39. Основныя черты новой Геометріи.

(Вступительная лекція въ курсъ новой геометріи, читанный въ 1912 году).

Е. С. Федорова.

(Доложено 13 февраля 1912 г.).

Когда нужно построить домъ, соорудить какой либо приборъ или машину, провести дорогу и пр. предварительно составляютъ чертежи, состоящіе изъ плана, фасадовъ, профилей и т. п.

Каждый чертежъ на бумагѣ представляетъ извѣстную совокупность точекъ и эти изображенныя точки отвѣчаютъ или опредѣленнымъ точкамъ, имѣющимся въ природѣ напр. при составленіи плановъ и профилей или соотвѣтственнымъ точкамъ предполагаемаго сооруженія, которое имѣетъ еще быть осуществленнымъ, а для самаго осуществленія и воспроизводятся точные чертежи; когда сооруженіе будетъ осуществлено, то мы получимъ дѣйствительное соотвѣтствіе точекъ на чертежахъ и точекъ на сооруженныхъ предметахъ.

Но только на моделяхъ, воспроизводимыхъ въ натуральную величину мы имѣемъ дѣйствительное тождество въ соотношеніи точекъ модели и точекъ сооруженія; то же будетъ и въ планахъ и профиляхъ, воспроизведенныхъ въ натуральную величину. Такое воспроизведеніе составляетъ скорѣе рѣдкое исключеніе. Въ громадномъ же большинствѣ случаевъ устанавливается масштабъ, и когда изображаемые предметы очень велики, напр. при изображеніи мѣстности, зданій, то въ изображеніи соотвѣтственныя точки, изображающія реально существующія точки, откладываются весьма сближенными, и чѣмъ крупнѣе изображаемый предметъ, тѣмъ менѣе берется масштабъ. Во всѣхъ случаяхъ имѣется соотвѣтствіе точекъ изображаемаго и изображеннаго, и для всякаго, кто умѣетъ разбирать чертежи, такое сближеніе точекъ не вызываетъ никакого затрудненія въ пониманіи изображаемаго.

Часто изображеніе обладаетъ подобіемъ съ изображаемымъ, напр. при составленіи плановъ. Но иногда и это условіе не выполняется. Напр. при изображеніи профили полотна желѣзной дороги берутся два и притомъ очень сильно отличающіеся масштаба: одинъ для горизонтальныхъ проекцій, а другой для вертикальныхъ; чтобы изобразить верстовыя разстоянія на чертежѣ, приходится уменьшать изображеніе въ горизонтальныхъ проекціяхъ въ весьма значительной мѣрѣ; но для вертикальнаго масштаба, гдѣ дѣло идетъ о разницахъ въ небольшое число сажень, уменьшеніе размѣровъ дѣлается значительно слабѣе. Понятно, что при такихъ условіяхъ подобіе между изображаемымъ и изображеннымъ уже не сохраняется; тѣмъ не менѣе полное однозначное соотвѣтствіе между точками изображаемаго и изображенія сохраняется безусловно.

Такое соотношеніе точекъ получило названіе проективности, а введеніе этого понятія непосредственно ведетъ за собою постановку вопросовъ о возможныхъ видахъ этой проективности.

Сначала поставимъ себѣ этотъ вопросъ для простѣйшаго мыслимаго случая такихъ соотношеній. Положимъ, имѣемъ рядъ точекъ на одной прямой и нужно рѣшить, какими рядами точекъ мы можемъ замѣнить ихъ на другой прямой, чтобы условіе соотвѣтствія, и притомъ однозначнаго, то есть проективность, удовлетворялась.

Легко понять, что такой вопросъ въ самомъ общемъ видѣ разрѣшается установленіемъ простого линейнаго соотношенія между координатами точекъ той и другой системы.

Возьмемъ въ обоихъ рядахъ точекъ по одной постоянной, которыя мы соотвѣтственно примемъ за начало координатъ на соотвѣтственныхъ прямыхъ и означимъ перемѣнныя координаты точекъ обѣихъ системъ соотвѣтственно чрезъ x и x'.

Такъ какъ только линейное соотношеніе то есть выраженіе связи координатъ точекъ уравненіемъ

первой степени можетъ всегда дать однозначное рѣшеніе, то можемъ сказать, что въ самомъ общемъ видѣ поставленная задача рѣшается уравненіемъ

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \qquad 1)$$

Это уравненіе именно и есть уравненіе первой степени по отношенію къ обѣимъ перемѣннымъ и притомъ написанное въ самомъ общемъ видѣ.

Изъ него выводимъ:

$$x = -\frac{Cx' + D}{Ax' + B} \text{ и } x' = -\frac{Bx + D}{Ax + C} \qquad 2)$$

Уравненіе 2) показываетъ въ самомъ общемъ видѣ, какъ по данной величинѣ координаты одной системы мы однозначно выводимъ соотвѣтственную координату другой системы.

Въ частности, изъ этихъ выраженій мы усматриваемъ, что въ устанавливаемомъ такимъ образомъ соотвѣтствіи точекъ 1) одной и той же точкѣ (если опредѣленнымъ образомъ совмѣстимъ обѣ системы точекъ на одной и той же прямой) въ другой системѣ получимъ двѣ различныя точки, смотря потому, за точку какой системы примемъ первую и 2), что въ каждой системѣ имѣется по одной спеціальной точкѣ, которой въ другой системѣ проективна точка безконечно-удаленная.

Эти особыя точки есть:

$$x_0 = -\frac{C}{A} \text{ и } x_0' = -\frac{B}{A} \qquad 3)$$

Конечно, коэффиціентамъ уравненія 1) мы можемъ придавать какія-угодно численныя значенія, и всегда вообще дѣлаемые выводы будутъ одинаково справедливы.

Но изъ равенствъ 3) усматриваемъ особый случай, когда $A = 0$, потому что только въ этомъ случаѣ мы получаемъ $x_0 = \infty$ и $x_0' = \infty$ то есть обѣ особыя точки обѣихъ системъ становятся безконечно-удаленными, или иначе, что только при этомъ условіи безконечно-удаленнымъ точкамъ одной системы проективны также безконечно-удаленныя точки и другой системы.

Такія системы будутъ особыя, и для нихъ уравненіе 1) упростится и приметъ форму

$$Bx + Cx' + D = 0 \qquad 4)$$

Пользуясь произвольностью взятыхъ началъ координатъ въ обѣихъ системахъ, мы можемъ упростить это уравненіе въ еще большей мѣрѣ если примемъ въ нихъ за общее начало координатъ точки самопроективныя, или иначе, если такъ наложимъ одну систему на другую, что обѣ точки, принятыя за начала координатъ, были проективны другъ съ другомъ и совпадали бы въ одну. Тогда ясно, что, придавъ въ 4) значеніе $x = 0$, мы должны получить также $x' = 0$, а это возможно лишь тогда, если $D = 0$; и тогда уравненіе 4) приметъ возможный простѣйшій видъ

$$Bx + Cx' = 0, \text{ или иначе } x = kx' \qquad 5)$$

Это выражаетъ простую пропорціональность координатъ точекъ обѣихъ системъ, а слѣдовательно и подобіе въ ихъ расположеніи. Это и есть какъ разъ одинъ изъ упомянутыхъ выше случаевъ изображеній, подобныхъ изображаемому.

Эти двѣ системы относятся другъ къ другу: одна какъ однородно растянутая другая, и слѣдовательно другая какъ однородно сжатая первая, что и составляетъ сущность подобія обѣихъ системъ.

Но даже въ этомъ простѣйшемъ выраженіи ихъ соотношенія мы видимъ, что каждой данной точкѣ будутъ проективны двѣ различныя точки, смотря потому, отнесемъ ли ее къ первой или второй системѣ.

Теперь перейдемъ къ общему случаю, когда коэффиціентъ A не равенъ нулю. И въ этомъ случаѣ мы можемъ уравненіе 1) представить въ упрощенномъ видѣ. Для этого совмѣстимъ обѣ особыя точки этихъ системъ и примемъ такую совмѣщенную точку за начала координатъ обѣихъ системъ.

Тогда, принявъ $x = 0$, должны получить $x' = \infty$, и также принявъ $x' = 0$ должны получить $x = \infty$.

Изъ равенствъ 2) видимъ, что удовлетвореніе этихъ двухъ условій получится лишь тогда, когда $B = 0$ и $C = 0$, а тогда уравненіе 1) приметъ видъ:

$$Axx' + D = 0 \text{ или иначе } xx' = k \qquad 6)$$

Теперь мы въ первый разъ видимъ, что какой-нибудь точкѣ, безразлично, будемъ ли мы относить ее къ одной или другой системѣ, всегда проективна одна и та же точка. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ системы приведены въ особое положеніе, которое геометры условились называть положеніемъ инволюціи, и тогда обѣ системы, взятыя вмѣстѣ, называются инволюціей точекъ.

Изъ уравненія 6) мы видимъ, что въ такой инволюціи точекъ можемъ найти и такія особыя точки, которыя совпадаютъ съ проективными имъ точками; такія точки будутъ самопроективными или двойными точками инволюціи. Если для одной изъ нихъ примемъ $x = x_0$, то и для другой, какъ совпадающей, также имѣемъ $x' = x_0$ то есть $x_0^2 = k$ или $x_0 = \pm\sqrt{k}$.

Это рѣшеніе показываетъ, что такихъ двойныхъ точекъ не одна, а двѣ, и обѣ находятся на равномъ разстояніи отъ начала, и обѣ вещественны, если величина k положительна. Если же k отрицательна, то мы получаемъ два мнимыя рѣшенія. Но мнимое

рѣшеніе не есть отсутствіе рѣшенія, но должно имѣть смыслъ, который предстоитъ выяснить. Одно уже напередъ ясно, а именно что въ обѣихъ совмѣщенныхъ на общей прямой системахъ нѣтъ ни одной пары вещественно совпадающихъ точекъ, хотя, въ силу инволюціи, всегда и всякой точкѣ проективна одна и та же точка другой системы.

Въ данномъ случаѣ опредѣлить смыслъ полученнаго мнимаго рѣшенія весьма просто. Для этого достаточно представить себѣ, что мы одну изъ системъ перевернули около начала координатъ. Тогда каждая координата x' нѣкоторой точки этой системы перемѣнитъ знакъ, и слѣдовательно перемѣнитъ знакъ и произведеніе xx', а потому, если раньше xx' равнялась отрицательной величинѣ k, то теперь то же произведеніе станетъ положительнымъ, и мы получимъ для двойныхъ точекъ не мнимое, а вещественное рѣшеніе.

Итакъ, мнимое рѣшеніе показываетъ, что по отношенію къ вещественному одна система точекъ перевернута около начала координатъ, или иначе, что мнимыя двойныя точки есть тѣ двѣ точки обѣихъ системы, которыя, будучи проективными, находятся на одинаковомъ разстояніи отъ совмѣщенныхъ въ одну противуположныхъ (то есть тѣхъ особыхъ, которыя въ другой системѣ проективны безконечно удаленнымъ) точекъ.

Такимъ образомъ, смотря потому, какъ мы наложимъ другъ на друга обѣ системы, мы можемъ различать два различные вида инволюціи точекъ: 1) инволюція 1-го вида, то есть съ вещественными двойными точками, и 2) инволюція 2-го вида, то есть съ мнимыми двойными точками.

Кромѣ уравненія 6), мы можемъ выразить тѣ же два вида инволюціи еще и иначе.

Означимъ разстояніе двойныхъ точекъ отъ начала чрезъ r, а изъ пары проективныхъ точекъ, соотвѣтственныя разстоянія одной отъ двойныхъ точекъ означимъ буквами a и b, а другой буквами c и d.

Въ такомъ случаѣ, для 1-го вида инволюціи имѣемъ:

$$a = r + x, \quad b = r - x, \quad c = r + x', \quad d = r - x',$$

а отсюда находимъ:

$$ad = (r + x)\ (r - x') = -rx' + r^2 - xx' + rx$$
$$bc = (r - x)\ (r + x') = rx' + r^2 - xx' - rx$$

и слѣдовательно:

$$ad + bc = 2\ (xx' - r^2) = 0 \text{ (такъ какъ } r^2 = k),$$

то есть

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Иногда это отношеніе выражается такъ: $(ab\bar{c}d)$.

То, что составляетъ первую часть равенства, называется двойнымъ отношеніемъ, и мы видимъ, что оно равно отрицательной единицѣ. Такое двойное отношеніе называется гармоническимъ; выраженіемъ проективности точекъ въ инволюціи перваго вида служитъ, слѣдовательно, гармоническое отношеніе, а двѣ пары точекъ (въ данномъ случаѣ двойныя точки и какія-либо двѣ проективныя точки инволюціи), связанныя гармоническимъ отношеніемъ, называются гармоническими точками, или еще выражаются такъ, что одна ихъ пара гармонически раздѣлена другою парою, напр. въ выраженіи $(abcd)$ пара точекъ ab гармонически раздѣляется парою cd.

Обратимъ вниманіе еще на то, что по ур. (6), при $x = 0$, $x' = \infty$ (и обратно), и значитъ если третья точка находится въ точности посрединѣ между двумя другими, то сопряженная съ нею четвертая гармоническая есть точка безконечно-удаленная (и обратно).

Для второго вида инволюціи, то есть, когда одну изъ системъ точекъ мы перевернемъ, то получимъ:

$$a = r + x, \quad b = r - x, \quad c = r - x', \quad d = x' + r,$$

а отсюда видимъ:

$$ac = -rx' + r^2 - xx' + rx$$
$$bd = rx' + r^2 - xx' - rx$$

и слѣдовательно

$$ac + bd = 2\ (xx' - r^2) = 0,$$

то есть

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = -1.$$

Это гармоническое отношеніе второго вида характеризуетъ инволюцію второго вида, въ которой точкамъ одной системы, непрерывно слѣдующимъ въ одномъ направленіи, проективны точки другой системы, слѣдующія другъ за другомъ въ томъ же направленіи, такъ что нигдѣ, на всемъ протяженіи системы не получается ни одной пары совпадающихъ другъ съ другомъ проективныхъ (то есть двойныхъ) точекъ.

Это простѣйшее отношеніе точекъ двухъ проективныхъ системъ есть только простѣйшій примѣръ того однозначнаго соотвѣтствія элементовъ двухъ геометрическихъ системъ, изученіе котораго составляетъ одну изъ характернѣйшихъ задачъ новой геометріи.

Прежде всего ясно, что такое однозначное соотношеніе мы отъ системъ точекъ на прямой можемъ сначала распространить какъ на системы точекъ, на плоскости и въ пространствѣ, а затѣмъ и на системы не только точекъ, но и какихъ либо

другихъ геометрическихъ элементовъ, а такихъ системъ имѣется безграничное множество.

Нужно, однако, сначала точнѣе опредѣлить, что слѣдуетъ подразумѣвать подъ элементами геометрическихъ системъ и какъ выводить соотвѣтствіе между элементами разныхъ системъ.

Подъ элементомъ какой-либо системы мы должны подразумѣвать такой геометрическій образъ, опредѣленіе котораго даетъ возможность исчерпывающимъ образомъ вывести совокупность всѣхъ, по тому же опредѣленію составленныхъ, образовъ, и эта совокупность всегда есть безконечное множество той или другой ступени.

Конечно, точку можно принять за простѣйшій геометрическій образъ, и такихъ геометрическихъ образовъ мы можемъ вывести для всего пространства какъ безконечную совокупность третьей ступени. Если бы мы ограничились изученіемъ точекъ на плоскости, то полная совокупность элементовъ была бы безконечное множество второй ступени.

Мы могли бы принять за элементъ и двѣ произвольно взятыя точки, или, что все равно, отрѣзокъ, ограниченный этими точками. Полная совокупность такихъ элементовъ представляла бы уже значительно высшую ступень; и именно за одну точку мы могли бы взять нѣкоторую произвольную точку въ пространствѣ, и тогда совокупность только тѣхъ отрѣзковъ, которые имѣютъ эту точку одною изъ своихъ конечныхъ, была бы уже совокупность третьей ступени, а принявъ во вниманіе, что и за вторую конечную точку мы также могли бы принять любую изъ точекъ пространства, мы ясно увидимъ, что система такихъ отрѣзковъ въ пространствѣ, есть уже безконечно большая совокупность шестой ступени.

Взявъ за элементъ три точки, или, что все равно, трехугольникъ, мы получимъ геометрическую систему девятой ступени.

Но, если мы вмѣсто отрѣзка возьмемъ векторъ, имѣющій любую точку пространства своею начальною точкою, но направленіе коего дано разъ навсегда для всей системы, то получимъ систему параллельныхъ векторовъ уже только четвертой ступени; въ самомъ дѣлѣ, начальною точкою его можетъ быть любая точка пространства, но конечная точка того же вектора можетъ находиться лишь на прямой, проходящей чрезъ эту начальную точку параллельно разъ навсегда данному для системы направленію, а такихъ конечныхъ точекъ только безконечная совокупность первой ступени.

Въ частности, если возьмемъ систему параллельныхъ векторовъ на плоскости, то получимъ безконечную совокупность той же ступени, что и точекъ въ пространствѣ; но такъ какъ такіе векторы мы строимъ, не выходя изъ предѣловъ плоскости, то сама собою возникаетъ возможность установленія однозначнаго соотвѣтствія, то есть проективности между точками пространства и параллельными векторами на плоскости, а это, въ свою очередь, влечетъ за собою возможность изображать такими векторами соотвѣтственныя точки пространства, то есть производить настоящій пространственный чертежъ, не выходя изъ предѣловъ плоскости бумаги. Преимущества такого пространственнаго изображенія бросаются въ глаза.

Рудники, изображенные такимъ образомъ, становятся какъ бы прозрачными и на каждой изображенной на нихъ точкѣ видна не только дѣйствительная (напр. вертикальная) проекція этой точки, но и глубина ея нахожденія.

Чтобы достичь этого эффекта, достаточно проектировать на чертежѣ осевыя точки какой-нибудь горной выработки (штрека, штольни и т. п.), которая въ совокупности представляетъ собою нѣкоторую непрерывную линію, но рядомъ съ этой линіею, какъ совокупностью начальныхъ точекъ векторовъ, проводятъ и другую, представляющую совокупность конечныхъ точекъ тѣхъ же векторовъ, всегда имѣющихъ одно разъ навсегда данное на чертежѣ направленіе, причемъ направленіе и длина этихъ векторовъ показывали бы превышеніе или, наоборотъ, нахожденіе этихъ точекъ ниже разъ навсегда принятаго для чертежа уровня; ради наглядности, эти двѣ линіи—начальныхъ или конечныхъ точекъ векторовъ—мы могли бы отмѣчать соотвѣтственно чернымъ или напр. краснымъ цвѣтомъ.

Этотъ чертежъ былъ бы настоящимъ математическимъ и допускалъ бы непосредственное графическое рѣшеніе пространственныхъ задачъ, встрѣчающихся на рудничной практикѣ, напр. отысканіе линіи простиранія и величины угла паденія трещинъ, жилъ, пластовъ и пр.

Въ частности, по этому чертежу легко опредѣлить разстояніе между каждыми двумя точками пространства, изображенными двумя параллельными векторами, если примѣнить теорему о трехъ перпендикулярахъ и сдѣлать соотвѣтствующее построеніе.

Если бы вмѣсто параллельныхъ векторовъ на плоскости мы приняли бы за элементы векторы вообще, то число элементовъ системы стало бы безконечно большимъ четвертой ступени и изображаемыя ими точки соотвѣтствовали бы точкамъ пространства четырехъ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, изъ каждой точки плоскости, какъ начальной точки вектора мы для построенія всѣхъ векторовъ должны были бы

провести радіусы во всѣхъ направленіяхъ, а на каждомъ изъ нихъ мы могли бы отложить всякія длины отъ нуля до безконечно большой. Конечно, чертежъ, на которомъ было бы изображено извѣстное количество векторовъ, по существу изображающихъ положеніе точекъ пространства четвертаго измѣренія, не могъ бы сопровождаться тѣмъ наглядным представленіемъ о положеніи точекъ въ пространствѣ такъ, какъ мы наглядно можемъ себѣ представить только пространство трехъ измѣреній, но, все-таки, чертежъ имѣлъ бы столь же строгій математическій характеръ, какъ и въ случаѣ параллельныхъ векторовъ.

Логически обобщивъ теорему о трехъ перпендикулярахъ на четыре измѣренія, мы также могли бы рѣшать задачи въ пространствѣ четвертаго измѣренія и, въ частности, находить разстояніе между какими угодно изображаемыми точками. Въ общемъ, рѣшеніе задачъ было бы, конечно, гораздо сложнѣе, какъ это можно видѣть изъ спеціальнаго изложенія этого предмета [1]).

Но могутъ-ли имѣть какое-нибудь реальное значеніе такія построенія?

Вообще о значеніи научныхъ истинъ говорить трудно, такъ какъ рѣдко можно предвидѣть, къ какимъ неожиданнымъ результатамъ можетъ привести такая истина, тѣмъ болѣе, что такіе результаты сказываются иногда въ очень долгомъ времени послѣ того, какъ она открыта. Всегда важно лишь одно—убѣдиться, что это истина и предоставитъ будущему выясненіе ея значенія.

Но именно въ разсматриваемомъ случаѣ нетрудно предвидѣть и непосредственные результаты въ сравнительно близкомъ будущемъ.

Въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ науки для извлеченія выводовъ изъ дѣлаемыхъ наблюденій является почти неизбѣжною необходимость изобразить эти наблюденія графически на чертежѣ или въ видѣ геометрическихъ пространственныхъ моделей. Наибольшимъ распространеніемъ пользуются для этой цѣли проведеніемъ кривыхъ, строящихся по двумъ системамъ координатъ. Такой способъ изображенія допустимъ только въ простѣйшемъ случаѣ, когда въ наблюдаемомъ явленіи независимо входятъ два фактора, положимъ расширеніе отъ теплоты. Наблюдая это расширеніе, мы можемъ придавать абсциссѣ численное значеніе наблюдаемыхъ температуръ, а на ординатахъ откладывать численное значеніе наблюдаемыхъ расширеній; но такія простыя соотношенія между явленіями являются скорѣе какъ исключенія; въ большинствѣ же случаевъ на результатъ явленія оказываетъ вліяніе нѣсколько независимыхъ факторовъ, и вотъ обычное простое изображеніе становится непримѣнимымъ, и является настоятельная потребность въ болѣе сложныхъ изображеніяхъ. Какъ разъ, въ настоящее время такую потребность начинаютъ ощущать спеціалисты физической химіи, почему и нужно ожидать, что они скоро воспользуются кое-чѣмъ изъ той неисчерпаемой сокровищницы методовъ изображенія, какая заключается въ новой геометріи.

Изъ изложеннаго видимъ, что мы можемъ принимать за элементы геометрическихъ системъ и какъ по принятымъ элементамъ опредѣляется соотвѣтственная ступень. Мы видѣли, что эти ступени могутъ быть различны и выражаются довольно большими числами.

Въ этомъ проявляется уже различіе разныхъ геометрическихъ системъ; но изъ каждой системы мы можемъ выдѣлять ея части, представляющія также самостоятельныя системы. Напр. вмѣсто полной совокупности точекъ мы можемъ разсматривать только точки одной единственной плоскости, и хотя такая система не будетъ полною, но ее можно разсматривать какъ самостоятельную, и тогда ея ступень будетъ выражаться не числомъ 3, а числомъ 2. Какъ разъ такая система въ теченіе всей исторіи человѣческой культуры съ самыхъ отдаленныхъ и вплоть до настоящаго времени пользовалась особымъ вниманіемъ математиковъ и ученіе о ней названо планиметріей.

Также, какъ мы видѣли, мы вмѣсто полной системы параллельныхъ векторовъ можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ только тою частью, для которой векторы находятся въ одной плоскости. Эта система есть система третьей ступени, и она проявляетъ особую близость къ обыкновенной полной системѣ точекъ, за предѣлы которой до недавняго времени человѣческая мысль и не заходила. Понятно, что всегда наибольшую близость представляютъ системы одинаковой ступени. Однако такого рода близость можетъ быть установлена между всякою системою высшей ступени и какой-нибудь системою низшей ступени, если изъ первой выдѣлить часть той же низшей ступени.

Въ частности, изъ всякой системы можно выдѣлить часть, представляющую первую ступень, какъ съ этого мы и начали, выдѣливъ изъ полной системы точекъ систему точекъ на прямой, и тогда между этими частями всѣхъ системъ должна существовать извѣстная близость, близость такого же ха-

[1]) «Простое и точное изображеніе точекъ пространства четвертаго измѣренія на плоскости». Записки Горн. Инст. II. 213.

рактера какъ, вообще, между системами одной и той же ступени.

Но выдѣлить такую часть составляетъ уже спеціальную задачу, которая для каждой системы должна рѣшаться особо. Но зато, когда мы умѣемъ для какой-либо системы выдѣлять такія ея части, то это влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, и выдѣленіе частей болѣе высокихъ ступеней.

Однако, съумѣвъ сдѣлать такое выдѣленіе, мы этимъ еще не разрѣшаемъ вполнѣ задачи установленія проективности между элементами такой части и точками на прямой. Но мы рѣшимъ и эту задачу, если еще съумѣемъ по тремъ произвольнымъ элементамъ такой части опредѣлить четвертую гармоническую.

Вѣдь задача состоитъ въ томъ, чтобы каждый произвольный элементъ такой части привести въ проективную связь съ опредѣленною точкою прямой.

Если бы эта вторая система была также система точекъ, то выдѣленная въ ней часть также представила бы систему точекъ на прямой, а потому задача сводилась бы къ установленію проективности между точками одной и другой прямой. Но рѣшеніе этой задачи уже было приведено выше. Мы возьмемъ на первой прямой произвольно три точки A, B, C и будемъ считать проективно связанными съ нимъ также произвольныя три точки A′, B′, C′ на другой прямой. Найдемъ на первой четвертую гармоническую D то есть, чтобы имѣло мѣсто двойное отношеніе (*abcd*) и пара CD гармонически раздѣлялась парою AB. То же сдѣлаемъ для второй прямой, и получимъ точку D′, удовлетворяющую отношенію (*a′b′c′d′*) то есть, чтобы пара C′D′ гармонически раздѣлялась парою A′B′. Ясно, что точки D и D′ связаны однозначною проективною связью. Мы можемъ слѣдовать этому пріему и дальше до безконечности и тогда получимъ однозначную проективную связь между безконечнымъ числомъ той и другой системы.

Напр. найдемъ точку E изъ отношенія (*acde*) то есть, чтобы пара DE гармонически раздѣлялась парою AC; затѣмъ найдемъ точку F изъ отношенія (*adef*), точку G изъ отношенія (*aefg*) и т. д. и тѣ же операціи продѣлаемъ съ другою системою точекъ, и получимъ послѣдовательно проективно связанныя точки E′, F′, G′....

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ однозначную проективную связь между точками и точками, то есть между системами однородными, и такую связь принято называть гомологичностью.

Но аналогичныя операціи мы можемъ продѣлать съ системы разнородными, и тогда связь получаетъ названіе коррелятивности.

Если подъ буквами A′, B′, C′, D′... мы будемъ подразумѣвать не точки одной прямой, а элементы въ выдѣленной изъ полной системы части, представляющей, сама по себѣ, систему первой ступени, то мы получимъ коррелятивность между точками ABCD и между элементами A′, B′, C′...

Итакъ, какъ видимъ, что при установленіи каждой геометрической системы необходимо выдѣлить часть, которая была бы коррелятивна системѣ точекъ на прямой и умѣть въ такой системѣ по тремъ элементамъ однозначно находить четвертый, гармоническій.

Какъ простѣйшій примѣръ мы можемъ взять систему прямыхъ или лучей на плоскости; задача сводится въ такомъ случаѣ къ отысканію коррелятивности между точками на одной прямой и лучами нѣкоторой ихъ совокупности.

Прежде всего является вопросъ: какую же совокупность лучей нужно взять, чтобы входящіе въ ея состава лучи были коррелятивны точкамъ на прямой?

Изъ элементовъ геометріи мы знаемъ, что полная совокупность точекъ на прямой однозначно опредѣляется какими угодно двумя ея точками. Отсюда слѣдуетъ, что въ коррелятивной системѣ, мы должны выдѣлить такую систему лучей, чтобы она въ полнотѣ опредѣлялась двумя произвольно изъ нея взятыми.

Для столь простой системы рѣшеніе дается непосредственно, потому что мы знаемъ, что двѣ прямыя необходимо пересѣкаются въ одной точкѣ, и чрезъ эту же точку проходитъ безконечная совокупность прямыхъ первой ступени.

Такъ какъ аналогичное построеніе нужно умѣть сдѣлать во всякой изучаемой системѣ, то является надобность отличать спеціальнымъ выраженіемъ такія совокупности.

Такъ какъ эти совокупности первой ступени, то наиболѣе подходящимъ выраженіемъ для нихъ является слово п р и м а; подъ этимъ словомъ будетъ вообще подразумѣваться всякая безконечная совокупность первой ступени, напр. всякая кривая; но изъ всѣхъ такихъ совокупностей имѣется только одна, которая вполнѣ и однозначно опредѣляется двумя элементами, и таковую будемъ называть л и н е й н о ю п р и м о ю. Въ частности, слѣдовательно, прямая линія есть линейная прима точекъ. Теперь же мы опредѣлили линейную приму лучей на плоскости по двумъ произвольно даннымъ, а именно совокупность всѣхъ лучей, исходящихъ изъ одной точки.

Если мы такую линейную приму лучей пересѣчемъ какою-либо прямою, то на ней установимъ коррелятивность ея точекъ съ пересѣкающими лучами, потому что теперь каждая точка пересѣченной

прямой дѣйствительно однозначно связана съ опредѣленнымъ лучемъ найденной линейной примы лучей, а такъ какъ при коррелятивности линейныхъ примъ коррелятивны и гармоническіе элементы, то такимъ образомъ рѣшается вопросъ о построеніи четырехъ гармоническихъ лучей. Мы видимъ, что для этого достаточно пересѣчь систему лучей произвольною прямою; если даны въ этой системѣ три луча, то они на прямой отмѣтятъ три точки; построивъ же на прямой четвертую гармоническую, мы тѣмъ самымъ найдемъ и четвертый гармоническій лучъ.

Изъ этого соотношенія вытекаетъ не только простой способъ построенія четвертаго гармоническаго луча по тремъ даннымъ, но и четвертой гармонической точки.

Если даны три луча a, b, c и нужно построить четвертый гармоническій, то мы проводимъ прямую, напр. параллельную лучу a; эта прямая пересѣчетъ лучъ, слѣдовательно, въ безконечно удаленной точкѣ, и тогда три другія точки должны ограничивать два равные отрѣзка; въ пересѣченіи съ b и c мы имѣемъ точки B и C; отложивъ BD=CB, мы найдемъ, что пара CD гармонически раздѣляетъ пару AB; слѣдовательно и лучъ d, проходящій чрезъ точку D, есть искомый четвертый гармоническій.

Если даны три точки A, B, C и нужно найти четвертую гармоническую D, мы чрезъ пары точекъ AC и BC проводимъ два такіе круга, которыхъ вписанные углы, опирающіеся на хорды AC и BC были бы равны; эти круги, кромѣ точки C, пересѣкаются еще въ нѣкоторой точкѣ O, и тогда лучъ OD, перпендикулярный къ OC, отмѣтитъ на данной прямой четвертую гармоническую точку, и пара CD будетъ гармонически раздѣлять пару AB. Впрочемъ, послѣднюю задачу чаще рѣшаютъ такимъ образомъ: принимаютъ AB за діаметръ круга; если C находится внутри AB, то проводятъ изъ C перпендикуляръ до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ O, и тогда касательная къ кругу въ точкѣ O отмѣчаетъ на прямой искомую четвертую гармоническую D; если C находится внѣ діаметра AB, то изъ C проводятъ касательную къ кругу, а изъ какой-либо точки касанія O опускаютъ перпендикуляръ, который и отмѣчаетъ искомую четвертую гармоническую D.

За второй примѣръ возьмемъ систему плоскостей. Двѣ плоскости пересѣкаются въ прямой; ясно, что эта прямая, какъ общая прямая пересѣченія безконечнаго множества плоскостей, однозначно опредѣляетъ эту совокупность первой ступени, которая, слѣдовательно, будетъ линейною примою плоскостей. Если пересѣчемъ эту совокупность какою-либо прямою, то въ пересѣченіи получимъ линейную приму точекъ, и притомъ непосредственно устанавливается коррелятивность между плоскостями и точками ихъ пересѣченія. Отсюда видимъ, какъ по тремъ плоскостямъ одной линейной примы найти четвертую гармоническую плоскость; ясно, что четвертая гармоническая плоскость пересѣчетъ линейную приму точекъ въ четвертой гармонической точкѣ.

Конечно, можно принять за элементы системы и круги; но уже тутъ мы получаемъ усложненіе въ томъ смыслѣ, что изъ нихъ можно вывести не одну, а двѣ системы на плоскости.

Пусть даны два пересѣкающіеся круга. Ясно, что безконечная совокупность круговъ, проходящихъ чрезъ тѣ же двѣ общія точки пересѣченія, вполнѣ удовлетворяетъ опредѣленію линейной примы круговъ. Эта совокупность круговъ будетъ удовлетворять тому условію, что всякая точка на прямой, проходящей чрезъ обѣ точки пересѣченія, будетъ имѣть одинаковую степень относительно всѣхъ круговъ линейной примы. Здѣсь подъ выраженіемъ степень точки относительно круговъ или иначе степень круговъ въ этой точкѣ подразумѣвается произведеніе двухъ отрѣзковъ, имѣющихъ концами эту точку и двѣ точки какого-нибудь пересѣкаемаго круга на той же прямой.

Если бы были даны два круга не пересѣкающіеся, то опредѣляемая ими линейная прима, казалось бы должна была опредѣляться иначе, потому что въ этомъ, случаѣ не имѣется общихъ точекъ пересѣченія. Но если мы обратимъ вниманіе на другое указанное свойство линейной примы круговъ, то легко и въ этомъ случаѣ найдемъ линейную приму, потому что, какъ увидимъ впослѣдствіи, и въ этомъ случаѣ легко найти такую прямую, всѣ точки которой имѣютъ одинаковую степень относительно обоихъ круговъ, и тогда совокупность всѣхъ круговъ, имѣющихъ въ точкахъ той же прямой одинаковую степень, и составитъ ихъ линейную приму.

Если проведемъ кругъ, перпендикулярно пересѣкающій оба данные круга, то тотъ діаметръ его, который перпендикуляренъ къ линіи центровъ обоихъ круговъ, и есть геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ одинаковую степень, а всѣ круги, коихъ центры находятся на той же прямой, что и два данные и притомъ перпендикулярно пересѣкающіе найденный кругъ, и составляютъ линейную приму. Подробнѣе этимъ займемся въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Но у каждой пары круговъ мы имѣемъ еще два центра подобія: одинъ—подобія внѣшняго, а другой—внутренняго. Если мы будемъ разсматривать кругъ, какъ мѣсто движущейся точки, то можемъ припи-

сать такому движенію два противоположныя направленія; по часовой стрѣлкѣ и обратно.

Такіе круги, которые мы называемъ *векторіальными*, будутъ обладать не двумя, а только однимъ центромъ подобія. Если въ обоихъ данныхъ кругахъ стрѣлка указываетъ на одинаковое направленіе движенія, то считаемъ, что сохраняется только центръ внѣшняго, въ противоположномъ случаѣ только центръ внутренняго подобія.

Если же два круга имѣютъ, при этомъ представленіи только одинъ центръ подобія, то тотъ же центръ имѣетъ и безконечная совокупность круговъ, составляющая приму, вполнѣ однозначно опредѣляемую двумя данными кругами то есть приму линейную.

Напр. если два круга находятся одинъ внѣ другого и имѣютъ стрѣлки, направленныя въ противоположныя стороны, то находимъ одинъ единственный центръ обратнаго подобія, чрезъ который можемъ провести двѣ общія касательныя къ этимъ кругамъ; всѣ круги, центры которыхъ находятся на одной прямой и касательны къ тѣмъ же двумъ прямымъ, составятъ совокупность, вполнѣ удовлетворяющую опрецѣленію линейной примы.

Такимъ образомъ, принявъ круги за элементы системъ, мы различимъ двѣ системы: систему круговъ обыкновенныхъ и круговъ векторіальныхъ.

Аналогично этимъ двумъ системамъ можно вывести для пространства двѣ совершенно различныя геометрическія системы шаровъ: обыкновенныхъ и векторіальныхъ.

Сейчасъ передъ вами отмѣченъ рядъ весьма разнообразныхъ геометрическихъ системъ, и въ каждой изъ нихъ, на подобіе того, что сдѣлано для системы точекъ, можно произвести безграничное множество различныхъ построеній и вывести безграничное множество теоремъ. Если вы вспомните, что, имѣя какую-либо геометрическую систему, мы сейчасъ же изъ нея можемъ вывести другую, если за элементы новой возьмемъ напр. не одинъ, а два элемента предыдущей, вамъ станетъ понятно, что вообще геометрическихъ системъ существуетъ безграничное множество, и ни при какомъ изложеніи нельзя ихъ исчерпать, а можно только ограничиться небольшимъ рядомъ примѣровъ. Но слѣдуетъ ли отсюда, что про тѣ геометрическія системы, которыя ускользали отъ нашего вниманія, мы не можемъ ничего знать, пока такъ же не изучимъ какую-либо изъ нихъ съ основанія, какъ мы изучаемъ напр. систему точекъ?

Въ томъ именно и состоитъ высокая цѣнность новой геометріи, что изъ изученія ея вытекаетъ противоположный выводъ, а именно возможность напередъ предусматривать, и предусматривать съ математическою достовѣрностью, построенія и теоремы во всякой возможной геометрической системѣ, удовлетворяющей извѣстнымъ условіямъ.

Извѣстный геометръ *Шаль* (*Chasles*) однажды сказалъ: дайте мнѣ теорему и я изъ нея сейчасъ выведу другую.

Эту фразу онъ произнесъ, когда выяснилось начало дуализма между двумя системами: системою точекъ и системою плоскостей.

Эту фразу мы можемъ поистинѣ считать историческою, такъ какъ она характеризуетъ состояніе новой геометріи въ то время, то есть около средины прошлаго вѣка и отмѣчаетъ тотъ прогрессъ, который эта дисциплина сдѣлала съ того времени.

Она показываетъ, что въ то время окончательно было выяснено существованіе только двухъ геометрическихъ системъ, такъ какъ всѣ тѣ же теоремы, которыя относятся къ нимъ, относятся безразлично и ко всему безграничному множеству геометрическихъ системъ, хотя бы изъ нихъ было до сихъ поръ перечислено и небольшое число.

Въ настоящее время это утвержденіе должно быть уже выражено въ такой формѣ: „дайте намъ новую теорему и мы выведемъ изъ нея безграничное множество другихъ“; и для этого достаточно безгранично перечислять возможныя геометрическія системы, такъ какъ всякая такая теорема одинаково справедлива для всѣхъ геометрическихъ системъ, по крайней мѣрѣ взятыхъ въ предѣлахъ одной и той же ступени.

Но, съ другой стороны, это утвержденіе нужно и ограничить, такъ какъ въ дѣйствительности не всѣ теоремы и построенія переносятся отъ одной системы на всѣ другія. Напр., не переносятся всѣ теоремы, въ формулированіе которыхъ входятъ элементы мѣры отрѣзковъ или угловъ. Для геометріи точекъ несомнѣнно истинно, что діаметры шара пересѣкаютъ его прямоугольно и дѣлятся въ его центрѣ пополамъ. Но это утвержденіе не имѣетъ никакого опредѣленнаго смысла въ примѣненіи къ системѣ плоскостей; не имѣетъ смысла даже выраженіе отрѣзокъ плоскостей. Переносятся лишь особыя построенія, которыя мы называемъ п о з и ц і о н н ы м и, и основанныя на нихъ теоремы.

Значительная часть содержанія новой геометріи сводится къ выводу такихъ теоремъ, а потому даже при краткомъ изложеніи ея истинъ передъ вами на этихъ лекціяхъ пройдетъ длинный рядъ такихъ теоремъ. Но для того, чтобы вы съ самаго начала могли видѣть характеръ такого переноса те

оремъ на всѣ геометрическія системы, я приведу нѣсколько примѣровъ.

Геометрическую систему мы считаемъ установленною, если мы знаемъ, какъ выводятся линейныя примы и какъ въ каждой изъ нихъ по тремъ элементамъ вывести четвертый гормоническій. Но, какъ мы видѣли раньше, при этомъ условіи мы можемъ установить коррелятивность между элементами всѣхъ системъ, разсматриваемыхъ въ предѣлахъ одной и той же ступени. Для наглядности приведемъ въ коррелятивную связь элементы всѣхъ системъ съ точками.

Проведемъ непрерывную линію или поверхность въ пространствѣ и по связи элементовъ будемъ имѣть коррелятивныя совокупности въ каждой другой системѣ. Въ частности, прямой линіи будутъ коррелятивны линейныя примы, а плоскости-линейныя секунды.

Ясно, что какъ въ плоскости двѣ прямыя всегда пересѣкаются въ одной точкѣ, такъ въ любой линейной секундѣ любой геометрической системы двѣ линейныя примы пересѣкаются въ одномъ единственномъ элементѣ.

Какъ двѣ плоскости пересѣкаются въ прямой, такъ во всѣхъ системахъ (третьей ступени) двѣ любыя линейныя секунды пересѣкаются въ линейной примѣ.

Какъ плоскость пересѣкается съ прямою (если она въ ней не находится) въ одной точкѣ, такъ во всѣхъ упомянутыхъ системахъ линейная секунда пересѣкается съ линейною примою въ одномъ единственномъ элементѣ.

Вѣдь если бы въ системѣ точекъ мы получили въ пересѣченіи только одну точку, а въ какой-либо другой системѣ напр. два элемента, то это выражало бы лишь, что мы на самомъ дѣлѣ не установили одназначнаго соотвѣтствія между точками и этими элементами то есть не выполнили тѣхъ условій, при которыхъ переносъ построеній и теоремъ въ дѣйствительности совершается.

Возьмемъ въ системѣ точекъ какую-нибудь кривую поверхность второго порядка. Въ силу установленной коррелятивности мы построимъ соотвѣтственную квадратичную секунду во всѣхъ другихъ системахъ.

Какъ прямая пересѣкаетъ эту поверхность въ двухъ точкахъ, или касается въ одной точкѣ (если не ляжетъ въ нее цѣликомъ) или наконецъ не имѣетъ съ нею никакихъ общихъ точекъ, такъ коррелятивная квадратичная секунда или пересѣкается произвольно взятою линейною примою въ двухъ элементахъ, или касается ея въ одномъ или вовсе не имѣетъ съ нею общихъ элементовъ.

Плоскость, если пересѣкаетъ такую поверхность то только въ кривой второго порядка. Слѣдовательно во всѣхъ системахъ линейная секунда если пересѣкаетъ такую квадратичную секунду, то только въ квадратичной примѣ.

Какъ въ системѣ точекъ кривая поверхность второго порядка раздѣляетъ всѣ точки пространства на внѣшніе и внутренніе, и только изъ первыхъ къ этой поверхности можно проводить касательныя плоскости, такъ значитъ и во всѣхъ системахъ квадратичная секунда раздѣляетъ всѣ элементы системы на элементы внѣшнія и внутреннія, и только чрезъ первые можно проводить къ ней касательныя линейныя секунды.

Идя дальше, мы легко увидимъ, что и все, что относится къ полюсамъ и полярамъ или полярнымъ плоскостямъ, можетъ быть переносимо безразлично на всѣ геометрическія системы.

Вотъ, хотя бы въ основныхъ чертахъ, характеристика позиціонныхъ построеній.

Но мы при всемъ томъ, можемъ по отношенію къ каждой данной системѣ найти рядъ другихъ системъ, представляющихъ особую близость, почему и названныхъ *родственными*. По отношенію къ такимъ, особенно близкимъ по кореннымъ свойствамъ системамъ, оказывается возможнымъ переносить нетолько позиціонныя построенія и основанныя на нихъ теоремы, но и всякія построенія вообще, *безъ всякихъ исключеній*.

Въ послѣднее время было доказано, что это зависитъ отъ того, можно ли въ двухъ такихъ системахъ такъ установить коррелятивность элементовъ, чтобы нетолько квадратичныя совокупности одной были коррелятивны квадратичнымъ совокупностямъ другой, но чтобы именно сферопримы одной были коррелятивны сферопримамъ другой.

Сферопримою называется такая прима, которая вполнѣ и однозначно опредѣляется тремя элементами, и простѣйшимъ ея примѣромъ является кругъ въ системѣ точекъ.

Мы видѣли, что мы можемъ установить гомологичность между двумя системами точекъ, и въ общемъ случаѣ точкамъ, безконечно удаленнымъ въ одной системѣ, въ другой гомологичны точки, отнюдь не безконечно удаленныя. Въ такихъ двухъ, въ общемъ столь близкихъ другъ другу, системахъ уже нельзя установить такой гомологичности, чтобы кругамъ, какъ опредѣленнымъ совокупностямъ точекъ одной системы всегда были гомологичны совокупности точекъ, также образующія круги, а потому двѣ такія системы не родственны.

Также не родственны между собою и тѣ двѣ

системы, которыя имѣлъ въ виду *Шаль*. Линейной примѣ точекъ то есть прямой коррелятивна линейная прима то есть совокупность плоскостей, пересѣкающихся въ одной прямой.

Но, въ общемъ случаѣ, на каждой прямой имѣется одна спеціальная точка, безконечно удаленная, которую по существу мы можемъ отличать отъ всѣхъ остальныхъ, неспеціальныхъ точекъ. Такого различія между плоскостями гомологичной примы, сдѣлать уже нельзя. Можетъ быть это различіе покажется вамъ и несущественнымъ, но я позволю себѣ только отмѣтить передъ вами, не приводя доказательства, что этого различія достаточно для того, чтобы доказать неродственность этихъ системъ то есть что нельзя между ними установить такой коррелятивности, чтобы кругамъ первой системы всегда были коррелятивны сферопримы второй; имъ вообще будутъ коррелятивны другого рода квэдратичныя примы, опредѣляемыя не тремя, а большимъ числомъ элементовъ.

Хотя нѣтъ и не можетъ существовать такихъ геометрическихъ системъ, удовлетворяющихъ сдѣланному ихъ опредѣленію, чтобы всѣ позиціонныя построенія и основанныя на нихъ тооремы не переносились отъ одной изъ нихъ на всѣ остальныя, однако имѣются такія системы, которыя въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ рѣзко отличаются отъ всѣхъ остальныхъ.

Сюда относится напр. система лучей въ пространствѣ. Легко убѣдиться, что два произвольнаго положенія и слѣдовательно непересѣкающіеся луча, не опредѣляютъ собою вполнѣ и однозначно никакой безконечной совокупности. Если же дано таковыхъ три, то ими легко опредѣляется линейная прима, составляющая одну изъ двухъ непересѣкающихся системъ прямыхъ однополаго гиперболоида. Другими словами, приходится признать, что опредѣленіе линейной примы, какъ такой совокупности, которая вполнѣ и однозначно опредѣляется двумя элементами, нельзя признать достаточно общимъ, и въ такое опредѣленіе нужно ввести поправку: вмѣсто „двумя“ нужно сказать „наименьшимъ числомъ“ элементовъ, которымъ вообще можно вполнѣ и однозначно опредѣлить безконечную совокупность первой ступени.

Многое еще нужно было бы сказать для охарактиризованія новой геометріи какъ самостоятельной математической дисциплины; особенно слѣдовало бы подчеркнуть блестящую простоту методовъ ея доказательствъ, простоту, позволившую познакомить васъ хоть съ тѣмъ, что мнѣ удалось сегодня.

Но рамки имѣющагося въ моемъ распоряженіи времени заставляютъ меня закончить наиболѣе существенной ея характеристикой, и я думаю, что эта характеристика будетъ вамъ понятна, если я скажу, что новая геометрія относится къ геометріи древнихъ то есть къ системѣ точекъ, какъ алгебра относится къ ариѳметикѣ.

Въ ариѳметикѣ мы оперируемъ съ числами, имѣющими свою индивидуальность; въ алгебрѣ мы выводимъ общія аналитическія законности, которыя примѣнимы ко всѣмъ числамъ.

Геометрія древнихъ оперируетъ съ построеніями, связанными съ нахожденіемъ тѣхъ или иныхъ совокупностей точекъ, а такія построенія имѣютъ свою индивидуальность. Новая геометрія оперируетъ съ общими законами построеній, отвлекаясь отъ индивидуальности въ данныхъ совокупностяхъ точекъ. Зато ея выводы одинаково примѣнимы ко всѣмъ геометрическимъ системамъ.

Алгебра и вообще анализъ, давая общія рѣшенія, не знаетъ исключеній, но однако даетъ рѣшенія вещественныя или мнимыя. Съ перваго прикосновенія къ новой геометріи мы видимъ, что то же даетъ и она; и здѣсь, какъ въ анализѣ, мнимыя рѣшенія не есть отсутствіе рѣшенія, но есть лишь рѣшенія, имѣющія особый смыслъ.

Въ этомъ смыслѣ новая геометрія есть истинный геометрическій анализъ.

Въ ней нельзя давать такія опредѣленія, будто прямая есть кратчайшее разстояніе, будто кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ центра, будто коническое сѣченіе опредѣляется равенствомъ суммы или разности отрѣзковъ и т. под. Такія опредѣленія недопустимы уже потому, что онѣ не могутъ имѣть приложенія ко всѣмъ геометрическимъ системамъ.

По новой геометріи кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, опредѣляемое тремя изъ нихъ, какъ сферопримы вообще есть совокупность элементовъ, опредѣляемыя вполнѣ и однозначно тремя данными; въ частности, для опредѣленія круга можно брать точки безконечно удаленныя.

Наконецъ, какъ изъ анализа выдѣляется ученіе о числахъ, такъ изъ новой геометріи выдѣляется ученіе о сингоніи, рѣшенія котораго не имѣютъ непрерывности, а соотвѣтствуютъ цѣлымъ числамъ.

Рядъ основныхъ понятій, отчасти намѣченныхъ въ этомъ вступленіи, но имѣющихъ быть всесторонне развитыми въ слѣдующихъ лекціяхъ, принадлежитъ геометрамъ конца XVIII и начала XIX вѣка (Desargue, Poncelet, Monge, Möbius, De-la-Hire). Еще Chasles въ срединѣ прошлаго вѣка не пошелъ дальше принципа дуализма то есть признанія только

двухъ геометрическихъ системъ (точекъ и плоскости). Первый разъ вышелъ изъ этихъ предѣловъ великій Steiner, показавшій, что даже кривыя 2-го наряда можно принять за элементы геометрической системы (5-ой ступени), то есть, что по двумъ произвольно даннымъ такимъ кривымъ можно составить ихъ линейную приму (Kegelschnittbüschel), по тремъ— линейную секунду (Kegelschnittbündel) и т. д. (хотя онъ самъ въ выводѣ не пошелъ дальше линейныхъ примъ). Такимъ образомъ, только начиная съ работъ Штейнера начала проявляться истинная физіономія новой геометріи, какъ геометрическаго анализа и какъ она охарактеризована въ этомъ вступленіи.

Изъ изложеннаго видимъ, что объектъ геометрическаго анализа, то есть новой геометріи тотъ же, что и обыкновеннаго алгебраическаго анализа; слѣдовательно эти дисциплины отличаются другъ отъ друга не по объектамъ изслѣдованія, а лишь по своимъ методамъ. Хотя собственно символы алгебраическаго анализа приурочены только къ системѣ точекъ (хотя, какъ показалъ Plücker, могутъ быть примѣнены и къ другимъ системамъ), но если принять во вниманіе 1) коррелятивность всѣхъ геометрическихъ системъ другъ съ другомъ, и 2) что алгебраическій анализъ съ одинаковымъ удобствомъ можетъ орудовать какъ надъ системою третьей, такъ и всякой высшей ступени, можно сказать, что онъ способенъ выполнить свою функцію относительно всѣхъ геометрическихъ системъ.

Принимая еще во вниманіе неизмѣримо большую простоту метода новой геометріи какъ метода умственнаго построенія (безъ помощи какихъ либо вспомогательныхъ сложныхъ подстроекъ), не нужно быть пророкомъ, чтобы предвидѣть, что современемъ геометрическій анализъ въ преслѣдованіи своей задачи вытѣснитъ анализъ алгебраическій, и роль послѣдняго сведется къ такому символическому выраженію выводовъ геометрическаго анализа (что необходимо для замѣны по существу неточнаго осуществленія геометрическихъ построеній въ практическихъ приложеніяхъ точными вычисленіями и разсчетами), которое даетъ возможность выражать результаты точными числами. Но поясненіе этой мысли мнѣ придется сдѣлать въ одной изъ слѣдующихъ лекцій.