26. О системахъ, коихъ линейныя примы опредѣляются тремя элементами.

Е. С. Федорова.

(доложено 19 Сентября).

Въ самой основѣ новой геометріи лежитъ понятіе о совокупностяхъ, опредѣленныхъ нѣкоторымъ числомъ данныхъ ихъ элементовъ, за которые принимаются какія либо опредѣленные геометрическіе образы. Полная совокупность такихъ элементовъ составляютъ геометрическую систему; число этихъ элементовъ есть безконечность нѣкотораго n-го порядка, и этотъ порядокъ опредѣляетъ ступень системы.

До сихъ поръ, во всѣхъ своихъ работахъ я имѣлъ въ виду лишь системы, въ которыхъ два элемента вполнѣ и однозначно опредѣляютъ нѣкоторую безконечную совокупность такихъ элементовъ, которые и называется линейною примою такой системы; мною доказано, что такихъ системъ имѣется безграничное множество. [1])

Тѣмъ не менѣе не всѣ возможныя системы удовлетворяютъ этимъ условіямъ. Каждому геометру (и даже начинающему) извѣстно, что двѣ произвольныя прямыя въ пространствѣ еще не опредѣляютъ вполнѣ и однозначно какой-либо совокупности, а между тѣмъ прямая есть вполнѣ опредѣленный геометрическій образъ и можетъ быть принята за элементъ системы (спеціально для плоскости принятіе его за элементъ составляетъ одинъ изъ простѣйшихъ пріемовъ новой геометріи).

Отсюда видимъ, что система прямыхъ или лучей въ пространствѣ составляетъ систему особую то есть систему, свойства которой должны существенно отличаться отъ свойствъ безграничнаго множества упомянутыхъ системъ.

И дѣйствительно, геометры дѣятельно изучали свойства этой особой системы и довели это изученіе до высокой степени, показавъ всю оригинальность этой системы и отличіе ея отъ другихъ обычныхъ системъ.

Правда, геометры изучали эту систему не съ этой элементарной точки зрѣнія; поводомъ послужило разрѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ механики, почему и случилось, что изученіе началось не съ простѣйшаго случая и перехода отъ него къ болѣе сложнымъ, а наоборотъ оно началось съ болѣе сложной, названной **нулевою**, системы[1]).

Я имѣю въ виду въ этой замѣткѣ сдѣлать выводъ этихъ системъ или точнѣе этой системы въ обратномъ порядкѣ, а затѣмъ нѣсколько расширить понятіе о такихъ системахъ.

Дѣло въ томъ, что если нельзя вполнѣ и однозначно опредѣлить безконечную совокупность лучей по произвольно даннымъ двумъ изъ нихъ, то можно достичь этого по произвольно даннымъ тремъ таковымъ. Общеизвѣстно изъ элементарныхъ руководствъ, что тремя произвольно данными, и притомъ непересѣкающимися другъ съ другомъ, прямыми можно вполнѣ и однозначно опредѣлить нѣкоторый однополый гиперболоидъ. Такъ какъ эта кривая поверхность 2-го порядка состоитъ не изъ одной, а изъ двухъ системъ непересѣкающихся прямыхъ, то понятно, что по тремъ прямымъ опредѣляется непосредственно только одна изъ нихъ, въ составъ которой входятъ три данныя, а затѣмъ уже логически неизбѣжно принять и другую совокупность, которая въ пространствѣ занимаетъ положеніе, тождественное съ первою системою то есть поверхность однополаго гиперболоида. Нѣмецкіе геометры одну изъ этихъ системъ называютъ Regelschaar, а другую Leitschaar. Если бы были даны три прямыя второй совокупности, то она была бы Regelschaar, а

1) Эти Записки I 322.

1) Эта система имѣетъ тѣсную связь съ элементарнымъ движеніемъ твердаго тѣла; ея ось (о которой будетъ сказано ниже), есть винтовая ось элементарнаго движенія.

первая стала бы Leitschaar. Мы называемъ одну изъ нихъ примою производящихъ, а другую примою направляющихъ.

До сихъ поръ мы видѣли, что тремя элементами вполнѣ и однозначно опредѣляется линейная секунда и въ ней сфероприма. Теперь мы видимъ предъ собою особый случай, когда тремя элементами вполнѣ и однозначно опредѣляется лишь прима элементовъ. Какая же это прима, линейная или квадратичная то есть сфероприма?

Опредѣленію сферопримы она не удовлетворяетъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ нѣтъ той линейной секунды, въ которой должна находиться эта сфероприма. А такъ какъ по существу мы смотримъ на линейную приму какъ такую безконечную совокупность первой ступени, которая опредѣляется минимальнымъ числомъ элементовъ, то должны признать, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ линейную приму элементовъ системы. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы должны признать, что существуютъ системы, въ которыхъ линейныя примы опредѣляются не двумя, а тремя элементами и что къ такимъ системамъ относится система прямыхъ или лучей въ пространствѣ.

Полная совокупность прямыхъ въ пространствѣ есть совокупность четвертой ступени, и значитъ система лучей есть система четвертой ступени.

Въ таковой системѣ мы должны умѣть отличать линейныя примы, секунды и терціи. И вотъ таковыя то совокупности и были выведены геометрами подъ разными названіями.

Линейная секунда должна опредѣляться линейною примою и еще однимъ элементомъ. Но въ данномъ случаѣ является та особенность, что мы не можемъ опредѣлить линейную секунду обычнымъ пріемомъ составленія линейныхъ примъ изъ одного элемента уже опредѣленной линейной примы и даннаго четвертаго элемента, такъ какъ каждая линейная прима опредѣляется тремя элементами.

Для опредѣленія примъ мы должны брать какіенибудь два элемента уже опредѣленной примы и данный четвертый элементъ

Ради опредѣленности мы могли бы для вывода всѣхъ остальныхъ совокупностей изъ элементовъ полученной примы разъ навсегда брать одинъ опредѣленный элементъ какъ постоянный, а затѣмъ произвольно брать перемѣнный элементъ той же примы.

Теперь намъ предстоитъ доказать, что линейная секунда всегда получится одна и та же, какой бы элементъ полученной примы мы ни приняли за постоянный.

Впрочемъ, доказательство это весьма просто, такъ какъ мы легко составимъ ту же линейную секунду непосредственно изъ четырехъ произвольно данныхъ лучей, примѣняя хорошо извѣстный въ новой геометрій пріемъ построенія двухъ прямыхъ, пересѣкающихъ четыре произвольно данныя.

Если эти четыре луча есть a, b, c, и d, то, какъ извѣстно, мы для рѣшенія задачи чрезъ a и b и черезъ точки луча c два раза проводимъ двѣ плоскости, и каждая изъ нихъ отмѣчаетъ на лучѣ d по двѣ проективныя точки A съ A′ и B съ B′. Двѣ послѣднія пары точекъ опредѣляютъ на этомъ лучѣ инволюцію точекъ, и ясно, что двойныя точки этой инволюціи и составляютъ искомое рѣшеніе. Конечно, это рѣшеніе можетъ быть вещественное или мнимое.

Въ случаѣ вещественнаго рѣшенія мы получаемъ двѣ такія особыя прямыя, чрезъ которыя проходятъ не только всѣ прямыя однополаго гиперболоида, опредѣляемыя тремя лучами, но и всѣ прямыя всѣхъ однополыхъ гиперболоидовъ, опредѣляемыхъ какими бы то ни было двумя его лучами и четвертымъ даннымъ лучемъ.

Слѣдовательно, четырьмя лучами вполнѣ и однозначно опредѣляется линейная секунда какъ совокупность лучей, проходящихъ чрезъ двѣ особыя прямыя, которыя и называются осями линейной секунды лучей.

Нѣмецкіе геометры называютъ эту линейную секунду (по предложенію знаменитаго геометра Плюкера) die lineare Strahlencongruenz.

Но такъ какъ существуютъ и иныя рѣшенія, то значитъ имѣются и иныя линейныя секунды, на которыхъ мы не останавливаемся.

Разъ мы съумѣли составить линейную секунду лучей, не представляется уже никакой трудности составить и линейную терцію лучей. Для этого такъ же, какъ мы составили изъ найденной линейной примы и еще одного луча линейную секунду, мы составимъ линейныя секунды изъ всякой линейной примы первой секунды и еще изъ одного луча, не входящую въ ея составъ, будемъ составлять новыя линейныя секунды, полная совокупность которыхъ и составитъ искомую линейную терцію.

Но мы можемъ достичь того же проще, зная, что линейная секунда опредѣляется двумя осями. Если намъ для опредѣленія терціи даны пять лучей a, b, c, d и e, то мы сначала найдемъ оси m_1, n_1 секунды $abcd$, а затѣмъ оси m_2, n_2 секунды $abce$.

Этими двумя парами сопряженныхъ прямыхъ въ сущности терція вполнѣ опредѣляется.

Въ самомъ дѣлѣ, произвольная плоскость пере-

сѣкаетъ эти двѣ пары прямыхъ въ двухъ парахъ точекъ, а чрезъ каждыя двѣ точки пары проходитъ лучъ, принадлежащій терціи; имѣя же на плоскости два луча и ихъ точку O пересѣченія, мы вмѣстѣ съ тѣмъ заключаемъ, что и всѣ лучи, исходящіе изъ этой точки и находящіеся въ этой плоскости, есть лучи линейной терціи. Если изъ какой нибудь точки проведемъ чрезъ пары сопряженныхъ прямыхъ плоскости, то эти плоскости пересѣкутся въ лучахъ линейной терціи, а два такихъ луча въ этой точкѣ опредѣлятъ приму концентрическихъ лучей, принадлежащихъ линейной терціи, и эта прима находится въ одной плоскости o.

Такимъ образомъ мы пришли къ той совокупности лучей, которая нѣмецкими геометрами называется „der lineare Strahlencomplex“ и которая сама относится къ нулевой системѣ (Nullsystem). Въ этой системѣ каждой произвольной плоскости коррелятивна находящаяся въ ней нулевая точка, а каждой произвольно взятой точкѣ пространства коррелятивна нѣкоторая, проходящая чрезъ нее, нулевая плоскость. Теперь мы видимъ, какъ осуществляется эта коррелятивность по отношенію къ выведенной нами линейной терціи лучей.

Вообще двѣ сопряженныя оси не могутъ находиться въ одной плоскости, потому что если бы это случилось, то всѣ прямыя этой плоскости были бы лучами спеціальной линейной секунды и выводимой изъ нея также спеціальной линейной терціи, которая состояла бы изъ этой секунды и еще одного даннаго луча.

Но обѣ выведенныя нами пары сопряженныхъ прямыхъ принадлежатъ одной поверхности, а именно гиперболоиду, который ими опредѣляется съ избыткомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ одну пару и одну прямую другой пары проведемъ гиперболоидъ, то на плоскости o нулевая точка O опредѣлитъ два луча, на которыхъ должны находиться точки пересѣченія сопряженныхъ паръ прямыхъ, и обѣ пары точекъ должны находиться на гиперболоидѣ, чѣмъ вполнѣ опредѣляется и та его производящая, которая составляетъ вторую прямую второй пары.

Такимъ образомъ осевой гиперболоидъ, опредѣляющій линейную терцію лучей, есть собственно инволюція его производящихъ, и каждая пара сопряженныхъ вполнѣ и однозначно опредѣляетъ одну изъ составляющихъ ее линейныхъ секундъ.

Какъ извѣстно [1]), эту линейную терцію можно еще проще представить себѣ по ея оси (которая есть ось вращенія). Если данная произвольная плоскость пересѣкаетъ эту ось подъ угломъ ρ [1]), то ея нулевая точка находится въ ней на перпендикулярѣ къ этой оси на разстояніи отъ нея, равнымъ r, причемъ $r.\ \mathrm{tang}\ \rho = \mathrm{const.}$ для данной терціи, и слѣдовательно этою одною константою (и положеніемъ оси) терція вполнѣ опредѣляется.

Вообще всѣ линейныя совокупности этой системы могутъ быть опредѣляемы извѣстнымъ числомъ лучей системы или прямыхъ, не принадлежащихъ къ системѣ, не имѣющихъ другъ съ другомъ ни одной общей точки. Но для линейныхъ примъ это условіе есть необходимость, такъ какъ тремя прямыми, изъ которыхъ хотя двѣ находятся въ одной плоскости, гиперболоида уже не опредѣляется. Однако уже для опредѣленія секунды можно взять четыре прямыя, изъ которыхъ двѣ находятся въ одной плоскости.

Всѣ точки одной производящей осевого гиперболоида есть нулевыя точки или полюсы плоскостей, проходящихъ чрезъ сопряженную производящую; поэтому каждая изъ нихъ въ отдѣльности есть полюсъ той плоскости, которая проходитъ чрезъ нее и сопряженную производящую, то есть плоскости, въ которой этой терціи принадлежатъ всѣ лучи, исходящіе изъ нулевой точки, въ томъ числѣ и направляющая прямая гиперболоида, проходящая чрезъ этотъ полюсъ; отсюда заключаемъ, что всѣ лучи этой терціи, въ томъ числѣ и всѣ направляющія осевого гиперболоида самопроективны.

Нѣмецкіе геометры (по предложенію знаменитаго геометра Мебіуса) называютъ эту линейную терцію „der lineare Strahlencomplex“, а она опредѣляетъ собою нулевую систему (Nullsystem).

Но если два луча не могутъ опредѣлить линейной примы въ обыкновенномъ пространствѣ трехъ измѣреній, то тѣмъ менѣе это можетъ имѣть мѣсто въ системахъ высшей ступени. Для примѣра разсмотримъ какую-нибудь систему 4-ой ступени.

Если двумя лучами, то есть въ данномъ случаѣ двумя линейными примами, не можетъ быть опредѣлена линейная прима этихъ примъ, то рѣшимъ вопросъ, не будетъ ли таковая опредѣлена тремя произвольно данными линейными примами, изъ коихъ никакія двѣ не находятся въ линейной секундѣ, и всѣ три не находятся въ одной линейной терціи.

Пусть эти линейныя примы a, b и c.

Каждыя двѣ изъ нихъ во всякомъ случаѣ на-

[1]) Это обстоятельно изложено даже въ такихъ руководствахъ какъ Reye. «Geometrie der Lage» (III Auflage, II Band 18 Vortrag).

[2]) Здѣсь уголъ ρ опредѣляется самою плоскостью, а не перпендикуляромъ къ ней.

ходятся въ одной линейной терціи; если напр. линейную терцію ab пересѣчемъ съ примою c, то получимъ въ пересѣченіи одинъ единственный элементъ C. Но такъ какъ этотъ элементъ находится въ терціи bc, то изъ него можемъ провести одну, и только одну, линейную приму AB, гдѣ A и B соотвѣтственно принадлежатъ примамъ a и b.

Но если на линейной примѣ ABC возьмемъ элементъ C и проведемъ чрезъ проходящую чрезъ него приму c и чрезъ примы a и b двѣ линейныя терціи, то эти терціи пересѣкутся уже не въ линейной примѣ c, а въ нѣкоторой линейной секундѣ γ, проходящей чрезъ c. Совершенно такъ же вмѣсто линейныхъ примъ a и b мы получимъ линейныя секунды α и β, если чрезъ каждую изъ нихъ и приму c проведемъ линейныя терціи; такимъ образомъ данныя три линейныя примы замѣнятся тремя опредѣленными линейными секундами, и тогда ими дѣйствительно вполнѣ и однозначно опредѣляется линейная прима такихъ секундъ.

Каждую секунду такой линейной примы мы соотвѣтственно произвольному элементу D линейной примы ABC получимъ, если имъ и какими либо двумя секундами напр. α и β опредѣлимъ двѣ линейныя терціи, которыя и пересѣкутся въ искомой линейной секундѣ δ.

Каждыя двѣ изъ этихъ секундъ, а слѣдовательно и всѣ линейныя секунды, составляющія найденную линейную приму, опредѣляемую тремя произвольно данными примами, пересѣкаются въ одномъ общемъ элементѣ E, и слѣдовательно эта линейная прима секундъ входитъ въ составъ линейной терціи линейныхъ секундъ, имѣющихъ общій элементъ E.

Это рѣшеніе вполнѣ аналогично найденному выше рѣшенію линейной примы лучей, опредѣляемой тремя изъ нихъ, хотя въ этомъ случаѣ мы имѣемъ уже не примы, а секунды въ качествѣ элементовъ линейной примы, и эти секунды имѣютъ уже общій элементъ E.

Чтобы наглядно увидѣть эту аналогію, мы пересѣчемъ нашу линейную приму секундъ такою линейною терціею, въ составъ которой входитъ прима ABCD, но не входитъ элементъ E. Тогда эта терція въ пересѣченіи съ каждой изъ секундъ α, β, γ, δ дастъ нѣкоторую линейную приму, и всѣ эти линейныя примы не имѣютъ ни одного общаго элемента, хотя и принадлежатъ одной линейной терціи. Другими словами, линейная терція, содержащая линейную приму e и ABCD пересѣкаетъ найденную линейную приму секундъ въ гиперболоидѣ.

Нетрудно видѣть, что четырьмя линейными секундами, проходящими чрезъ элементъ E, опредѣляется линейная секунда линейныхъ секундъ, а пятью такими секундами опредѣляется линейная ихъ терція, и это и будетъ именно полная линейная терція секундъ, проходящихъ чрезъ элементъ E. Легко видѣть также, что пересѣченіе этихъ линейныхъ терцій произвольными терціями, содержащими линейную приму ABCD даетъ линейную секунду и линейную терцію линейныхъ примъ то есть въ частности для системы точекъ секунду и терцію лучей. Но я не имѣю въ виду останавливаться на этомъ выводѣ подробнѣе.

Ограничусь примѣненіемъ этихъ выводовъ на какомъ-нибудь реальномъ примѣрѣ напр. на системѣ шаровъ.

Если даны три произвольныя линейныя примы шаровъ a, b, c, то каждыя двѣ изъ нихъ напр. ab вполнѣ и однозначно опредѣляютъ линейную терцію шаровъ, а изъ всѣхъ шаровъ линейной примы c только одинъ, назовемъ C, принадлежитъ этой терціи. Если чрезъ шаръ C и линейныя примы a и b проведемъ двѣ линейныя секунды шаровъ, то, такъ какъ онѣ принадлежатъ одной линейной терціи, онѣ пересѣкутся въ линейной примѣ ABCD. Если составимъ двѣ линейныя терціи по примамъ ca и cb то эти двѣ терціи пересѣкутся уже не въ линейной примѣ c, а въ нѣкоторой линейной секундѣ γ. Также двѣ пары линейныхъ примъ ab и ac опредѣляетъ двѣ терціи, пересѣкающіяся въ секундѣ α, и двѣ пары линейныхъ примъ bc и ba опредѣлятъ линейную секунду β.

Такъ какъ никакія двѣ изъ этихъ секундъ не находятся въ одной линейной терціи, то должны пересѣкаться въ одномъ единственномъ шарѣ E, на который мы можемъ смотрѣть какъ на тотъ добавочный элементъ, который преобразуетъ данныя линейныя примы въ секунды.

Каждая линейная секунда этой примы, проходящая чрезъ какой-нибудь шаръ D линейной примы ABC вполнѣ и однозначно опредѣляется пересѣченіемъ двухъ линейныхъ терцій, опредѣляемыхъ этимъ шаромъ и двумя какими-нибудь линейными секундами этой примы. Ясно, что если полученную линейную приму секундъ шаровъ пересѣчемъ произвольною линейною терціей, проходящей чрезъ приму ABC, но не чрезъ шаръ E, то получимъ гиперболоидъ шаровъ. Слѣдовательно, найденная прима секундъ (секундо прима системы 4-ой ступени) необходимо имѣетъ одинъ общій элементъ и содержитъ въ себѣ безконечное множество 6-го порядка однополыхъ гиперболоидовъ шаровъ.

Бросая общій взглядъ на главныя особенности

разсмотрѣнныхъ системъ, мы замѣчаемъ прежде всего, что въ обыкновенной системѣ точекъ тремя лучами вполнѣ и однозначно опредѣляется не одна линейная прима, въ составъ которой входятъ три данные луча, но и такая же другая, состоящая изъ лучей, каждый изъ которыхъ пересѣкаетъ всѣ лучи примы. Въ этомъ смыслѣ при опредѣленіи совокупностей этихъ системъ нужно имѣть въ виду совокупности двоякаго рода, которыя мы въ частномъ случаѣ однополаго гиперболоида различаемъ какъ приму производящихъ и какъ приму направляющихъ.

Линейная секунда производящихъ опредѣляется четырьмя лучами, но она же можетъ быть опредѣлена двумя лучами направляющими; но вмѣстѣ съ тѣми четырьмя лучами производящими опредѣляется и линейная секунда направляющихъ, такъ какъ каждые три луча первой секунды опредѣляютъ линейную приму второй секунды.

Наконецъ, пятью лучами производящими опредѣляется ихъ линейная терція, и въ то же время особый лучъ направляющихъ, а именно ось этой терціи. Но такая же терція опредѣляется и въ системѣ направляющихъ, изъ коихъ каждыя четыре опредѣляютъ линейную секунду.

Подобныя же отношенія мы усматриваемъ, по вышеобъясненному, и въ системѣ четвертой ступени, съ тою разницею, что какъ въ системѣ производящихъ, такъ и въ системѣ направляющихъ линейныя примы замѣняются секундами, для опредѣленія которыхъ служитъ добавочный общій элементъ E.

Особенно интересный случай такихъ особыхъ системъ мы выводимъ для обыкновенной системы 5-й ступени, примѣромъ которой можетъ служить система конопримъ (кривыхъ 2-го порядка) на плоскости. Въ этой системѣ линейныя секунды въ общемъ случаѣ не имѣютъ общихъ элементовъ. Поэтому двумя такими секундами не опредѣляется ихъ линейная прима. Но нетрудно видѣть, что таковая опредѣляется тремя таковыми.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны три линейныя секунды α, β, γ общаго положенія то есть никакія двѣ изъ нихъ не имѣютъ общихъ элементовъ. Возьмемъ на одной изъ нихъ напр. β какой-нибудь элементъ B, и этимъ элементомъ и линейною секундою α опредѣлимъ нѣкоторую терцію, которая съ секундою γ пересѣчется въ одномъ единственномъ элементѣ C.

Такимъ образомъ мы устанавливаемъ гомологичность (коллинеарность) между элементами секундъ β и γ. Такъ какъ элементы BC и всѣ элементы секунды α находятся въ одной линейной терціи, то значитъ линейная прима BC пересѣкаетъ линейную секунду α въ элементѣ A.

Такихъ линейныхъ примъ какъ ABC мы (вслѣдствіе гомологичности) находимъ безконечное множество 2-го порядка, и значитъ прежде всего тремя данными секундами опредѣляется линейная секунда линейныхъ примъ, и ни одна изъ этихъ примъ ни съ какою другою не имѣетъ общихъ элементовъ.

Изъ этой секунды мы можемъ произвольно выбрать три линейныя примы, назовемъ a, b, c, и тогда на каждой изъ нихъ тремя данными секундами отмѣчается по три элемента, которыя мы можемъ считать проективными. Имѣя же эту проективность (гомологичность элементовъ на примахъ), мы и получаемъ рѣшеніе поставленной задачи, такъ какъ каждые три соотвѣтственные элемента на этихъ примахъ опредѣляютъ одну изъ секундъ искомой примы.

Такимъ образомъ тремя произвольно заданными линейными секундами опредѣляется не только примосекунда, но и секундоприма.

Но каждыя двѣ примы напр. a и b представляютъ направляющія и опредѣляютъ линейную кварту примъ производящихъ, если каждый элементъ такой примы мы соединимъ линейными примами со всѣми элементами всѣхъ другихъ примъ направляющихъ. Эта линейная кварта примъ заключается въ линейной терціи линейныхъ секундъ, въ каждой изъ которой (какъ въ „нулевой системѣ“) имѣется одна линейная прима линейныхъ примъ, или проще, примопримъ. Всего же во всей квартѣ имѣется линейныхъ примъ безконечное множество 8-го порядка, а линейныхъ секундъ безконечное множество 7-го порядка.

Первое мы заключаемъ на основаніи того, что если возьмемъ кварту, то каждая линейная прима пересѣкаетъ ее въ одномъ элементѣ; слѣдовательно разрядовъ такихъ примъ столько, сколько элементовъ въ квартѣ, но изъ каждаго элемента мы можемъ провести кварту же линейныхъ примъ.

Второе мы заключаемъ изъ того, что каждая линейная прима пересѣкаетъ линейную терцію въ одномъ элементѣ; слѣдовательно, разрядовъ такихъ секундъ столько, сколько элементовъ въ терціи; но изъ каждаго элемента можемъ провести кварту линейныхъ секундъ.

Съ каждымъ повышеніемъ на одну числа произвольно данныхъ секундъ мы получаемъ и повышеніе на одну порядка совокупностей. Слѣдовательно когда будетъ дано 6 произвольныхъ секундъ, то получится ихъ линейная кварта, а число производящихъ линейныхъ примъ будетъ уже безконечное множество седьмого порядка то есть получимъ ихъ

линейную септиму, а нулевыхъ секундъ будетъ линейная секунда.

Ясно, что если найденную примосекунду пересѣчемъ какою либо линейною квартою, получимъ примоприму то есть совокупность того же разряда, что и однополый гиперболоидъ, но находящуюся не въ линейной квартѣ. Ясно также, что и она опредѣляется тремя линейными примами, но необходимо, чтобы эти примы находились въ одной линейной квартѣ.

Въ заключеніе упомяну, что если въ другихъ отношеніяхъ всѣ упомянутыя системы существенно отличаются отъ обыкновенныхъ системъ то есть системъ, линейныя примы которыхъ опредѣляются двумя элементами, то въ одномъ отношеніи онѣ не отличаются отъ нихъ, а именно въ томъ, что ихъ линейныя совокупности высшей ступени могутъ быть приняты за элементы, и тогда два произвольно взятые такіе два элемента, въ свою очередь, опредѣляютъ линейную ихъ прима три линейную секунду и т. д.

Какъ въ системѣ точекъ высшая линейная совокупность—плоскость, можетъ быть принята за элемента, и два такіе элемента опредѣляютъ линейную приму то есть совокупность плоскостей, пересѣкающихся въ прямой. Какъ въ системѣ шаровъ линейная ихъ терція можетъ быть принята за элементъ, и два такіе элемента опредѣляютъ линейную приму—совокупность всѣхъ терцій, пересѣкающихся въ одной линейной секундѣ. Какъ въ системѣ точекъ можно установить коррелятивность между плоскостю и точкою, и всѣ точки плоскости сопряжены этому заднему полюсу; какъ въ системѣ шаровъ существуетъ коррелятивность между линейною терціею шаровъ и однимъ (ортогональнымъ) шаромъ, и каждый шаръ линейной терціи сопряженъ съ этимъ однимъ шаромъ.

Такъ и въ разсмотрѣнныхъ особыхъ системахъ мы можемъ, принявъ высшіе линейныя совокупности за элементы новыхъ системъ, вывести по двумъ изъ нихъ линейныя примы; такъ во всѣхъ этихъ системахъ существуетъ коррелятивность между высшею ихъ линейною совокупностью и нѣкоторымъ однимъ изъ нихъ.

Конечно, простѣйшимъ примѣромъ для примѣненія этихъ заключеній является система лучей, высшую линейную совокупность въ которой составляетъ линейная терція лучей (der lineare Strahlencomplex).

Если таковой опредѣляется пятью произвольно взятыми лучами, то ясно, что черезъ четыре изъ нихъ можно провести линейную приму такихъ терцій или комплексовъ; и такъ какъ четырьмя лучами вполнѣ и однозначно опредѣляется линейная секунда лучей (die lineare Strahlencongruenz), то ясно, что она является общею секундою пересѣченія всѣхъ терцій ихъ линейной примы.

Но въ линейной секундѣ лучей имѣются два спеціальные луча, составляющіе двѣ оси секунды (а всѣ лучи секунды пересѣкаютъ эти двѣ оси); слѣдовательно, эти двѣ оси (являющіяся двумя сопряженными лучами осевого гиперболоида) играютъ особую роль и въ линейной примѣ комплексовъ, а именно составляютъ оси двухъ спеціальныхъ комплексовъ этой примы. Каждый изъ этихъ комплексовъ представляетъ такую линейную приму линейныхъ секундъ лучей, въ которой всѣ точки одной изъ этихъ осей являются нулевыми для каждой проходящей чрезъ нея плоскости и во всѣхъ плоскостяхъ пространства нулевыми являются точки этой оси.

Мы можемъ воспроизвести линейную кварту комплексовъ, сопряженныхъ одному данному и представленному осевымъ гиперболоидомъ съ данною инволюціей его осей.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ двѣ сопряженныя оси и вполнѣ произвольно взятую въ пространствѣ прямую мы проведемъ приму производящихъ гиперболоида, то, имѣя двѣ сопряженныя, мы можемъ по отношенію къ третьей прямой построить на этой примѣ четвертую гармоническую, и тогда въ новомъ гиперболоидѣ будетъ установлена инволюція производящихъ, а слѣдовательно такой гиперболоидъ можемъ принять за осевой по отношенію къ нѣкоторому комплексу, и при томъ этотъ комплексъ будетъ самопроективенъ по отношенію къ данному комплексу, а слѣдовательно сопряженъ съ нимъ, и по даннымъ построенія такихъ комплексовъ можно воспроизвести линейную кварту.

Въ системѣ такихъ комплексовъ мы имѣемъ полную аналогію съ системою конопримъ (одинъ комплексъ опредѣляется пятью лучами; полная совокупность комплексовъ есть квинта; съ каждымъ элементомъ то есть комплексомъ сопряжена линейная терція; съ линейною секундой сопряжена линейная секунда и т. д.). Но здѣсь уже мы не можемъ, какъ въ системѣ конопримъ, различать конопримъ точекъ и конопримъ лучей.

Полное изложеніе линейныхъ совокупностей этой системы заключается въ *Reye*. Geometrie der Lage, II Band. 26 Vortrag.