XI. Его-же. Всегда ли можно привести въ перспективное положеніе двѣ линейныя секунды (въ предѣлахъ одной линейной терціи)?

Согласно началамъ новой геометріи задачи общаго характера вполнѣ разрѣшаются, если онѣ разрѣшены для одной изъ системъ, за каковую можемъ принять систему плоскостей.

Поставленный вопросъ столь элементаренъ, что, казалось бы, рѣшеніе его должно заключаться въ самыхъ элементарныхъ учебникахъ. Однако, этого не случилось, и въ самомъ обстоятельномъ изъ имѣющихся руководствъ—Reye, Geometrie der Lage въ главѣ 3 II тома, спеціально трактующей о перспективномъ положеніи линейныхъ секундъ, разсматриваются только условія, при которыхъ двѣ линейныя примы (какъ обычно, разсматриваются только двѣ системы — система точекъ и система плоскостей) находятся въ перспективномъ положеніи. Поэтому, считаю полезнымъ разсмотрѣть этотъ вопросъ въ общемъ видѣ.

Прежде всего легко привести доказательство отрицательнаго отвѣта на этотъ вопросъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ линейныя секунды плоскостей находятся въ перспективномъ положеніи, то это значитъ, что всѣ гомологичныя плоскости пересѣкаются въ прямыхъ, находящихся въ одной и той же плоскости—плоскости перспективы; а такъ какъ линейная секунда плоскостей вполнѣ опредѣляется четырьмя изъ нихъ, то значитъ по четыре гомологичныя плоскости каждой секунды пересѣкаются въ четырехъ сторонахъ одного и того же четырехсторонника.

Отсюда видимъ, что положительный отвѣтъ на вопросъ привелъ бы къ задачѣ: пересѣчь произвольную четырехгранную пирамиду въ произвольномъ плоскомъ четырехугольникѣ.

Что это задача невозможная, видно изъ рѣшенія задачи: пересѣчь произвольную трехгранную пирамиду въ произвольномъ треугольникѣ; такихъ рѣшеній только два [1]),

[1]) Точнѣе двѣ пары, такъ какъ каждому рѣшенію соотвѣтствуетъ второе рѣшеніе параллельною плоскостью и связанное съ нимъ центромъ пирамиды какъ центромъ обратнаго равенства.

между тѣмъ, первая задача была бы разрѣшима только въ томъ случаѣ, если бы рѣшеній второй задачи было бы безконечное множество второй степени, потому что. разрѣшивъ ее относительно трехъ вершинъ даннаго четырехсторонника, мы имѣемъ еще четвертую вершину, которой можемъ придать произвольное положеніе въ плоскости.

Отрицательный отвѣтъ вытекаетъ еще и изъ слѣдующаго общаго соображенія.

Полная совокупность четырехгранныхъ пирамидъ, пересѣкающихся въ данномъ четырехсторонникѣ, есть линейная терція, такъ какъ любую точку пространства мы можемъ принять за вершину пирамиды. Линейныхъ же секундъ плоскостей, опредѣляемыхъ произвольными четырьмя плоскостями, имѣется линейная кварта; изъ этой кварты, слѣдовательно, только одна линейная терція можетъ быть приведена въ перспективное положеніе со всякою данною линейною секундою, разсматриваемою какъ съ нею гомологичная.

Итакъ, въ общемъ случаѣ, двѣ гомологичныя линейныя секунды не могутъ быть приведены въ перспективное положеніе.

Важность этого доказательства выяснилась при чтеніи курса новой геометріи и рѣшеніи задачъ по курсу.

Но если на плоскости возьмемъ произвольныя четыре точки A, B, C, D и одну Z произвольную въ пространствѣ и проведемъ изъ нея лучи чрезъ первыя четыре точки, то получимъ четырехгранную пирамиду, служащую выраженіемъ линейной секунды плоскостей и лучей, находящейся въ перспективномъ положеніи съ линейною секундою точекъ и прямыхъ плоскости перспективы.

Ясно, что если-бы четырехсторонникъ и пирамида были-бы даны отдѣльно, то можно было бы найти въ пространствѣ истинное положеніе точки Z, или иначе, пересѣчь пирамиду въ четырехсторонникѣ, имѣющемъ вершины A, B, C, D, что равнозначно съ приведеніемъ въ перспективное положеніе самихъ линейныхъ секундъ.

Рѣшеніе этой задачи приводится къ слишкомъ извѣстной въ новой геометріи задачѣ: провести три данные луча въ одной плоскости чрезъ три произвольно данныя точки на прямой. Въ самомъ дѣлѣ, пересѣкши прямую AB прямою CD, найдемъ точку Z на однихъ прямыхъ, почему на каждой изъ нихъ получится по три точки, коррелятивныя тремъ лучамъ изъ Z на плоскостяхъ соотвѣтственныхъ граней пирамиды.

По отношенію къ точкамъ ABE мы найдемъ рѣшеніе для точки Z въ видѣ круга, плоскость котораго перпендикулярна къ этой прямой; также получимъ кругъ и плоскость по отношенію къ прямой CDE. Если, въ общемъ случаѣ, два такіе круга не пересѣкаются, то въ данномъ случаѣ они должны пересѣчься, потому что только точки ихъ пересѣченія составляютъ рѣшеніе этой задачи, а она необходимо имѣетъ рѣшенія по условіямъ заданія.

Ясно, что получатся два рѣшенія, симметричныя относительно плоскости ABCD. Но если принять во вниманіе направленіе въ послѣдовательности граней той полупирамиды, которыя пересѣкается въ данномъ четырехсторонникѣ, то эти два рѣшенія отличаются другъ отъ друга именно какъ симметричныя, а потому собственно получаемъ однозначное рѣшеніе.

24 марта 1912 г.