30. Еще о замѣчательныхъ свойствахъ особой циклиды.

Е. С. Федорова.

(Доложено 19 сентября).

Какъ извѣстно, французскій математикъ Дюпенъ (Dupin) названіемъ циклидъ отмѣтилъ любопытныя поверхности, которыя можно опредѣлить какъ огибаемыя совокупностью всѣхъ шаровъ, касательныхъ къ тремъ даннымъ.

Эти поверхности чрезвычайно разнообразны и выдѣляются по многимъ присущимъ имъ простымъ свойствамъ, изученнымъ какъ самимъ авторомъ, такъ и нѣкоторыми другими математиками. Въ нихъ имѣются двѣ особыя оси, и если вращать около этихъ осей плоскость, то она разсѣчетъ поверхность въ непрерывномъ рядѣ круговъ, почему эту поверхность можно себѣ представить и какъ слѣдъ движущагося по извѣстному закону круга, во всѣхъ точкахъ перпендикулярнаго ко всѣмъ кругамъ другой такой же системы.

Какъ понерхность, опредѣляемая исключительно шарами [1]), она обладаетъ свойствомъ реципрочно преобразовываться въ какую либо другую циклиду. При этомъ конечно безразлично, будетъ ли шаръ реципрочнаго преобразованія вещественный или мнимый. Въ частности, имѣются два такіе непересѣкающіеся круга въ взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ (связанные другъ съ другомъ на подобіе звеньевъ цѣпи, причемъ концы ихъ діаметровъ на общей прямой образуютъ четыре гармоническія точки), что если одну изъ ихъ точекъ принять за центръ шара реципрочнаго преобразованія, то преобразованная циклида будетъ циклидою вращенія (а одинъ изъ круговъ цѣпи преобразуется въ прямую, проходящую чрезъ центръ другого круга перпендикулярно къ его плоскости).

Всѣ эти свойства изложены и въ моемъ руководствѣ „Новая геометрія, какъ основа черченія“ (101). Но тутъ, кромѣ того, выведена и особая циклида исключительно интересныхъ свойствъ.

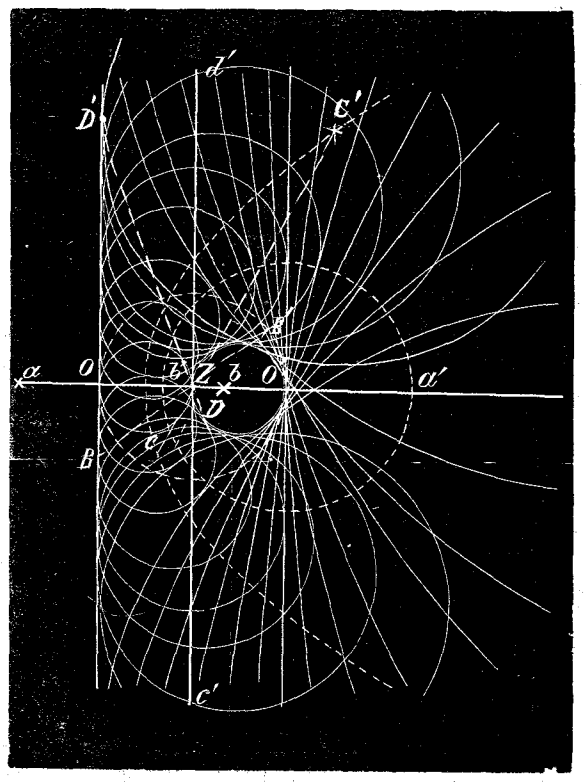
Изъ шаровъ, образующихъ особую циклиду, есть одинъ съ наименьшимъ діаметромъ r и другимъ предѣльнымъ шаромъ безконечно большого діаметра то есть плоскостью, и при томъ разстояніе плоскости отъ ближайшей точки этого шара есть $2r$. Какъ доказано въ упомянутомъ мѣстѣ, особая циклида, какъ огибаемая безконечною совокупностью шаровъ и потому могущая разсматриваться какъ замкнутая поверхность нѣкотораго (кольцеобразнаго) геометрическаго тѣла, занимаетъ въ пространствѣ такое положеніе, что остающееся свободнымъ, то есть незанятымъ этимъ тѣломъ, часть пространства, есть совершенно равная ей циклида. Если ихъ разсматривать какъ геометрическія тѣла, то значитъ пространство выполняется двумя равными циклидами.

Но въ силу равенства этихъ двухъ тѣлъ, они опредѣленными движеніями и вообще симметрическими операціями могутъ быть совмѣщены другъ съ другомъ, а значитъ циклида, какъ поверхность, обладаетъ элементами симметріи.

Въ указанномъ руководствѣ доказывается, что видъ симметріи особой циклиды есть тетрагонально-сфеноэдрическій.

[1]) И при томъ входящая въ нея совокупность векторіальныхъ шаровъ опредѣляется тремя изъ нихъ, почему составляетъ сферопріму векторіальныхъ шаровъ.

На приложенной фигурѣ воспроизведена эта особая циклида въ сѣченіи чрезъ четверную ось сложной симметріи, OO' причемъ сама плоскость чертежа есть одна изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей симметріи (что совершенно очевидно по заданнымъ условіямъ возникновенія циклиды, какъ огибаемой совокупностью шаровъ, одновременно касательныхъ какъ къ прямой OD', такъ и къ шару ZO'); слѣдъ другой, перпендикулярной къ плоскости чертежа, плоскости симметріи есть четверная ось OO'; точка Z есть центръ симметріи, а двойныя оси симметріи есть двѣ взаимно-перпендикулярныя биссектрисы плоскостей симметріи въ плоскости, перпендикулярной къ оси OO' и проходящей чрезъ центръ Z, и слѣдовательно находящіяся въ плоскости сложной симметріи.



Ясно, что двойныя оси симметріи находятся на особой циклидѣ.

Это вытекаетъ изъ слѣдующаго.

Разсматривая циклиду, какъ поверхность, раздѣляющую два равныя тѣла, первое и второе, мы можемъ сказать, что если какой-нибудь шаръ, входящій въ составъ перваго тѣла, мы повернемъ на 180° около двойной оси симметріи, онъ долженъ совмѣститься съ опредѣленнымъ шаромъ, входящимъ въ составъ второго тѣла. Если бы двойная ось симметріи не принадлежала цѣликомъ поверхности, то въ какой-нибудь части она пересѣкла бы ихъ нѣкоторый шаръ перваго тѣла; но движеніе совмѣщенія вывело бы изъ этого шара другой равный ему шаръ второго тѣла, и оказалось бы, что оба шара, а слѣдовательно и оба тѣла пересѣкаются, что нелѣпо, такъ какъ за оба тѣла мы именно приняли такія, которыя имѣютъ лишь общую поверхность.

Такимъ образомъ особая циклида есть отчасти линейчатая поверхность: ей принадлежатъ нетолько двѣ плоскости, въ которыхъ, конечно, можно провести сколько угодно прямыхъ, но и обѣ двойныя оси симметріи.

Другимъ замѣчательнымъ ея свойствомъ является то, что она самореципрочна по отношенію къ мнимому шару, центръ котораго Z, а радіусъ $ZO=ZO'$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ Z есть центръ шара преобразованія, то кругъ, имѣющій діаметромъ ZO' преобразуется въ прямую OD', а всякій кругъ напр. имѣющій центръ въ C, одновременно касательный къ прямой OD' въ точкѣ B и къ кругу ZO' въ точкѣ D, преобразуются въ кругъ же, имѣющій центръ C' одновременно касательный къ кругу ZO' въ точкѣ B' и къ прямой OD' въ точкѣ D'; при этомъ по свойствамъ реципрочнаго преобразованія имѣемъ, что прямыя BB', CC', DD' проходятъ чрезъ общій центръ Z; тѣ же два реципрочные круга имѣютъ и двѣ общія касательныя, пересѣкающіяся въ томъ же общемъ центрѣ Z.

Если же всѣ шары, входящіе въ составъ одного тѣла, имѣющаго своею поверхностью особую циклиду, попарно реципрочно преобразуются другъ въ друга, то значитъ сама огибающая ихъ циклида реципрочно преобразуется сама въ себя то есть есть поверхность самореципрочная.

Отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что и кривая пересѣченія циклиды съ шаромъ преобразованія есть кривая самореципрочная то есть ея точки попарно соотвѣтственно находятся на концахъ діаметра этого шара, или иначе, особая циклида пересѣкается съ шаромъ, имѣющимъ центръ Z и радіусъ $ZO = ZO'$, въ кривой, обладающей центромъ обратнаго равенства Z, хотя сама, циклида этимъ центромъ не обладаетъ. Понятно, что этотъ кругъ есть лишь діаметральное сѣченіе мнимаго шара, какъ шара самореципрочнаго преобразованія циклиды.

Раньше былъ извѣстенъ только шаръ O' (съ діаметромъ $a'\ b'$), уже не какъ мнимый, а какъ вещественный шаръ самореципрочнаго преобразованія циклиды. Онъ, какъ ортогональный шаръ той линейной секунды шаровъ, которой принадлежитъ данная сфероприма, пересѣкаетъ всѣ шары секунды, а слѣдовательно, въ частности, и всѣ шары сферопримы, прямоугольно; это означаетъ, что всѣ эти шары преобразуются имъ самореципрочно.

Такъ какъ пара точекъ $a'b'$ гармонически раздѣляетъ пару ZO, то ясно, что плоскость сложной симметріи $c'd'$ шаромъ, имѣющемъ діаметръ $a'b'$, реципрочно преобразуется въ шаръ, имѣющій діаметръ OO′ и значитъ оба шара пересѣкаются въ кругѣ, находящемся въ плоскости $c'd'$; изъ этого же слѣдуетъ, что шаръ $a'b'$ шаромъ OO′, какъ мнимымъ, реципрочно преобразуется въ шаръ діаметра ba (гдѣ $a'Z = aZ$), то-есть другой шаръ самореципрочнаго преобразованія циклиды (на фигурѣ пересѣченіе пунктирныхъ шаровъ неточно).

Въ плоскомъ сѣченіи чрезъ четверную ось симметріи параболоидъ вращенія, представляющій геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, выполняющихъ одну циклиду, даетъ параболу, по отношенію къ которой точки Z и O сопряжены, а потому точка Z есть полюсъ прямой OD′ какъ его поляры, а полюсы всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ центръ Z (напр. CC′) находятся на прямой OD′. Въ частности, плоскости, касательныя къ параболоиду, проведенныя изъ точки O, имѣютъ точками касанія кругъ пересѣченія параболоида вращенія съ плоскостью сложной симметріи $c'd'$.