40. Осевая коллинеація.

Е. С. Федорова.

(Доложено 9 апрѣля).

Этимъ названіемъ я только перевожу выраженіе нѣмецкихъ геометровъ „geschaart involutorischer Raum“, которое вообще трудно переводимо на русскій языкъ болѣе близкими словами [1]). Къ тому же оно, по своей условности, слишкомъ слабо выражаетъ этотъ родъ преобразованія, хотя и отличаетъ его инволюціонный характеръ, то есть, что при немъ двѣ гомологичныя точки пространства вдвойнѣ гомологичны, примемъ ли мы одну изъ нихъ за точку одной системы или за точку другой системы, гомологичной первой.

На лекціяхъ, читанныхъ мною въ первомъ семестрѣ 1912 года, я изложилъ это преобразованіе слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ обыкновенную коллинеацію на плоскости, изъ которой я, ради простоты, разсмотрѣлъ только простѣйшее ея видоизмѣненіе, при которомъ обѣ гомологичныя системы находятся въ положеніи инволюціи [2]).

Здѣсь мы имѣемъ центръ коллинеаціи (онъ же центръ перспективы, ось коллинеаціи (она же ось перспективы) и посединѣ между ними ось инволюціи, точкамъ которой гомологичны точки безконечно-удаленныя.

Если ось перспективы мы примемъ за ось вращенія, то получимъ линейную приму плоскостей, въ которыхъ ось перспективы есть общая прямая. Достаточно еще на одной изъ нихъ произвольно взять точку и принять ее за центръ перспективы въ этой плоскости, и осевая коллинеація, о которой здѣсь рѣчь, вполнѣ опредѣлена, потому что прямая, соединяющая два центра перспективы, есть геометрическое мѣсто всѣхъ центровъ перспективы, и слѣдовательно на каждой плоскости линейной примы мы вполнѣ опредѣленно имѣемъ и ось, и центръ перспективы, а слѣдовательно для любой точки пространства мы имѣемъ возможность найти ей гомологичную (или иначе сопряженную точку этой пространственной инволюціи).

Это преобразованіе будетъ коллинеаціей въ настоящемъ смыслѣ слова, потому что, какъ легко доказать, всякой прямой гомологична будетъ прямая же, а слѣдовательно всякой плоскости гомологична плоскость.

Замѣчательною особенностью этого преобразованія будетъ то, что она опредѣляется двумя прямыми или осями, которымъ принадлежитъ одинаковая роль въ построеніяхъ и всѣ точки которыхъ самогомологичны. Вотъ эта то главная особенность и выражается въ переводимомъ мною названіи.

Если проведемъ прямую чрезъ двѣ произвольныя точки обѣихъ осей, то ясно, что это будетъ прямая самогомологичная. Такъ какъ изъ каждой точки на одной изъ осей мы можемъ провести ихъ линейную приму, то полная ихъ совокупность есть линейная секунда [1]).

Какъ видимъ, въ самоколлинеарной прямой гомологичныя точки есть сопряженныя точки инволюціи, а двойныя ея точки принадлежатъ осямъ коллинеаціи.

Что всякой другой прямой гомологична также прямая, видно изъ слѣдующаго.

Тремя произвольными лучами опредѣляется ихъ линейная прима, составляющая систему производящихъ однополаго гиперболоида. Если же двѣ изъ этихъ прямыхъ есть постоянныя (оси коллинеаціи) то по отношенію къ каждому третьему въ этой примѣ имѣется лучъ четвертый, съ нимъ гармонически сопряженный. Ясно, слѣдовательно, что этотъ четвертый лучъ и есть прямая, гомологичная прямой, составляющей третій лучъ.

Это можно доказать и иначе, взявъ произвольно кривую поверхность 2-го порядка (коносекунду) и произведя по отношенію къ ней полярное преобразованіе.

---

[1]) Ср. *Reye.* Geometrie der Lage. B. II. Neunter Vortrag.

[2]) Новая геометрія, стр. 14.

[1]) Она и есть линейная секунда лучей нулевой системы, опредѣляемая четырьмя произвольно данными лучами. Ср. эти записки III, стр. 310. Нѣмецкіе геометры въ примѣненіи къ разсматриваемой коллинеаціи называютъ эти лучи Leitstrahlen.

Тогда каждая точка системы преобразуется въ полярную плоскость, а каждая плоскость—въ ея полюсъ по отношенію къ этой поверхности; всякая же прямая, опредѣляется ли она какъ линейная прима, по двумъ точкамъ, или какъ ось линейной примы, по двумъ плоскостямъ, преобразуется въ прямую же—взаимную поляру. Если въ данной системѣ она есть линейная прима точекъ, то въ полярной системѣ ей коррелятивна ось линейной примы плоскостей.

Въ частности, такъ какъ вторая система, также какъ и первая, представляетъ осевую коллинеацію, въ которой каждой произвольной точкѣ гомологична точка же, а именно четвертая гармоническая на коллинеарной прямой, опредѣляемой данною точкою, то значитъ въ первой системѣ, каждой плоскости гомологична плоскость же, четвертая гармоническая и сопряженная произвольно данной третьей, если за двѣ первыя примемъ плоскости, также пересѣкающіяся въ самоколлинеарной прямой, опредѣляемой двумя точками пересѣченія данной плоскости съ осями коллинеаціи, и притомъ проходящія чрезъ эти оси.

На каждомъ самоколлинеарномъ лучѣ точка, находящаяся посединѣ между точками осей коллинеаціи, гомологична безконечно удаленной точкѣ. Поэтому совокупность точекъ системы, коимъ гомологичны точки безконечно-удаленныя, есть плоскость, параллельная обѣимъ осямъ коллинеаціи и находящаяся посединѣ между ними. Ей, слѣдовательно, принадлежитъ роль плоскости инволюціи.

Если представимъ себѣ систему въ такомъ положеніи, чтобы плоскость инволюціи совпадала съ плоскостью чертежа, то легко найдемъ безконечно-удаленную точку, гомологичную произвольно данной точкѣ на плоскости инволюціи, если примемъ ее за вершину параллелограма, противоположную той точкѣ, въ которой пересѣкаются ортогональныя проекціи обѣихъ осей коллинеаціи, а двѣ стороны параллелограма совпадающими съ этими ортогональными проекціями; въ такомъ случаѣ искомое направленіе есть направленіе другой діагонали этого параллелограма. Такимъ образомъ получаемъ направленіе прямой, гомологичной всякой данной, по точкѣ ея пересѣченія съ плоскостью инволюціи.

Въ заключеніе отмѣчу, что если обѣ оси коллинеаціи взаимноперпендикулярны и одна изъ нихъ безконечно-удалена, то другая ось есть двойная ось симметріи, и все преобразованіе этой системы сводится къ повороту около этой оси на 180°.

Въ разсмотрѣнномъ случаѣ осевой коллинеаціи мы имѣемъ линейную секунду самомоколлинеарныхъ лучей, и всѣ они пересѣкаются двумя осями коллинеаціи, которые отмѣчаютъ на каждомъ изъ нихъ двѣ вещественныя двойныя точки инволюціи. Въ концѣ концовъ вся коллинеація опредѣляется двумя осями какъ геометрическими мѣстами двойныхъ точекъ на всѣхъ самоколлинеарныхъ лучахъ, а для опредѣленія полной ихъ совокупности необходимо и достаточно имѣть четыре такіе луча то-есть четыре прямыя произвольнаго положенія въ пространствѣ.

Однако, если даны такія четыре прямыя, то не всегда онѣ пересѣкаются двумя то-есть опредѣляютъ на каждомъ изъ нихъ инволюцію съ вещественными двойными точками (по номенклатурѣ Штейнера — гиперболическую). Ясно, что если на одномъ изъ нихъ мы получимъ инволюцію съ мнимыми двойными точками, то таковая получится и на всѣхъ четырехъ, а слѣдовательно и на самоколлинеарныхъ лучахъ всей линейной секунды.

Такъ какъ раньше [1]) именно этотъ случай мною не былъ разсмотрѣнъ, то я сдѣлаю это теперь для выясненія построеній коллинеаціи съ двумя мнимыми осями.

Какъ въ разсмотрѣнной системѣ вмѣсто произвольныхъ четырехъ самоколлинеарныхъ лучей мы могли бы произвольно взять двѣ изъ нихъ, но совокупно съ принадлежащею каждому изъ нихъ инволюціею, или точнѣе, съ указаніемъ точекъ пересѣченія ихъ осями коллинеаціи, такъ въ подлежащемъ теперь случаѣ мы можемъ произвольно задаться двумя самоколлинеарными лучами совокупно съ принадлежащею имъ инволюціею съ мнимыми двойными точками (эллиптическою по Штейнеру).

Двѣ такія инволюціи вполнѣ опредѣляютъ всю линейную секунду самоколлинеарныхъ лучей.

Для доказательства мы опять полярно преобразуемъ нашу систему по отношенію къ какой-нибудь коносекундѣ, получимъ снова два луча, но уже не съ инволюціями точекъ на нихъ, а съ инволюціями плоскостей, проходящихъ чрезъ нихъ, а такъ какъ эти инволюціи плоскостей на тѣхъ же лучахъ даютъ перспективны инволюціи точекъ, то будемъ одновременно имѣть и инволюціи точекъ на лучахъ.

Слѣдовательно, обратно, и въ данномъ случаѣ, кромѣ инволюціи на лучахъ, имѣемъ еще перспективныя инволюціи плоскостей, проходящихъ чрезъ оба луча.

Если чрезъ произвольную точку пространства и оба луча проведемъ двѣ плоскости, то получимъ въ пересѣченіи самоколлинеарный лучъ, проходящій чрезъ данную точку, а каждый изъ данныхъ отмѣтитъ на ней по точкѣ, A и B; въ такомъ случаѣ плоскости, проходящія послѣдовательно чрезъ одинъ

[1]) Въ статьѣ «О системахъ, коихъ линейныя примы опредѣляются тремя элементами», эти Записки I.I, стр. 309

лучъ и чрезъ сопряженныя точкамъ A и B точки A′ и B′, другого отмѣтятъ на построенномъ третьемъ лучѣ сопряженныя точки инволюціи на немъ, чѣмъ опредѣлится и вся искомая на немъ инволюція, а съ нею и точка, сопряженная данной.

Произведя полярное преобразованіе, выведемъ соотвѣтственное построеніе плоскости, гомологичной произвольной данной плоскости.

Для этого сначала опредѣлимъ точки пересѣченія данной плоскости съ данными двумя лучами. Эти двѣ точки опредѣлятъ ось линейной примы плоскостей, которой принадлежатъ и плоскости, проходящія чрезъ эту ось и оба луча. Пусть эти плоскости a и b; въ такомъ случаѣ по опредѣленнымъ точкамъ лучей, найдемъ и сопряженныя плоскости a' и b' этой примы. Парами же a съ a' и b съ b' вполнѣ опредѣляется инволюція плоскостей этой примы, а слѣдовательно и плоскость, сопряженная данной.

Въ осевой коллинеаціи съ мнимою инволюціей (эллиптической) никакіе два самоколлинеарные луча не пересѣкаются. Если бы это случилось, то точка пересѣченія лучей была бы самоколлинеарною точкою, что недопустимо. Поэтому, и принимая во вниманіе, что полная совокупность такихъ лучей есть линейная секунда, такіе лучи представлены во всѣхъ направленіяхъ пространства. Такъ какъ въ каждой плоскости имѣется одинъ единственный самоколлинейный лучъ, то значитъ въ числѣ ихъ долженъ быть и единственный безконечно-удаленный лучъ.

Отсюда заключаемъ, что коллинеацію съ мнимою инволюціей мы можемъ охарактеризовать и двумя такими самоколлинеарными лучами, изъ которыхъ одинъ безконечно удаленный въ горизонтальной плоскости, а другой вертикальный. Хотя эти два луча и есть настоящіе самоколлинеарные, и никоимъ образомъ не оси коллинеаціи съ вещественной инволюціей, но какъ два особые луча, характеризующіе симметрію системы мы могли бы ихъ условно назвать осями мнимой коллинеаціи (условное сокращеніе коллинеаціи съ мнимою инволюціей).

Мы видимъ, что эти системы имѣетъ центръ, три проходящія чрезъ него двойныя оси симметріи и три плоскости симметріи, проходящія попарно чрезъ двѣ оси симметріи.