29. Однополые гиперболоиды и обобщеніе ихъ понятія на примѣрѣ системы конопримъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 19 сентября).

Въ статьѣ „Симметрія линейныхъ совокупностей конопримъ“ разсмотрѣнъ случай особой линейной терціи, имѣющей симметрію круга и представляющей совокупность конопримъ, коррелятивную съ кругомъ. Въ ней показано, что въ ея составъ входятъ особыя, такъ называемыя діаметральныя, секунды кривыхъ, которыя всѣ имѣютъ одинъ общій діаметръ, и онъ есть и діаметръ коррелятивнаго круга; въ этихъ секундахъ линейныя примы, также названныя діаметральными, не имѣютъ другъ съ другомъ ни одной общей кривой. Если бы эти секунды входили въ составъ линейной терціи, то мы имѣли бы настоящаго представителя линейчатой поверхности въ системѣ конопримъ.

Съ другой стороны, вращая діаметральную секунду около центра коррелятивнаго, основного для системы, круга, мы получаемъ безконечный рядъ діаметральныхъ секундъ, и ни одна секунда не имѣетъ ни съ какою другой ни одного общаго элемента, какъ это усматривается изъ того, что общая кривая обѣихъ такихъ секундъ одновременно должна была бы имѣть діаметромъ двѣ прямыя, взятыя подъ произвольнымъ угломъ, что нелѣпо. Но конечно мы можемъ взять произвольно двѣ линейныя примы изъ двухъ діаметральныхъ секундъ, и, установивъ въ нихъ проективность (гомологичность) отдѣльныхъ элементовъ, то есть конопримъ, по тремъ изъ нихъ, провести затѣмъ линейныя примы черезъ всѣ гомологичныя кривыя этихъ двухъ примъ, и тогда получаемъ настоящій коррелятивъ гиперболоиду обыкновеннаго пространства точекъ. Если бы оказалось, что, выбравъ одну такую линейную приму въ одной діаметральной секундѣ и затѣмъ произвольно другую линейную приму въ произвольной другой секундѣ и построивъ такимъ образомъ безконечное множество гиперболоидовъ, мы получимъ, что вся совокупность такихъ гиперболоидовъ заключается въ одной терціи, находящейся въ одной терціи, находящейся въ одной линейной квартѣ, то мы имѣли бы дѣло съ образомъ, представляющимъ обобщеніе понятія о гиперболоидѣ; такой гиперболоидъ мы могли бы назвать гиперболоидомъ системы 4-ой ступени.

Въ упомянутой статьѣ отмѣчено, что только что указанная особая терція, имѣющая симметрію круга, и есть такой обобщенный гиперболоидъ въ системѣ конопримъ.

Такъ какъ въ этой системѣ, трактующей совсѣмъ другую тему, было бы неумѣстно останавливаться на разсмотрѣніи этого вопроса во всѣхъ подробностяхъ, то спеціально для этого выдѣлена настоящая замѣтка.

Приходится начать съ повторенія главныхъ выводовъ указанной статьи, насколько они относятся къ имѣющему здѣсь быть приведеннымъ доказательству.

Каждая діаметральная линейная прима опредѣляется однимъ особымъ, а именно симметричнымъ относительно общаго діаметра кривыхъ, полярнымъ трехугольникомъ основного круга. Всѣ кривыя такой примы и есть именно кривыя, проходящія чрезъ вершины этого трехугольника, причемъ кругъ искомой примы опредѣляется непосредственно этими тремя точками, обѣ параболы—тѣми же точками съ присоединеніемъ безконечно-удаленной точки діаметра, а остальныя кривыя тѣми же тремя точками и еще парою произвольныхъ точекъ, симметричною относительно діаметра.

Въ одной діаметральной секундѣ полярные трехугольники расположены такъ, что ни чрезъ какіе два изъ нихъ нельзя провести конопримы и слѣдо-

вательно діаметральная секунда была бы коррелятивна нѣкоторой линейчатой поверхности въ обыкновенномъ пространствѣ, если бы только эта секунда заключалась въ линейной терціи; мы же знаемъ про нее только то, что она заключается въ линейной квартѣ.

Чтобы не было недоразумѣнія въ той же статьѣ введены новые термины по общей номенклатурѣ, допускающей какое-угодно расширеніе понятій. Въ частности, такой образъ, какъ только-что указанная линейная секунда, состоящая изъ примъ, не имѣющихъ общихъ кривыхъ, названъ примопримой; такой же образъ, какъ особая терція, въ которой діаметральныя секунды составляютъ безконечный рядъ и не имѣютъ ни одного общаго элемента, или иначе образъ, состоящій изъ примы линейныхъ секундъ, не имѣющимъ другъ съ другомъ ни одного общаго элемента, названъ секундопримою, а если въ терціи, представляющей секунду линейныхъ примъ, не имѣется общихъ элементовъ, то она будетъ примосекундою.

Теперь намъ предстоитъ доказать, что предлежащая особая примосекунда есть обобщенный гиперболоидъ согласно опредѣленію, данному въ началѣ замѣтки.

Доказать это значитъ доказать, что двѣ совершенно произвольно взятыя діаметральныя примы могутъ быть пересѣчены одною единственною такою линейною примою, всѣ кривыя которой принадлежатъ другимъ линейнымъ примамъ особой терціи.

Но такая прима и есть прима круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ каждой линейной примѣ этой терціи, согласно ея опредѣленію, необходимо имѣется одинъ кругъ. Слѣдовательно, если по двумъ, принадлежащимъ ей, линейнымъ примамъ, мы составимъ линейную приму по этимъ кругамъ, то получимъ приму изъ круговъ, и всѣ эти круги, какъ вообще всѣ круги особой линейной кварты, сопряжены съ основнымъ кругомъ, и всѣ же они принадлежатъ линейной терціи, такъ такъ всего въ квартѣ линейная секунда круговъ, а въ особой терціи имѣется секунда линейныхъ примъ, и въ каждой изъ нихъ по одному кругу.

Итакъ, всякія двѣ линейныя примы этой терціи пересѣкаются линейною примою круговъ, и этими тремя данными мы опредѣляемъ одинъ единственный гиперболоидъ; всего же въ особой линейной терціи можемъ опредѣлить безконечное количество гиперболоидовъ то есть сама терція есть особая примосекунда, именно секундогиперболоидъ.

Отсюда легко сдѣлать слѣдующій шагъ и доказать, что полная совокупность всѣхъ конопримъ точекъ, діаметры которыхъ проходятъ черезъ центръ основного круга, есть терціогиперболоидъ то есть такая терція линейныхъ примъ, въ которой ни одна изъ нихъ ни съ какою другою не имѣетъ общихъ кривыхъ, но что черезъ каждый элементъ одной изъ нихъ проходитъ такая единственная линейная прима, которая пересѣчетъ всѣ остальныя примы терціопримы. Слѣдовательно это будетъ спеціальный видъ терціопримы, въ которой вообще линейная прима, проведенная чрезъ два элемента какихъ-нибудь двухъ ея линейныхъ примъ не пересѣкаетъ остальныхъ.

Для доказательства этой теоремы вспомнимъ, что совокупность подобныхъ кривыхъ, имѣющихъ общій центръ подобія (гомотетическихъ) составляетъ линейную приму.

Принявъ это во вниманіе, найдемъ, что въ каждой терціи, всѣ кривыя которыхъ имѣютъ общій діаметръ, представлена секунда линейныхъ примъ то есть примъ гомотетическихъ, и ни одна прима этой секунды не имѣетъ ни съ какою другою ни одного общаго элемента.

Отсюда заключаемъ, что каждая такая терція есть дѣйствительно секундогиперболоидъ и слѣдовательно заключается въ нѣкоторой линейной квартѣ.

Если мы будемъ вращать такую терцію, то получаемъ особую кварту, имѣющую симметрію круга, но уже не линейную, а такую, что ни въ одной, составляющей ее, терціи и именно секундогиперболоидѣ, не имѣется ни съ какою другою ни одного общаго элемента. Доказательства, что эта кварта заключается въ линейной квинтѣ, не требуется, потому что послѣдняя есть полная совокупность конопримъ вообще, и изъ предѣловъ этой совокупности мы при изслѣдованіяхъ конопримъ выдти не можемъ.

Въ составъ каждой такой терціи входитъ полная совокупность кривыхъ, имѣющихъ общій діаметръ, слѣдовательно, въ томъ числѣ и полная совокупность круговъ, имѣющихъ на этомъ діаметрѣ свои центры; она составляетъ линейную секунду. Въ составъ этой терціи входятъ нетолько примы гомотетическія, но и изслѣдованныя выше линейныя примы, въ которыхъ представлено по одной отъ каждой равной кривой и которыя сопряжены по отношенію къ нѣкоторому кругу какъ основному. Эти двѣ системы линейныхъ примъ и составляютъ секундогиперболоидъ.

Съ другой стороны, какую бы изъ линейныхъ примъ послѣдняго рода мы ни избрали въ двухъ терціяхъ, имѣющихъ разные общіе діаметры, всегда въ каждой такой примѣ имѣется по одному един-

ственному кругу, а потому, соединивъ эти два круга линейною примою, получимъ приму круговъ и, чрезъ каждый кругъ этой примы, въ свою очередь, проходитъ одна діаметральная линейная прима. Слѣдовательно, вся разсматриваемая особая кварта состоитъ изъ гиперболоидовъ, что и требовалось доказать.

Въ разсмотрѣнномъ терціогиперболоидѣ представлена полная совокупность круговъ. Что касается остальныхъ подобныхъ кривыхъ, то изъ полной ихъ кварты представлена только та терція, діаметры кривыхъ которыхъ проходятъ чрезъ общій центръ системы.

Та кварта, которую мы сейчасъ вывели и которая представляетъ терціогиперболоидъ, имѣющій симметрію круга, есть кварта конопримъ точекъ. Совершенно ясно, что мы легко получаемъ полярную ей кварту конопримъ лучей съ тѣми же общими свойствами, что и она, то есть представляющуя терціогиперболоидъ системы конопримъ лучей.

Для этого намъ достаточно взять произвольный, концентрическій съ нею кругъ и произвести полярное преобразованіе. Но такъ какъ такихъ круговъ преобразованія имѣется безконечное множество, а именно полная прима концентрическихъ, то значитъ и такихъ квартъ, представляющихъ терціогиперболоидъ конопримъ и имѣющихъ симметрію круга, безконечное множество.

И въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ одной такой кварты изъ одного секундогиперболоида мы имѣли въ виду нѣкоторый основной кругъ, по отношенію къ которому одна система линейныхъ примъ этой совокупности, есть прима, сопряженная относительно этого круга.

Ясно, что если въ основу положимъ другой кругъ ему концентрическій, то получимъ и другой секундогиперболоидъ, а изъ него также выведемъ и другой терціогиперболоидъ.

Итакъ, нетолько секундогиперболоидовъ, но и терціогиперболоидовъ, имѣющихъ симметрію круга, существуетъ безконечное множество. Каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный кругъ.

Всѣ эти выводы мы можемъ безгранично обобщить, если подвергнемъ всѣ эти системы преобразованію коллинеарности. Конечно, составъ кривыхъ отъ этого совершенно измѣнится, но всѣ разсмотрѣнныя общія отношенія сохранятся.

Такимъ образомъ мы можемъ вывести нетолько линейныя примы, коррелятивныя каждой данной кривой, но и заключающіеся въ нихъ примо-и секундогиперболоиды, можемъ вывести и безконечное множество терціогиперболоидовъ конопримъ какъ точекъ, такъ и лучей.