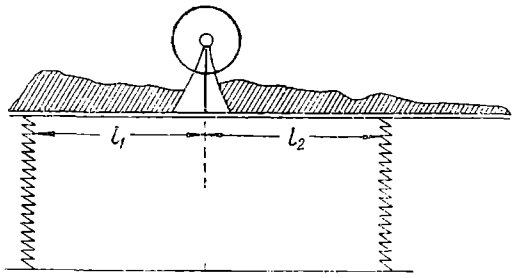


Рис. 3.

Таким образом, если выделить колебания по x, то получится своего рода наклонный, очень быстро качающийся грохот. Выделяя колебания и по x и по z, можем добиться круговых качаний грохота, но обычно, как указывает проф. Левенсон, стремятся достичь нормальных к раме колебаний. Будем поэтому считать, что k_1 и k_2 подобраны в резонанс, k' мало и потому амплитуда колебаний вдоль OX очень мала, а lk велико, что также уменьшает амплитуду колебаний, ибо, как известно (и как это будет показано ниже), в этом случае статический прогиб будет очень мал.

Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к формуле:

$$C = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \tag{19}$$

определяющей амплитуду вынужденных колебаний (см. ниже стр. 9), где $p^2 = \frac{k_1 + k_2}{M}$ и где n очень мало по сравнению с ω ($\omega \approx 209\,\frac{1}{сек}$ и $\frac{n}{p}$, вероятно, порядка 0,1).

[1] h, очевидно, всегда можно сделать малым, однако добиваться, чтобы оно было точно равно нулю в пределах упрощенной конструкции, рассматриваемой в настоящей работе, вряд ли удобно: ось шкива совпадала бы при этом с плоскостью рамы грохота и затрудняла бы движение породы. Как будет показано в следующей работе („О колебаниях рамы инерционного грохота"), разбирающей движение грохота в общем случае, полного уничтожения колебаний по углу θ можно добиться либо при помощи двух симметрично расположенных на одном и том же вале шкивов, либо при помощи двух инерционных грузов с разностью фаз, расположенных на отдельных валах.

Считая ω заданным, видим, что, действительно, C достигает резкого максимума при $p = \omega$; в этом случае под знаком радикала стоит просто $4n^2\omega^2$ (случай резонанса).

Если же p^2 не равен в точности ω^2, то в знаменатель войдет еще несравненно больший член порядка ω^4. Положим, например, $\frac{2n}{p} = 0{,}2$ и $p = \frac{1}{4}\omega$ (т. е. k — мало); тогда

$$2n = \frac{1}{20}\omega,$$

т.

$$4n^2\omega^2 = \frac{1}{400}\omega^4,$$

и, с другой стороны,

$$(p^2 - \omega^2)^2 = \left(\frac{15}{16}\omega^2\right)^2 = 0{,}88\,\omega^4,$$

и весь знаменатель имеет порядок $\sqrt{0{,}9\,\omega^4} = 0{,}94\,\omega^2$. При резонансе же ($p = \omega$), даже предполагая, что n выросло пропорционально p, т. е. $2n = 0{,}2p = 0{,}2\,\omega$, получим знаменатель, равный $\sqrt{(0{,}2\,\omega^2)^2} = 0{,}2\,\omega^2$, т. е. в пять почти раз меньший, и амплитуда C будет во столько же раз больше.

При сделанных предположениях достаточно заняться изучением первого из уравнений (10), введя в него еще член с z, отвечающий затуханию:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \frac{k_1 + k_2}{M} z = \frac{(G + G_0)\cos\alpha}{M} + \frac{M_0 z\,\omega^2}{M}\cos\omega t.$$

В этом случае ($\dot{\theta} = 0$) кориолисова сила вовсе отсутствует, переносное ускорение же дало бы член $M_0\ddot{z}$ в левой части, что отвечает замене M на почти неотличную от нее величину $M + m_0$.

Полагая

$$\frac{k_1 + k_2}{M} = p^2, \tag{12}$$

получим окончательно:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + p^2 z = \frac{P_0}{M}\cos\omega t + g\cos\alpha. \tag{13}$$

Решением этого уравнения является, как известно, формула

$$z = \frac{g\cos\alpha}{p^2} + e^{-nt}(A\cos\sqrt{p^2 - n^2}\,t + B\sin\sqrt{p^2 - n^2}\,t) + \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta), \tag{14}$$

где

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}$$

и n — величина, вообще весьма малая по сравнению с p и ω.

В этой формуле при сколько-нибудь большом t первым членом (собственные колебания) можно пренебречь, и тогда получится

$$z_0 = z - \frac{g\cos\alpha}{p^2} = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}\sin(\omega t-\delta), \tag{14a}$$

где, согласно (12), $\frac{g\cos\alpha}{p^2} = \frac{G\cos\alpha}{k_1+k_2}$ равно, очевидно, сжатию пружин при покое ($\omega=0$), что видно из (14) и (12) и, следовательно, $z_0 = z - \frac{g\cos\alpha}{p^2}$ обозначает как раз расстояние от равновесного положения.

При $\omega = p$ (резонанс) z_0 близко к максимуму:

$$z_0 = \frac{P_0}{2n\omega M}\sin(\omega t-\delta). \tag{15}$$

Амплитуда колебаний

$$\frac{P_0}{2npM} = \delta_r \tag{16}$$

при малом затухании n может быть весьма велика.

Обозначим для сравнения через δ_{st} добавочное перемещение, которое возникло бы при статическом приложении возмущающей силы P_0.

Очевидно,

$$\delta_{st} = \frac{P_0}{k_1+k_2}$$

или, в силу (12),

$$\delta_{st} = \frac{P_0}{Mp^2}. \tag{17}$$

То же самое получится и из (14a), если положить P_0 постоянным, а $\omega=0$. Сравнивая (16) с (17), видим, что

$$\delta_r = \delta_{st}\frac{p}{2n} = \delta_{st}\frac{1}{\gamma}, \tag{18}$$

где $\frac{1}{\gamma} = \beta_1$ есть величина весьма большая.

Обозначая, далее, через C амплитуду вынужденных колебаний

$$C = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}, \tag{19}$$

можем, в силу (17), переписать это выражение в виде:

$$C = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+4\frac{\omega^2n^2}{p^4}}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\gamma^2\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}} = \beta\,\delta_{st}, \tag{20}$$

причем

$$\beta = \beta_{\frac{\omega}{p}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\frac{\omega^2}{p^2}\right]^2+\gamma^2\frac{\omega^2}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{T_c^2}{T^2}\right)^2+\gamma^2\frac{T_c^2}{T^2}}}$$

(где T_c есть период собственных колебаний системы, а T — период возмущающей силы) называется коэфициентом динамичности (коэфициент нарастания колебаний). [1]

Коэфициент этот, в противоположность $\beta_1 = \frac{1}{\gamma}$, очень мал при больших значениях $\frac{\omega}{p}$

Например,

$$\text{при } \frac{\omega}{p} = 2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4\gamma^2}} < \frac{1}{3};$$

$$\text{при } \frac{\omega}{p} = 3$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{8^2 + 9\gamma^2}} < \frac{1}{8} \text{ и т. д.,}$$

в то время как при $\frac{\omega}{p} = 1$

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma},$$

каковая величина, надо думать, будет не менее 2 или 4, ибо на графиках, отвечающих различным значениям γ, приводятся лишь значения этой величины, меньшие 0,50 или 0,25.

В этом отношении проф. Левенсон допускает неточность, он считает, что как при резонансе, так и при отсутствии его амплитуда колебаний равна δ_{st}, как это видно из формулы (633) и из примеров 22 и 23 на стр. 305—308 его труда.

В последнем примере

$$T = 0{,}033 \text{ и } T_c = \sqrt{\frac{G}{k}} = \sqrt{\frac{160}{20000}} \approx 0{,}09,$$

т. е.

$$\frac{\omega}{p} = \frac{T_c}{T} = 2{,}7,$$

откуда

$$\beta_{2,7} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 7{,}2)^2 + \gamma^2 7{,}2}} < \frac{1}{6}$$

В то же время в предыдущем примере 22 $T = T_c$, и потому β_1, вероятно, больше, а может быть и гораздо больше 2.

Амплитуда при резонансе будет, следовательно, в десятки раз более, чем при отсутствии его. Проф. Левенсон считает их равными и приходит поэтому к выводу, что резонанс невыгоден и что следует строить машины без соблюдения его: „как с точки зрения долговечности пружин, так и с точки зрения экономии энергии выгоднее отказаться от резонанса".

Разница в расходе энергии у него получается вследствие меньшего, по его расчету, давления инерционного груза на ось вала при отсутствии резонанса, если считать $G_0 = 8$ *кг* при резонансе и $G_0 = 1{,}11$ *кг* при отсутствии

[1] Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, стр. 35; Лойцянский и Лурье, Теоретическая механика, ч. III, стр. 349.
Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, стр. 34; Лойцянский и Лурье, Теоретическая механика, ч. III, стр. 353.

его. Однако в последнем случае для достижения той же амплитуды эту цифру придется увеличить в десятки раз, и расход энергии окажется гораздо больше, чем при резонансе. Что же касается непрочности жестких пружин, то, возможно, несколько более мягких пружин могут до некоторой степени заменить одну более жесткую пружину.

Таким образом грохот Шиферштейна, настроенный на резонанс, является вполне рациональным. Наоборот, амплитуда вибраций вдоль OX может быть уменьшена уменьшением k', как указывалось выше. Для этой цели можно употребить также достаточно мягкие боковые пружины, параллельные OX.

Можно заметить также, что для наиболее эффективной работы грохота, помимо указанного резонанса, желателен еще другой резонанс, именно резонанс между колебаниями грохота и взлетом и опусканием частиц.

Частица должна слетать с подымающегося грохота в момент, когда скорость движения его близка к максимальной, а при опускании своем частица должна ударяться во вновь подымающийся грохот в той же фазе его: периоды движения частицы и грохота должны совпадать.

A. Zusammenfassung

Von der Betrachtung des schwingenden Trägheitssiebes als einem System mit drei Freiheitsstufen, ausgehend, wird ein System von Differentialgleichungen Lagrange's gebildet und die kleinen Glieder die von dem übertragbaren und Coriolis-Beschleunigung des Träghetsgewichts abhängen weggelassen.

Die Einrichtung des Siebes bei welcher die erhaltenen Gleichungen unabhängig werden und die Drehschwingungen fast verschwinden wird beschrieben.

Um die Schwingungen des Siebes perpendikulär zu seiner Ebene zu erstärken soll das System in Resonanz mit diesen Schwingungen gestimmt werden.

Die Begutachtung des Prof. Levensohn, die Resonanz sei unvorteilhaft beruht auf einer ungenauen Analyse, weil er den dynamischen Koeffizienten der Gleichung der erzwungenen Schwingungen aus der Sicht lässt, obgleich gerade zu dieser Gleichung das obenerwähnte System von Gleichungen kommt.

B. О ДВИЖЕНИИ НЕУПРУГОЙ ПОРОДЫ ПО НОРМАЛЬНО КОЛЕБЛЮЩЕМУСЯ ИНЕРЦИОННОМУ ГРОХОТУ

В первой части этой статьи („О простейших колебаниях рамы инерционного грохота") были рассмотрены условия, при которых можно считать, что грохот колеблется перпендикулярно к плоскости его сита. Считая устройство грохота известным, расположим координатные оси так же, как это было сделано в начале упомянутой статьи: примем за начало прямоугольных координат центр тяжести рамы, находящейся в нормальном положении (положение равновесия). Ось OX направим по линии наибольшего ската рамы, ось OZ перпендикулярно к ней, в сторону земли. При рассматриваемых колебаниях, когда рама грохота движется как одно целое вдоль оси OZ, положение рамы вполне определяется z—координатой центра тяжести ее; [1] в дальнейшем будем обозначать ее через ζ. Координаты же движущейся частицы обозначим через x и z.

Для наиболее эффективной работы грохота должен, очевидно, существовать своего рода резонанс между колебаниями грохота и движением частицы: последняя должна слетать с подымающегося грохота в момент, когда скорость движения его близка к максимальной, а при опускании своем частица должна ударяться о вновь подымающийся грохот в той же фазе его: периоды движения частицы и грохота должны совпадать.

[1] То есть движение грохота будет обладать одной степенью свободы.

Я ограничусь здесь рассмотрением движения неупругой частицы: после удара о грохот частица будет оставаться на нем, пока отрицательное ускорение его не превзойдет ускорения силы тяжести; с этого момента частица отрывается от него и движется по параболической траектории до нового столкновения.

Диференциальные уравнения свободного движения частицы при прежнем направлении осей будут:

$$\left.\begin{aligned} z &= g\cos\alpha \\ x &= g\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Движение же грохота будет определяться уравнением

$$\zeta = -C\sin(\omega t - \delta). \tag{22}$$

Считая, что в момент отрыва $t=0$, и обозначая через z_0, x_0, ζ_0 составляющие скоростей в этот момент, можем, очевидно, написать:

$$z_0 = \zeta_0 = -C\omega\cos\delta,$$

$$x_0 = 0,$$

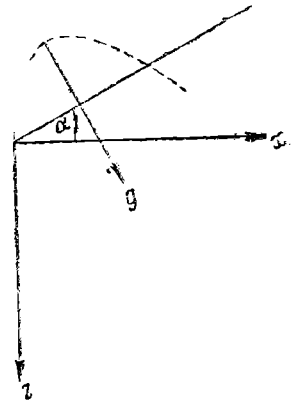


Рис. 4.

т. е.

$$z = -C\omega\cos\delta + g\cos\alpha \quad t;$$

$$x = g\sin\alpha \quad t$$

$$z = z_0 - C\omega\cos\delta \quad t + \frac{1}{2}g\cos\alpha \quad t^2; \tag{23}$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}g\sin\alpha \quad t^2. \tag{24}$$

Эти уравнения описывают обычное параболическое движение в повернутой на угол α системе координат (рис. 4). Поступая как и в случае обычных формул параболического движения, отыскиваем минимум z из условия:

$$z = -C\omega\cos\delta + g\cos\alpha\, t = 0.$$

Обозначая для сокращения

$$C\omega\cos\delta = c_1,$$

получаем отсюда момент минимума

$$t_1 = \frac{c_1}{g\cos\alpha} = \frac{C\omega\cos\delta}{g\cos\alpha},$$

чему отвечает минимальное значение

$$z_1 = z_0 - c_1 t_1 + \frac{1}{2}g\cos\alpha \quad t_1^2 = z_0 - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g\cos\alpha}.$$

Как видно из (23),

$$z = z_0$$

при

$$t_0 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 = 2\frac{c_1}{g\cos\alpha}.$$

В этот момент, согласно (24)

$$x_2 - x_0 = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_2^2 = 2\frac{\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}c_1^2.$$

Окончательно получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= c\,\omega\cos\delta;\\ t_1 &= \frac{c_1}{g\cos\alpha} = \frac{1}{2}t_2\\ z_1 &= z_0 - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{g\cos\alpha}\\ x_1 - x_0 &= \frac{1}{4}(x_2 - x_0)\\ t_2 &= 2\frac{c_1}{g\cos\alpha}\\ z_2 &= z_0\\ x_2 - x_0 &= 2\frac{\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}c_1^2, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

где t_2 есть продолжительность свободного полета частицы; $x_2 - x_0$ — дальность его и z_1 — минимальное значение z.

Скорость частицы характеризуется величинами

$$z_2 = c_1$$

и

$$x_{cp} = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}g\sin\alpha \quad t_2 = c_1\operatorname{tg}\alpha,$$

где $\dot{x}_{cp}$ есть средняя скорость движения частицы вдоль оси x за время свободного полета. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= c_1.\\ x_{cp} &= \frac{1}{2}x_2 = c_1\operatorname{tg}\alpha\\ x_2 - x_0 &= t_2\dot{x}_{cp}. \end{aligned}\right\} \qquad (25a)$$

Таким образом на прежний уровень частица вернется через промежуток времени, равный

$$t_2 - t_0 = 2\frac{c_1}{g\cos\alpha} = 2\frac{C\,\omega\cos\delta}{g\cos\alpha},$$

и этой же величине, по нашему условию, должен быть равен период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

грохота. Приравнивая эти две величины, получаем:

$$2\frac{C\,\omega\cos\delta}{g\cos\alpha} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (26)$$

С другой стороны, уравнение, определяющее движение частицы, пока она лежит на грохоте, будет:

$$m\ddot{z}_1 = mg\cos\alpha + N,$$

где N обозначает давление грохота; в момент схода частицы

$$N = 0$$

$$z = \zeta,$$

е.

$$\ddot{\zeta} = g\cos\alpha$$

или, принимая во внимание (22):

$$C\omega^2 \sin\delta = g\cos\alpha. \tag{27}$$

Из двух уравнений — (26) и (27) — можно определить две величины — $c\omega^2$ и δ, — т. е., зная наклон грохота α, можно определить необходимую интенсивность его колебаний $c\omega^2$ и фазу слета δ:

$$\left.\begin{aligned} C\omega^2 &= g\cos\alpha\sqrt{1+\pi^2} = \sqrt{10{,}86}\, g\cos\alpha \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C\omega^2 &= 3{,}3\, g\cos\alpha \\ \delta &= 18^\circ \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Иными словами, $c\omega^2$ должно быть в 3,3 раза больше той величины, при которой вообще возможен отрыв частицы от грохота [при $C\omega^2 = g\cos\alpha$, как видно из (27), срыв произойдет в момент максимального ускорения при $\delta = \frac{\pi}{2}$].

Фаза же схода при нашем двойном резонансе не зависит от угла наклона грохота α.

Взяв $\alpha = 30^\circ$, получим:

$$C\omega^2 = 28. \tag{30}$$

Или, полагая $C = 0{,}001$ *м*, как в грохоте „Резонанс" Шиферштейна, имеем:

$$\omega = 167 \text{ } рад/сек$$

или

$$m = 1600 \text{ } об/мин.$$

При этих условиях должен быть полный резонанс и движение неупругой частицы должно носить строго периодический характер.

В действительности [1] грохот Шиферштейна имеет 1800 *об/мин*, и

$$C\omega^2 = 35{,}5.$$

Следовательно, грохот этот близок к удовлетворению условию двойного резонанса, но все же вращается слишком быстро. Для точного расчета грохота нужно знать значение коэфициента затухания n, так как, согласно формуле (15), при резонансе

$$C = \frac{P_0}{2Mn\omega}, \qquad C\omega^2 = \frac{P_0\omega}{2Mn}.$$

Из последней формулы и из (29) получим:

$$P_0 = \frac{6{,}6\, Mn\, g\cos\alpha}{\omega}, \tag{31}$$

где P_0 есть сила инерции инерционного груза.

[1] Левенсон, цит. место, стр. 305.

Таким образом, считая известными общую массу грохота M, угол его наклона α и коэфициент затухания n, достаточно из трех величин C, P_0 задать произвольно одну какую-нибудь, чтобы определить две другие. [1]

Не производя этого расчета, так как n неизвестно, посмотрим, как будет происходить движение частицы породы при полном резонансе ($C = 0{,}001$ *м*, $m = 1600$ *об/мин*) и для случая грохота Шиферштейна ($C = 0{,}001$ *м*, $m = 1800$ *об/мин*), а также для третьего гипотетического случая, когда скорость вращения будет меньше скорости полного резонанса (т. е. $m < 1600$ *об/мин*).

Для рассматриваемого случая ($m = 1600$ *об/мин*)

$$\alpha = 30^\circ;\ \omega = 167 = 53\pi;\ C = 0{,}1\ см,\ \delta = 18^\circ.$$

$$z_0 = C \sin 18^\circ = 0{,}0309,$$

и, следовательно,

$$c_1 = C\omega \cos\delta = 0{,}1 \quad 167 \cos 18^\circ = 16{,}2\ см/сек;$$

$$t_2 = \frac{2C_1}{g\cos\alpha} = \frac{2 \quad 16{,}2}{981 \cdot 0{,}867} = 0{,}038\ сек;\ t_1 = 0{,}019\ сек;$$

$$z_1 = z_0 - \frac{c_1^2}{2g\cos\alpha} - 0{,}031 = \frac{(16{,}2)^2}{981 \quad 0{,}867} = 0{,}031 - 0{,}154 = -0{,}123\ см;$$

$$x_{ср} = \frac{1}{2}\dot{x}_2 = c_1 \operatorname{tg}\alpha = 16{,}2 \quad 0{,}577 = 9{,}3\ см/сек;$$

$$x_2 - x_0 = t_2 x_{ср} = 0{,}038 \quad 9{,}3 = 0{,}35\ см.$$

Предположим, что размеры грохота 100 *см* $\times$ 200 *см* и что он покрыт слоем породы толщиной 2 *см* и плотности $2^1/_2$. В таком случае одиновременная нагрузка грохота равна:

$$100 \times 200 \times 2 \times 2{,}5\ г = 10^5\ г = 100\ кг = 0{,}1\ т.$$

Двигаясь со средней скоростью 9,3 *см/сек* каждая, частица пройдет свой двухметровый путь в $\frac{200}{9{,}3} = 21{,}5$ *сек*, за каковой промежуток времени через грохот пройдет вся его единовременная нагрузка в 0,1 $т$; за час же пройдет

$$\frac{1}{21{,}6}60 \quad 60 \cdot 0{,}1 = 16{,}7\ т.$$

Таким образом производительность грохота равна 16,7 *т/час*, если он покрыт слоем в 2 *см* толщиной.

Вообще, обозначая через Q площадь грохота в квадратных метрах, через h толщину слоя в сантиметрах и через δ плотность породы, имеем для производительности грохота выражение

$$1{,}67\,Qh\delta\ [т/час]. \tag{32}$$

Продвижение частицы вдоль оси OX при свободном полете ее равно 0,35 *см*, и следовательно, каждая частица на двухметровом пути сделает $\frac{200}{0{,}35} = 570$ ударов со встреченной скоростью:

$$2z_2 = 2c_1 = 32{,}4\ см/сек.$$

[1] Если известны c, ω, $P_0 M$ и α, т. е. величины, могущие быть просто измеренными для действительного прибора, то отсюда можно, конечно, определить n и пользоваться этим для дальнейших расчетов.

На рис. 5 изображены графики нормальной к плоскости грохота составляющей движения грохота (сплошная синусоидальная линия) и частицы (пунктирные параболы).

Все частицы одновременно покидают грохот в момент, когда фаза движения его равна 18° и, ударившись в него точно через период (0,038 *сек*), в тот же момент должны снова взлетать. Взлет при фазе, меньшей 18° невозможен; в случае же запоздания (слабый пунктир) частица полетит по параболе, лежащей внутри нормальной,[1] ударится о грохот ранее нормального

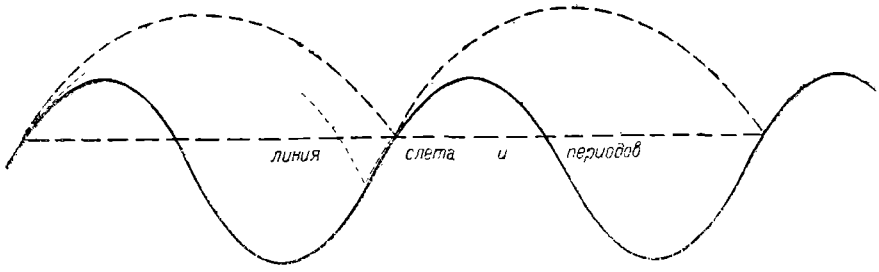


Рис. 5.

и пройдет с грохотом несколько градусов, пока не будет снова достигнута фаза 18°. Таким образом периодичность движения носит устойчивый характер.

Перейдем теперь к грохоту Шиферштейна „Резонанс":

$$C = 0{,}1\ см; \quad m = 1800\ об/мин$$

или

$$\omega = 60\,\pi = 188\,\frac{1}{сек}$$

Из уравнения (26) находим фазу δ_2, отвечающую периодичности движения:

$$c\,\omega^2 \cos\delta_2 = \pi g \cos\alpha;$$

$$\cos\delta_2 = \frac{\pi g \cos\alpha}{C\,\omega^2} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}867}{0{,}1 \cdot 60^2\,\pi};$$

$$\delta_2 = 48{,}^\circ 7.$$

С другой стороны фаза слета определяется из уравнения (27):

$$\sin\delta_1 = \frac{g\cos\alpha}{C\,\omega^2}$$

$$\delta_1 = 13^\circ 50'.$$

Таким образом фаза слета 14° предшествует фазе периодичности (49°), и потому устойчивой периодичности движения в том смысле, как в предыдущем случае, гарантировать нельзя.

Однако если частица окажется на грохоте в фазе 49°, то она слетит

[1] Направленное вниз ускорение грохота, начиная с фазы слета, больше составляющей z ускорения свободной частицы, и потому последняя, запоздав слететь, будет иметь все время составляющую z скорости, алгебраически большую, а по абсолютной величине меньшую нормальной (начальная составляющая скорости $\dot{z} < 0$), а следовательно траектория ее будет расположена ниже нормальной (ось OZ направлена вниз).

с него сейчас же и ударится на него снова в той же фазе через промежуток времени, равный периоду движения грохота:

$$t = \frac{1}{30} \text{ сек.}$$

Средняя скорость передвижения вдоль OX будет при этом равна, согласно (24):

$$x_{ср} = \frac{x - x_0}{t} = \frac{1}{2} g \sin\alpha \quad t = \frac{1}{2} 981 \sin 30^\circ \frac{1}{30} = 8{,}17 \text{ см/сек},$$

т. е. меньше, чем в предыдущем случае. Соответственно меньше будет и производительность грохота:

$$1{,}47 Qh\delta \text{ т/час.} \tag{32a}$$

Продвижение частицы вдоль OX между двумя ударами будет

$$x_{ср} t = 0{,}27 \text{ см/сек},$$

и следовательно, каждая частица ударится 740 раз со встречной нормальной скоростью

$$2c_1 = 2C\omega\cos\delta = 2 \cdot 0{,}1 \quad 188 \quad \cos 48^\circ{,}7 = 25{,}6 \text{ см/сек}.$$

Движение это, однако, не будет вполне устойчивым, так как частица на самом деле слетит раньше, если она упадет на грохот при меньшей фазе,

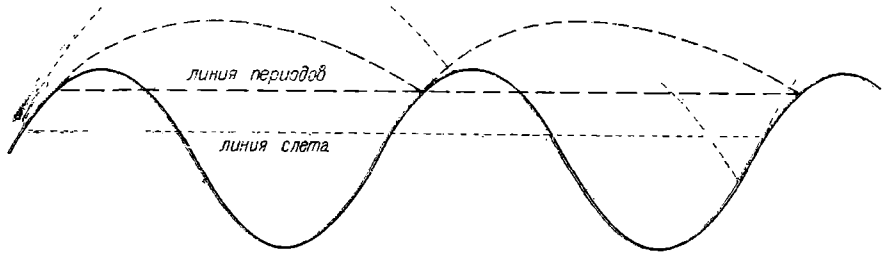


Рис. 6.

так как фазой слета является 13,5°. Если частица в этот момент окажется на грохоте, то она сейчас же слетит с него со скоростью, большей нормальной, и, описав объемлющую параболу (рис. 6), ударится снова о грохот несколько поздно — в фазе 68°; поэтому она сейчас же слетит, но уже с малой скоростью, и, описав маленькую параболу, попадет на грохот в фазе 350° (или —10°), т. е. слишком рано, и потому, пройдя с грохотом 23° до фазы 13°, начинает свой цикл сначала. В этом случае частицы могут двигаться таким образом несколько вразброд между фазами —10° и +70°, покидая грохот в промежутке от 13 до 70°. При этом удары будут в общем несколько слабее, чем при полном резонансе.

Для расчета указанных фаз достаточно написать уравнение движения грохота и частицы. Для грохота имеем:

$$\zeta = C\sin(\delta + \omega t) = 0{,}1 \sin(60\pi t + \delta);$$

$$\dot{\zeta} = C\omega\cos(\delta + \omega t),$$

т. е.

$$\dot{\zeta}_0 = C\omega\cos\delta = c_1,$$

считая $\delta = 14^\circ$, получаем:

$$\zeta_0 = c_1 = 18{,}2 \text{ см/сек};$$

$$\zeta_0 = 0{,}1 \sin 14^\circ = 0{,}0241 \text{ см}.$$

И принимая во внимание, что в момент слета

$$\zeta_0 = z_0 \quad \text{и} \quad \dot{\zeta}_0 = \dot{z}_0,$$

получим для уравнения полета частицы, согласно (23),

$$z = -0{,}0241 - 18{,}2\,t + 425\,t^2,$$

а для грохота

$$\zeta = 0{,}1 \sin (60\,\pi t + \delta),$$

где δ отвечает в градусной мере 14°.

Легко проверить, что при $t = 0{,}0385$ *сек*, т. е.

$$60\,\pi\,t = 7{,}23 = 2\,\pi + 0{,}95,$$

где 0,95 рад. $\sim 54^\circ{,}5$, будет иметь место равенство

$$z = \zeta.$$

Следовательно, столкновение произойдет в фазе $14 + 54 = 68^\circ$. Начиная с этого момента новый счет времени имеем уже

$$z_0 = \zeta_0 = 0{,}1 \sin 68^\circ = 0{,}0934 \text{ см};$$

$$\dot{z}_0 = \dot{\zeta}_0 = 0{,}1 \quad 188 \cos 68^\circ = 6{,}38 \text{ см/сек};$$

уравнения движения напишутся в виде:

$$z = -0{,}934 - 6{,}38\,t + 4{,}25\,t^2;$$

$$\zeta = -0{,}1 \sin (60\,\pi t + \alpha),$$

где α в градусной мере отвечает 68°, и мы убеждаемся, что z становится равным ζ; при $t = 0{,}025$ *сек*.

$$60\,\pi\,t + \alpha = 350^\circ,$$

затем частица движется с грохотом в течение 0,022 *сек* до фазы 13°, и процесс начинается сначала.

На два смежных удара затрачивается, таким образом, времени $0{,}038 + 0{,}02 + 0{,}022 = 0{,}065$ *сек*, причем вдоль оси X приходится за это время путь $0{,}36 + 0{,}15 = 0{,}51$ *см*.

Общее число ударов каждой частицы равно $2\,\frac{200}{0{,}51} = 784$ удара.

Производительность равна

$$1{,}33\,Qh\delta \quad m/час.$$

Скорость движения грохота в фазах $13^1/_2$, 70 и -10° равна соответственно:

$$c_1 = -6\,\pi \quad 0{,}97 = -18{,}2 \text{ см/сек};$$

$$c_1' = -6\,\pi \quad 0{,}34 = -6{,}4 \text{ см/сек};$$

$$c_1'' = -6\,\pi \cdot 0{,}98^1/_2 = -18{,}5 \text{ см/сек}.$$

Отсюда определим встречную (относительную) скорость частицы в фазах удара 70 и -10°.

В первый из них, согласно (23),

$$z_1 = c_1 + g\cos\alpha\, t = -18{,}2 + 980\cos 30 \quad 0{,}0385 = -18{,}2 + 31{,}8 = 13{,}6 \ см/сек.$$

И относительная скорость равна

$$-c_1' + z = 6{,}4 + 13{,}6 = 20 \ см/сек.$$

При втором ударе

$$z = c_1' + g\cos\alpha t = -6{,}4 + 0{,}850 \quad 0{,}025 = -6{,}4 + 21{,}2 = 14{,}8 \ см/сек.$$

И относительная скорость равна

$$c_1'' + z = 18{,}5 + 14{,}8 = 33 \ см/сек.$$

Мы рассмотрели, таким образом, два крайних случая движения частиц на грохоте Шиферштейна: чисто периодическое, отвечающее фазе 49°, и движение наиболее удаляющееся от периодичности в обе стороны, причем результаты в среднем получаются довольно близкие. Можно думать поэтому, что аналогичные результаты получатся и для любого движения частиц на этом грохоте.

Сопоставим результаты исследования в виде таблички:

Число *об/мин*	Производительность *T/час*	Число ударов	Относительная скорость *см/сек*	Живая сила частицы
$m = 1600$	$1{,}67\,Qh\delta$	$570\frac{L}{2}$	32,4	$\frac{m}{2}\cdot 1030$
$m = 1800$ (фаза 49°)	$1{,}47\,Qh\delta$	$740\frac{L}{2}$	25,6	$\frac{m}{2}\cdot 650$
$m = 1800$ (фазы 13,°70 и $-10°$)	$1{,}33\,Qh\delta$	$780\frac{L}{2}$	20,0	$\frac{m}{2}\cdot 400$
			33,2	$\frac{m}{2}\cdot 1100$

где

Q — площадь грохота в кв. метрах;
L — длина его в метрах;
h — толщина слоя породы в сантиметрах;
δ — плотность породы.

Таким образом, несмотря на то, что при 1800 *об/мин* (грохот Шиферштейна) затрачивается на 25% больше энергии, чем при 1600 *об/мин* производительность грохота оказывается на 12—20% меньше, уменьшается также на 35—25% средняя живая сила частицы, а увеличивается на 27—33% лишь число ударов.

Наконец, в третьем случае медленного вращения (1600 *об/мин*) фаза слета будет больше фазы периодического движения (рис. 7). Частица слетит слишком поздно и, следовательно, ударится слишком рано и затем немного пройдет вместе с грохотом. Поэтому для неупругой частицы эта скорость будет неблагоприятна. Однако для упругой частицы возможности взлета при ударе больше, чем для неупругой и, следовательно, грохот „Резонанс", довольно хороший для неупругих частиц, может оказаться слишком быстрым для частиц упругих.

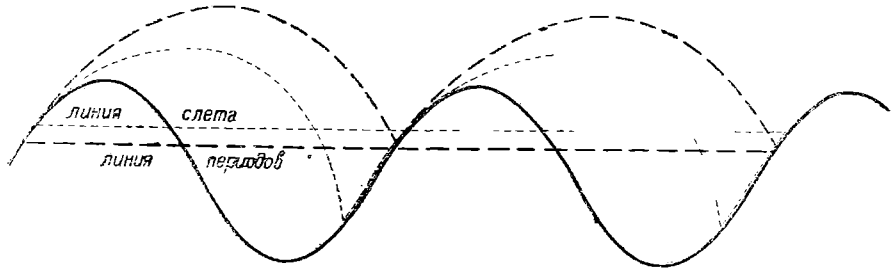


Рис. 7.

B. Zusammenfassung

Vorausgesetzt dass die Schwingungen des Trägheitssiebes perpendikulär zu der Ebene seiner Siebes stattfinden, analysiert man die Bewegung einer unelastischen Partikel, die längs des Siebes springt, und man bestimmt die Resonanzbedingungen zwischen den Schwingungen des Siebes und den Sprüngen der Partikel. Es ergibt sich dass das Sieb Schiefersteins „Resonanz" erfüllt auch ziemlich gut die Bedingung dieser zweiten Resonanz. Man untersucht die Daseinsbedingung einer vollständigen Resonanz und analysiert die Bewegung der unelastischen Partikel bei der vollständigen und unvollständigen Resonanz.

Formeln werden gegeben für die Berechnung der Leistungsfähigkeit des Siebes und der Summe der lebendigen Kräfte aller Stösse einer gegebenen Partikel in ihrer Bewegung längs des Siebes bei der vollständigen Resonanz. Für die unvollständige Resonanz gibt man ein Beispiel numerischer Berechnung.