# 28). Симметрія линейныхъ совокупностей кривыхъ 2-го порядка (конопримъ).

**Е. С. Федорова.**

(доложено 19 сентября).

Великій геометръ Штейнеръ [1]) первый показалъ, что по двумъ произвольно даннымъ кривымъ 2-го порядка можно вполнѣ и однозначно вывести безконечную совокупность такихъ кривыхъ; и все равно, какія бы двѣ кривыя ни выбрали изъ этой совокупности, всегда она изъ нихъ выводится тождественно. Этотъ выводъ какъ разъ, по опредѣленію, соотвѣтствуетъ выводу прямой по двумъ точкамъ, почему такія совокупности и получили названіе линейныхъ.

Подробно разсмотрѣвъ вопросъ о выводѣ линейныхъ совокупностей изъ двухъ и охарактеризовавъ инваріанты такихъ системъ, онъ въ то же время вывелъ и то, что такія линейныя примы получаются различными, смотря потому, разсматриваемъ ли эти кривыя какъ совокупности точекъ, или же мы смотримъ на нихъ какъ огибаемыя касательными. Для различенія такихъ системъ онъ ввелъ соотвѣтственно названія Kegelschnittbüschel и Kegelschnittschaar, и эти названія перешли въ нѣмецкія учебныя руководства.

Однако, несмотря на различіе этихъ линейныхъ примъ между ними имѣется и весьма тѣсное соотношеніе, какъ полюсовъ и поляръ, что и понятно въ виду коррелятивности точекъ и прямыхъ на плоскости. Хотя онъ и дѣлалъ выводы для каждой системы отдѣльно, но съ новѣйшей точки зрѣнія въ новой геометріи это является пожалуй и излишнимъ, такъ какъ, получивъ полное рѣшеніе для одной системы, мы имѣемъ готовое рѣшеніе и для второй, если произведемъ, напр. по отношенію къ какому нибудь кругу, преобразованіе точекъ въ прямыя какъ полюсовъ въ поляры.

Въ послѣднее время выводъ Штейнера значительно расширенъ привлеченіемъ къ разсмотрѣнію линейныхъ совокупностей всѣхъ высшихъ ступеней, и, конечно мы всегда имѣемъ такую полярную коррелятивность между двумя такими системами какой-угодно ступени. Полное изложеніе предмета теперь имѣется въ руководствѣ Reye, Geometrie der Lage.

При этомъ расширеніи выяснилось, что въ системѣ конопримъ вообще существуетъ и другая, болѣе сложная, коррелятивность между линейными (а слѣдовательно и всякими другими) совокупностями.

Такъ какъ кривая опредѣляется пятью произвольно взятыми точками, то можно составить и линейныя совокупности пяти ступеней; первая изъ нихъ, линейная прима опредѣляется двумя, линейная секунда тремя, линейная терція четырьмя и линейная кварта пятью произвольно взятыми кривыми; слѣдовательно полная совокупность кривыхъ есть уже линейная квинта.

Коррелятивность эта связываетъ совокупности конопримъ точекъ и конопримъ лучей такимъ образомъ, что единственной кривой коррелятивна линейная кварта, двумъ, и слѣдовательно ихъ линейной примѣ—линейная терція, тремъ, а слѣдовательно ихъ линейной секундѣ—линейная секунда же конопримъ другой системы.

Понятно, что полная совокупность то есть квинта конопримъ обладаетъ и высшею возможною то есть круговою симметріей.

Симметрія квартъ вполнѣ опредѣляется симметріей одной конопримы, потому что изъ нея она выводится вполнѣ и однозначно. Поэтому въ общемъ случаѣ такая совокупность имѣетъ двойную ось симметріи и двѣ перпендикулярныя плоскости симметріи (ромбическій видъ симметріи на плоскости). Въ частномъ случаѣ параболы остается только плоскость симметріи (гемиромбическій видъ сим.). Со-

[1]) Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften.

вершенно исключительною симметріею обладаетъ кругъ, и слѣдовательно имѣются линейныя кварты, обладающія круговою симметріи. Отсюда заключаемъ, что если взять для опредѣленія линейной кварты произвольную конопріму и пятерную ось симметріи, изъ которой выводится пять равныхъ, то получается кварта съ круговою симметріей. Всѣ содержащіяся въ ней кривыя во всякихъ положеніяхъ располагаются непрерывными кругами изъ равныхъ элементовъ.

Здѣсь подъ словомъ кругъ я подразумѣваю только совокупность, выводящуюся изъ одной кривой и оси вращенія. Но это еще не означаетъ, что такая совокупность, какъ прима, составляетъ именно сферопріму, потому что подъ послѣднимъ выраженіемъ подразумѣвается такая прима, которая однозначно и вполнѣ опредѣляется тремя элементами.

Въ данномъ же случаѣ мы для опредѣленія имѣемъ пять элементовъ, а таковыми опредѣляется лишь сферотерція. Если эту сферотерцію мы опредѣлимъ какою-нибудь одною кривою и пятерною осью симметріи, то и сферотерція будетъ имѣть симметрію круга; но такимъ опредѣляющимъ элементомъ не можетъ быть ни кругъ, ни равносторонняя гипербола въ линейной квартѣ конопримъ точекъ, потому что полная совокупность круговъ есть линейная терція и слѣдовательно достаточно четырехъ произвольныхъ круговъ, чтобы опредѣлить полную совокупность, а въ ней равные круги образуютъ только линейную секунду, а потому уже три изъ нихъ опредѣляютъ ихъ полную совокупкость; также полная совокупность равныхъ равносторонніхъ гиперболъ есть линейная терція и слѣдовательно четыре изъ нихъ опредѣляютъ эту полную совокупность.

Какъ доказалъ Штейнеръ, въ каждой линейной примѣ конопримъ точекъ общаго характера круга вообще не заключается; если же кругъ имѣется, то въ ней всѣ рѣшительно подобныя кривыя, за исключеніемъ равносторонней гиперболы, которая въ единичномъ числѣ представлена во всѣхъ примахъ вообще, представлены въ двойномъ числѣ и составляютъ непрерывную послѣдовательность, начиная отъ круга, характеризующагося прямымъ угломъ между мнимыми двойными діаметрами со все уменьшающимся мнимымъ угломъ вплоть до нуля, когда этотъ же уголъ становится и вещественнымъ угломъ и характеризуетъ параболу; затѣмъ вещественные углы (то есть углы между ассимптотами) между двойными діаметрами возрастаютъ вплоть до прямого угла въ равносторонней гиперболѣ. Въ каждой другой линейной примѣ имѣется вмѣсто круга другой крайній членъ, и если направленіе измѣненій упомянутаго угла отъ круга мы будемъ считать положительнымъ то есть увеличивающимся, то отъ всякаго такого крайняго члена, представленнаго въ единственномъ числѣ, будутъ представлены всѣ остальные члены вплоть до единичной равносторонней гиперболы; этотъ крайній членъ есть какъ бы центръ, отъ котораго въ обѣ стороны вплоть до послѣдней эти углы увеличиваются.

Съ другой стороны, всякая линейная совокупность, имѣющая симметрію круга, не можетъ содержать въ себѣ линейной примы круговъ, за исключеніемъ примы концентрическихъ, а всякая сферическая свокупность, имѣющая симметрію круга не можетъ содержать въ себѣ именно примы концентрическихъ круговъ, потому что тогда въ сѣченіи этой сферической совокупности мы получили бы линейную приму.

Какъ кругъ есть исключительная кривая посреди всѣхъ другихъ, такъ коррелятивная ему линейная кварта, имѣющая симметрію круга, есть кварта исключительная, и мы легко выведемъ ея составъ и особенности, руководясь слѣдующими соображеніями.

Ради наглядности опредѣленія состава кривыхъ этой особой кварты мы распредѣлимъ ея примы по діаметрамъ такъ, чтобы всѣ кривыя примы сливались въ одну прямую съ діаметромъ основного круга.

Для этого линейная прима должна быть спеціальная и удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) въ ней долженъ находиться одинъ кругъ, ибо иначе оси ея кривыхъ даже не были бы параллельны, а 2) другая опредѣляющая кривая должна быть расположена симметрично относительно общаго діаметра; въ такой примѣ, если имѣются двѣ параболы, одна изъ нихъ должна быть спеціальной и представляться вообще въ видѣ двухъ параллельныхъ прямыхъ, сопряженныхъ относительно основного круга, и перпендикулярныхъ къ общему діаметру; въ частномъ случаѣ, если кругъ примы точечный, эти двѣ параллельныя прямыя сливаются въ одну двойную прямую.

Что дѣйствительно въ каждой такой примѣ должны присутствовать двѣ параболы съ перпендикулярными діаметрами (что вытекаетъ изъ присутствія въ примѣ круга), видно изъ того, что исключительная сферотерція параболъ, имѣющая симметрію круга, содержитъ въ центрѣ одинъ опредѣленный кругъ, который и служитъ ея центромъ [1]); ея внѣшніе элементы состоятъ только изъ гиперболъ, а потому всякій кругъ, имѣющійся въ нашей примѣ есть элементъ

[1]) Ср. статью о сферопримахъ (стр. 294).

внутренній по отношенію къ этой сфероквартѣ и долженъ пересѣкать ее въ двухъ параболахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что каждую такую линейную приму, мы можемъ опредѣлить однимъ кругомъ и одною параболою, коей діаметръ совпадаетъ съ общимъ діаметромъ, а другая парабола есть спеціальная, упомянутая выше [1]).

Такимъ образомъ, взявъ произвольно одинъ кругъ той линейной секунды круговъ, въ которой пересѣкается съ терціей круговъ эта особая кварта, мы изъ него и каждой параболы, удовлетворяющей упомянутымъ условіямъ и еще тому, чтобы она была также сопряженною по отношенію къ основному кругу, мы получимъ одну изъ цѣлой примы примъ кривыхъ, имѣющихъ центры на общемъ діаметрѣ.

Въ отдѣльности легко получить нетолько кругъ и параболу, но и всякую кривую, удовлетворяющую всѣхъ имѣющимся въ данномъ случаѣ условіямъ.

Для этого возьмемъ на общемъ діаметрѣ произвольную точку и по ней построимъ трехугольникъ, полярный по отношенію къ основному кругу; тогда всякая кривая, проходящая чрезъ вершины этого трехугольника и симметричная по отношенію къ общему діаметру, удовлетворяетъ всѣмъ требующимся условіямъ: центръ ея будетъ находиться на общемъ діаметрѣ; она будетъ симметрична относительно этого діаметра и сопряжена относительно основного круга.

Кругъ и обѣ параболы этими условіями опредѣляются вполнѣ и однозначно; что касается эллипсовъ и гиперболъ, то для опредѣленія каждой изъ нихъ можно взять еще одну точку произвольно на плоскости, и тогда условія всѣ будутъ удовлетворены, если за пятую точку принять симметричную съ четвертой по отношенію къ общему діаметру.

Изъ сказаннаго видно, что въ основу опредѣленія кривыхъ проще всего положить полярный трехугольникъ, а каждый такой вполнѣ и однозначно опредѣляетъ всю линейную приму, а самъ опредѣляется также вполнѣ и однозначно единственною точкою на общемъ діаметрѣ.

Но здѣсь мы различаетъ два общихъ существенно различныхъ случая, смотря потому, находится ли опредѣляющая точка внутри или внѣ основного круга.

Въ первомъ случаѣ мы получимъ вещественный полярный трехугольникъ, и всѣ кривыя примы необходимо пересѣкаются въ трехъ его вершинахъ. Во второмъ случаѣ полярный трехугольникъ мнимый и кривыя уже не имѣютъ трехъ, а только одну вещественную общую точку пересѣченія, а двѣ другія общія точки пересѣченія есть точки мнимыя.

Ясно, что кругъ, принадлежащій такой примѣ, не можетъ быть вещественнымъ; слѣдовательно, онъ мнимый, а мнимые круги имѣются только въ линейной примѣ круговъ съ вещественнымъ ортогональнымъ кругомъ.

Слѣдовательно, въ особой квартѣ, имѣющей симметрію круга, заключающаяся въ ней секунда круговъ, есть секунда съ ортогональнымъ вещественнымъ кругомъ, а именно основнымъ кругомъ кварты.

Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что точечные круги такой линейной секунды должны быть сопряжены съ основнымъ кругомъ; въ этихъ случаяхъ соотвѣтственный полярный трехугольникъ самъ становится точечнымъ.

Особо спеціальная линейная прима этого случая состоитъ изъ точечнаго круга, двухъ спеціальныхъ параболъ въ видѣ двухъ взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ, эллипсовъ вовсе нѣтъ, а всѣ гиперболы спеціально представлены парами лучей, симметричныхъ относительно общаго діаметра [1]).

Такимъ образомъ мы воспроизвели одну діаметральную секунду особой кварты, и вся эта секунда составлена изъ діаметральныхъ примъ, какъ мы назовемъ эти линейныя совокупности.

Вращая эту линейную секунду около общаго центра, получимъ особую терцію, имѣющую симметрію круга. Эта терція, какъ видимъ, исключительна, потому что она соотвѣтствуетъ одному единственному взятому кругу; слѣдовательно, всѣ другія особыя терціи будутъ подобными.

Такъ какъ въ каждой діаметральной секундѣ каждая изъ возможныхъ кривыхъ 2-го порядка представлена одною, изъ всей терціи равныхъ, то въ особой терціи, каждая такая кривая представлена

---

[1]) По общей теоремѣ центры кривыхъ одной линейной примы должны находиться на одной кривой 2-го порядка (Новая геометрія, стр. 97). Въ частномъ случаѣ, какъ здѣсь, эта кривая есть спеціальный кругъ, состоящій изъ прямой и безконечно-удаленнаго центра спеціальной параболы (ср. статью «О спеціальныхъ кругахъ»).

[1]) Въ случаѣ мнимаго полярнаго трехугольника всѣ кривыя примы имѣютъ общую парную точку (вещественную точку трехугольника) и слѣдовательно составляютъ совокупность кривыхъ, касательныхъ одной прямой въ парной точкѣ; и та прямая, къ которой всѣ касаются, есть особая парабола примы, равно какъ и та, которая проходитъ чрезъ мнимыя точки, и обѣ, совокупно съ прямою, безконечно-удаленною. Наконецъ, если опредѣляющую точку совмѣстимъ съ центромъ круга, то обѣ параболы состоятъ изъ двухъ перпендикулярныхъ діаметровъ круга вмѣстѣ съ безконечно-удаленною прямою; кругъ представленъ безконечно-удаленною прямою и центромъ, а остальныя кривыя — равносторонніе гиперболы.

въ видѣ примы, а именно сферопримы, такъ какъ тремя изъ нихъ опредѣляется и вся ихъ совокупность.

Эта особая терція никоимъ образомъ не есть ни линейная, ни сферотерція; не линейная потому, что изъ каждой сферопримы равныхъ кривыхъ въ линейной секундѣ этой сферопримы представлена только она одна; такая линейная секунда можетъ быть опредѣлена тремя любыми кривыми сферопримы; она не есть сферотерція, потому что отчасти состоитъ изъ линейныхъ секундъ.

Въ діаметральной линейной секундѣ всякая діаметральная прима, если бы она была линейная, должна пересѣкаться съ каждою другою въ одномъ элементѣ. Очевидно, что какіе бы два, опредѣляющіе двѣ любыя примы, полярные трехугольника мы ни построили, всегда получимъ такія шесть точекъ, которыя не находятся на одной кривой 2-го порядка [1]). Отсюда слѣдуетъ, что и діаметральная секунда не есть линейная.

Въ составъ каждой діаметральной секунды входятъ только такія кривыя, которыя имѣютъ одинъ общій діаметръ. Если повернемъ такую секунду около общаго центра, то такихъ кривыхъ въ какой-либо другой секундѣ повидимому не будетъ, такъ какъ для этой другой секунды діаметръ имѣетъ другое положеніе.

Однако всѣ тѣ линейныя примы, для которыхъ опредѣляющая точка есть центръ системы, тождественна для всѣхъ секундъ.

Это обстоятельство даетъ поводъ остановиться на новыхъ образахъ, которыя могутъ встрѣчаться только въ системахъ ступени выше третьей, которыя еще не были предметомъ изслѣдованій, но которыя имѣютъ своего представителя въ видѣ полученной нами терціи съ симметріей круга.

Подобно тому, какъ въ системѣ 3-ей ступени мы имѣемъ линейчатыя поверхности или секунды то есть совокупности линейныхъ примъ, могущихъ не имѣть между собою ни одного общаго элемента, такъ въ системѣ высшихъ ступеней мы можемъ встрѣчать съ одной стороны линейчатыя терціи то есть такія, которыя сплошь складываются изъ линейныхъ примъ, но эти примы не имѣютъ вообще общихъ элементовъ, или линейныя кварты, также вообще не имѣющія общихъ элементовъ и т. д.

Съ другой стороны мы можемъ вывести терціи, сплошь складывающіяся изъ линейныхъ секундъ, и такія секунды также не имѣютъ общихъ элементовъ или даже совокупности изъ линейныхъ терцій и т. п.

Назовемъ примопримами образы аналогичныя линейчатымъ поверхностямъ въ пространствѣ, примосекундами—секунды такихъ непрерывно слѣдующихъ другъ за другомъ линейныхъ примъ, которыя вообще не имѣютъ между собою общихъ элементовъ, а секундоприма ми, такія непрерывно слѣдующія другъ за другомъ линейныя секунды, которыя вообще не имѣютъ между собою общихъ элементовъ.

Двѣ линейныя примы, не имѣющія общихъ элементовъ, опредѣляютъ собою линейную терцію, потому что въ суммѣ мы получаемъ для опредѣленія четыре независимые элемента.

Двѣ линейныя секунды, не имѣющія общихъ элементовъ опредѣляютъ собою линейную квинту, такъ какъ для опредѣленія имѣется шесть независимыхъ элементовъ; слѣдовательно, такіе образы только и могутъ встрѣчаться въ системахъ не ниже 5-ой ступени, какъ въ нашемъ случаѣ.

Потому, если бы діаметральныя секунды не имѣли другъ съ другомъ общихъ элементовъ, то онѣ составляли бы секундоприму и опредѣляли бы собою кварту то есть могли бы находиться лишь въ полной совокупности кривыхъ, а не въ одной линейной квартѣ, какъ это имѣетъ мѣсто въ данномъ случаѣ; но такъ какъ теперь діаметральныя секунды имѣютъ общую линейную приму, то значитъ особая терція, о которой идетъ рѣчь, есть не секундоприма, а примосекунда, и притомъ особая, въ которой всѣ остальныя примы, кромѣ общей (опредѣляемой центромъ) не имѣютъ между собою общихъ элементовъ, и она заключается не въ полной квинтѣ, а въ особой линейной квартѣ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ здѣсь дѣло съ образомъ, представляющимъ аналогію съ гиперболоидами въ обыкновенномъ пространствѣ, но уже въ обобщенномъ видѣ, а именно квартѣ.

Всѣ вообще линейныя примы особой терціи находятся въ перспективномъ положеніи, такъ какъ пересѣкаютъ особую линейную приму въ одномъ элементѣ. Поэтому взявъ изъ этой терціи произвольно двѣ линейныя примы, не имѣющія общихъ элементовъ, мы для нихъ имѣемъ уже одно соотвѣтствіе въ видѣ тѣхъ двухъ элементовъ, которые находятся въ особой примѣ; установивъ соотвѣтствіе еще двухъ

[1]) Въ полярномъ трехугольникѣ одна точка (точка на діаметрѣ, которою мы и опредѣляемъ трехугольникъ) есть внутренняя, а обѣ другія, расположенныя симметрично относительно общаго діаметра, есть точки внѣшнія. Ясно, что чрезъ двѣ пары внѣшнихъ точекъ мы можемъ провести линейную приму кривыхъ, и всѣ эти кривыя будутъ симметричны относительно общаго діаметра, Изъ кривыхъ этой примы къ діаметральной относится только одна, сопряженная съ основнымъ кругомъ, и именно поэтому одна изъ двухъ точекъ ея пересѣченія съ діаметромъ будетъ точка внутренняя, а другая внѣшняя.

элементовъ на тѣхъ же двухъ примахъ, мы опредѣлимъ примоприму, настоящій коррелятивъ однополаго гиперболоида.

Но здѣсь такой выборъ мы можемъ сдѣлать не изъ двухъ примъ одной секунды, а изъ двухъ примъ одной терціи, а потому на всю особую терцію въ совокупности мы можемъ смотрѣть не какъ на одинъ гиперболоидъ, а какъ на безконечную совокупность второй степени такихъ гиперболоидовъ, и это даже не въ предѣлахъ квинты, а въ предѣлахъ одной кварты.

Этимъ наша задача по опредѣленію особой кварты и состава ея кривыхъ исчерпывается; попутно же мы получили столь интересный новый геометрическій образъ какъ примосекунда, и притомъ примосекунда особая, въ которой линейныя примы образуютъ не одну систему, а цѣлую сѣть пересѣкающихся, по двѣ въ каждой примоприме.

Особая линейная кварта конопримъ точекъ, которую мы разсмотрѣли, но есть единственная, такъ какъ она коррелятивна кругу, какъ кругу лучей; должна же существовать и аналогичная кварта конопримъ лучей, коррелятивная кругу точекъ.

Къ ней мы можемъ перейти непосредственно отъ первой, произведя полярное преобразованіе по отношенію къ тому же кругу. Каждому элементу линейной, или квадратичной совокупности одной изъ нихъ, мы найдемъ такія же совокупности другой. Конечно, сфероприматъ вообще въ другой будутъ полярны уже не сфероприсмы, а нѣкоторыя другія квадратичныя примы; но тѣмъ сфероприматъ, которыя имѣютъ симметрію круга и концентричны съ центромъ основного круга, будутъ очевидно полярны также сфероприсмы, сферосекундамъ—сферосекунды и сферотерціямъ сферотерціи.

Въ полярной квартѣ, соотвѣтственно каждому діаметру, мы также получимъ діаметральныя секунды которыя будутъ не линейными, а гиперболоидами конопримъ лучей, а всей особой терціи будетъ полярна также особая терція конопримъ лучей, имѣющая симметрію круга, концентричная съ основнымъ кругомъ, представляющая секундогиперболоидъ конопримъ лучей.

Въ частности, каждая діаметральная линейная прима конопримъ лучей общаго характера будетъ состоять изъ элементовъ, полярныхъ элементамъ примы кривыхъ точекъ, то есть изъ кривыхъ, касательныхъ къ сторонамъ того самаго полярнаго, относительно основного круга, трехугольника, чрезъ вершины котораго проходятъ кривыя (примы конопримъ точекъ). Ясно, что въ составъ ихъ входитъ одинъ кругъ, одна парабола и вообще по два подобные эллипса и гиперболы, въ томъ числѣ и равносторонніе.

Такъ какъ въ каждой линейной примѣ конопримъ лучей центры всегда расположены на прямой, то здѣсь имѣются линейныя терціи, всѣ центры которыхъ находятся на діаметрахъ. Всѣ эти центры есть полюсы безконечно-удаленной прямой по отношенію къ каждой данной кривой; и такъ какъ съ одной стороны поляры этихъ центровъ по отношенію къ основному кругу есть прямыя, перпендикулярныя къ общему діаметру, а съ другой эти прямыя есть поляры центра основного круга по отношенію къ данной кривой точекъ, то значитъ полярною совокупностью по отношенію къ діаметральной линейной терціи кривыхъ лучей будетъ такая линейная терція кривыхъ точекъ, въ которыхъ полярами центра основного круга будутъ прямыя, перпендикулярныя къ общему діаметру. Въ этомъ смыслѣ мы и всю особую кварту можемъ раздѣлить на діаметральныя линейныя терціи, и въ каждой таковой поляры центра есть прямыя, перпендикулярныя къ общему діаметру [1]).

Теперь разсмотримъ виды симметріи линейныхъ терцій. При этомъ мы съ одинаковымъ нравомъ можемъ исходить и изъ линейныхъ примъ, все равно конопримъ точекъ или лучей.

Въ каждой линейной терціи конопримъ точекъ необходимо имѣется линейная прима круговъ, въ томъ числѣ круги могутъ быть представлены и въ спеціальной формѣ.

Первый случай когда линейныя терціи имѣютъ симметрію круга, будетъ тотъ, когда линейная прима кривыхъ лучей есть прима концентрическихъ круговъ.

Въ этомъ случаѣ, соотвѣтственно одному діаметру, единственнымъ полярнымъ трехугольникомъ будетъ тотъ симметричный прямоугольный трехугольникъ, коего вершина въ центрѣ, а двѣ другія вершины—безконечно-удаленныя точки. Въ этомъ случаѣ линейная прима представлена равносторонними гиперболами, имѣющими общую касательную въ видѣ діаметра, перпендикулярнаго къ плоскости симметріи. Вращая эту совокупность около центра, получимъ

[1]) Спеціальными случаями этой особой кварты будутъ тѣ, когда кругъ есть точечный, и тогда особая кварта конопримъ точекъ есть совокупность всѣхъ кривыхъ, проходящихъ чрезъ эту точку, а полярная кварта—совокупность всѣхъ кривыхъ, имѣющихъ въ этой точкѣ двѣ перпендикулярныя касательныя; если же кругъ есть безконечно-удаленная прямая, то особая кварта конопримъ точекъ есть полная совокупность равностороннихъ гиперболъ то есть ихъ линейная кварта, а полярная кварта есть полная совокупность всѣхъ кривыхъ, касательныхъ къ безконечно-удаленной прямой то есть линейная кварта параболъ лучей.

особую секунду, представляющую, согласно вышеизложенному, гиперболоидъ конопримъ точекъ, заключающійся въ искомой особой линейной терціи.

Каждой такой линейной примѣ полярна линейная прима кривыхъ лучей, симметричныхъ относительно общаго діаметра и вписанныхъ въ тотъ же полярный трехугольникъ. Въ этой примѣ кругъ представленъ въ спеціальной формѣ безконечно-удаленной прямой; всѣ же остальныя кривыя есть параболы, симметричныя относительно общаго діаметра. Вращая такую линейную приму, получаемъ гиперболоидъ конопримъ лучей, а опредѣляемая имъ линейная терція и есть искомая линейная терція конопримъ лучей.

Но такъ какъ прима концентрическихъ круговъ есть также линейная прима кривыхъ точекъ, то можемъ поступить и обратно.

Построивъ упомянутый полярный трехугольникъ, мы найдемъ приму конопримъ лучей, тождественную съ только-что упомянутою, а потому и вся терція будетъ тождественна.

Отсюда заключаемъ, что въ линейной терціи кривыхъ точекъ, имѣющей симметрію круга, заключается и прима концентрическихъ круговъ. И дѣйствительно, какой бы кругъ мы ни приняли за кругъ полярнаго преобразованія, всегда концентричному съ нимъ кругу точекъ будетъ поляренъ концентрическій кругъ лучей и обратно. Также и прима концентрическихъ паръ взаимно-перпендикулярныхъ лучей будетъ общая и той, и другой линейной терціи; общею являются также и пара лучей, состоящая изъ одного діаметра и безконечно-удаленной прямой.

Отсюда видимъ, что если за кругъ концентрической примы мы возьмемъ и тотъ спеціальный, который представляетъ діаметральную прямую, мы не получимъ ничего новаго то есть ту же линейную терцію.

Если бы существовала такая кривая, что, вращая ее около общаго центра мы получили бы линейную приму, то ясно, что и коррелятивная терція будетъ имѣть симметрію круга.

Конечно, такая кривая можетъ быть лишь спеціальная, а именно или a) прима двухъ взаимно-перпендикулярныхъ концентрическихъ лучей, или b) прима изъ одного такого луча и безконечно-удаленной прямой или c) прима изъ двухъ точекъ, изъ которыхъ одна есть центръ, а другая безконечно-удалена или d) прима изъ двухъ безконечно-удаленныхъ точекъ, соотвѣтствующихъ двумъ перпендикулярнымъ направленіямъ.

Въ случаѣ a) спеціальная кривая есть кривая точекъ, а тогда ясно, что совокупность всѣхъ кривыхъ лучей, коррелятивныхъ нетолько одной ей, но и всей ея линейной примѣ, есть линейная терція кривыхъ, имѣющихъ общій центръ системы однимъ изъ своихъ фокусовъ, такъ какъ всякая пара сопряженныхъ прямыхъ, имѣющая центръ въ одной точкѣ—фокусѣ какой-угодно кривой, есть пара взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ.

Спеціальной кривой случая a) коррелятивна спеціальная кривая случая d), которую можемъ разсматривать какъ кривую лучей. Каждая такая кривая коррелятивна всѣмъ кругамъ, и, слѣдовательно, этому случаю соотвѣтствуетъ полная совокупность то есть линейная терція круговъ точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что линейная терція конопонримъ лучей полярная линейной терціи круговъ точекъ, есть полная совокупность кривыхъ, имѣющихъ общій центръ системы однимъ изъ своихъ фокусовъ; этой терціи, въ частности, принадлежитъ, и прима концентрическихъ круговъ.

Въ случаѣ c) мы получаемъ полную совокупность конопримъ точекъ, имѣющихъ общій центръ системы своимъ же центромъ въ отдѣльности; это есть линейная терція конопримъ точекъ. Въ ней нѣтъ ни одной единственной параболы, но имѣется линейная прима концентрическихъ круговъ.

Ясно, что въ коррелятивной ей терціи, соотвѣтствующей случаю b), мы имѣемъ также совокупность конопримъ лучей, и центръ каждой изъ кривыхъ долженъ совпадать съ общимъ центромъ системы, и въ этой терціи также не будетъ заключаться ни одной параболы; это же представляется невозможнымъ, такъ какъ въ каждой линейной терціи конопримъ лучей должна заключаться линейная секунда параболъ. И дѣйствительно, въ терціи конопримъ точекъ, линейная секунда кривыхъ проходитъ чрезъ центръ, а каждая такая кривая полярно преобразуется въ параболу, и потому таковыхъ дѣйствительно должно быть представлено въ видѣ линейной секунды. Ясно, что параболы эти представлены, какъ и въ предыдущей терціи, въ спеціальномъ видѣ, а именно въ терціи конопримъ точекъ, въ видѣ секунды паръ сопряженныхъ прямыхъ, а въ терціи конопримъ лучей въ видѣ секунды паръ безконечно-удаленныхъ точекъ.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію другихъ видовъ симметріи линейныхъ примъ и терцій.

Общій случай тотъ, когда въ такихъ совокупностяхъ симметріи не проявляется.

Въ самомъ дѣлѣ, въ каждой линейной примѣ конопримъ точекъ имѣется двѣ пары такихъ точекъ, чрезъ которыя проходятъ всѣ кривыя примы. Они

составляютъ нѣкоторый полный четырехугольникъ, противоположныя пары сторонъ которыхъ сопряжены относительно всѣхъ кривыхъ коррелятивной терціи конопримъ лучей и въ то же время составляютъ отдѣльныя спеціальныя кривыя этой терціи.

Для вывода линейной примы ихъ можно взять произвольно, и такая именно произвольность ихъ выбора и указываетъ на отсутствіе симметріи. Однако это же обстоятельство показываетъ, что при спеціальномъ выборѣ ихъ положенія можно составить примы, а слѣдовательно и коррелятивныя терціи такъ, чтобы получились различные виды симметріи. Зададимся сначала простѣйшими изъ нихъ.

Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

1) Чтобы получить двойную ось симметріи:

Принимаемъ одинъ перпендикуляръ къ плоскости чертежа за двойную ось симметріи и сначала беремъ одну изъ точекъ каждой пары произвольно, и тогда другая точка пары уже опредѣляется осью симметріи; ясно, что обѣ эти произвольно взятыя точки могутъ быть взяты или вещественными или мнимыми, и тогда соотвѣтственно получаемъ вещественныя или мнимыя пары. Пара въ безконечности можетъ быть взята произвольно, и если это вещественныя точки, то всѣ кривыя примы есть подобныя гиперболы.

2) Чтобы получить плоскость симметріи.

Принимаемъ одну плоскость, перпендикулярную къ плоскости чертежа за плоскость симметріи, и тогда также можемъ двѣ точки взять на плоскости совершенно произвольно, и притомъ каждую изъ нихъ принять за вещественную или за мнимую; сопряженныя имъ другія точки паръ получатся отраженіемъ ихъ въ плоскости симметріи. Пара въ безконечности должна быть симметрична.

3) Чтобы получить двойную ось симметріи и двѣ перпендикулярныя плоскости симметріи, проходящія чрезъ ось:

Въ этомъ случаѣ, понятно, мы произвольно можемъ взять лишь одну точку, и притомъ она можетъ быть только вещественною, такъ какъ мнимыя могутъ образовывать только опредѣленныя пары. Если точку возьмемъ въ безконечности, то пара точекъ станетъ или парною точкою, и тогда прима спеціальна и будетъ разсмотрѣна дальше, или же, если одна пара находится въ плоскости симметріи, другая пара можетъ быть и безконечно удалена, но находиться на биссектрисѣ слѣдовъ плоскостей симметріи.

Если безконечно-удаленная пара вещественна, то получаемъ приму равностороннихъ гиперболъ, пересѣкающихся въ двухъ вещественныхъ или мнимыхъ точкахъ на одной изъ плоскостей симметріи. Если эта пара мнимая, то получаемъ линейную приму круговъ, также пересѣкающихся въ двухъ вещественныхъ или мнимыхъ точкахъ [1]).

Всѣ же четыре вещественныя точки, выведенныя такимъ образомъ изъ одной, образуютъ уже три пары сопряженныхъ точекъ.

Такимъ образомъ составляются линейныя примы общаго характера; а изъ нихъ выводятся коррелятивныя терціи общаго характера; и тѣ, и другія имѣютъ упомянутые элементы симметріи. Поэтому они интереса не представляютъ.

Можно упомянуть лишь о расположеніи круговъ въ линейныхъ терціяхъ конопримъ точекъ.

Въ каждой такой терціи необходимо имѣется линейная прима круговъ, для которой основаніе двойной оси симметріи есть центръ ортогональнаго круга, все равно, вещественнаго или мнимаго, а слѣдомъ плоскости симметріи служитъ центральная прямая. Соотвѣтственно этому мы видимъ какъ расположатся круги этой линейной терціи для перечисленныхъ видовъ симметріи. Въ частности, для вида симметріи 3) двойная ось должна проходить чрезъ центръ ортогональнаго круга, слѣдъ плоскости симметріи долженъ совпадать съ центральною прямою.

Но для всѣхъ этихъ видовъ симметріи мы можемъ вывести и спеціальныя примы.

Предварительно замѣтимъ, что если двѣ сопряженныя точки совпадаютъ въ одну, это выражаетъ, что слились въ одну тѣ двѣ точки, чрезъ которыя проходятъ всѣ кривыя примы, и значитъ всѣ эти кривыя будутъ имѣть общую касательную въ этой точкѣ; при этомъ все равно, будутъ ли эти парныя точки вещественными или мнимыми, такъ какъ въ такомъ случаѣ различіе между тѣми и другими исчезаетъ; это видно изъ того, что если пара точекъ есть пара мнимая, то проходящая чрезъ нихъ прямая есть мнимая общая сѣкущая; но когда обѣ точки сливаются въ одну, то ея поляра уже проходитъ чрезъ нее самое, какъ и въ случаѣ вещественной парной точки.

Въ видѣ симметріи 1) есть только два спеціальныя положенія точекъ; или а) точка находится въ безконечности, или б) она совпадаетъ съ основаніемъ

[1]) Въ послѣднемъ случаѣ коррелятивная терція кривыхъ лучей есть полная совокупность кривыхъ, проходящихъ чрезъ пару точечныхъ круговъ этой примы. Это видно изъ того, что въ такой терціи около общихъ точекъ можно построить безконечно-малые полярные трехугольники, а круги, описанные около нихъ должны принадлежать коррелятивной линейной примѣ; два такихъ круга необходимо и достаточно для опредѣленія всей примы круговъ точекъ.

оси симметріи. Особый случай тотъ, когда вторая точка взята совпадающею съ первою.

Въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ парную точку, въ первомъ случаѣ въ безконечности. Слѣдовательно, для этихъ особыхъ случаевъ мы получаемъ примы съ общими касательными, имѣющими опредѣленное направленіе и непремѣнно проходящими чрезъ основаніе оси симметріи.

Итакъ, имѣются и линейныя примы коноприм точекъ съ общею касательною и въ то же время обладающія двойною осью симметріи; въ нихъ общая касательная проходитъ чрезъ основаніе этой оси. Если общая точка касанія находится на безконечности, то всѣ кривыя примы есть гиперболы, имѣющія общую ассимптоту.

Въ особомъ случаѣ, каждая парная точка опредѣляетъ общую касательную, обѣ эти касательныя параллельны. Всѣ кривыя примы касаются къ этимъ двумъ параллельнымъ въ двухъ парныхъ точкахъ. Эти параллельныя, а также прямая, проходящая чрезъ обѣ парныя точки, вмѣстѣ съ безконечно-удаленною прямою составятъ двѣ спеціальныя параболы этой примы. Это линейная прима вдвойнѣ касательныхъ кривыхъ.

Но во вдвойнѣ спеціальномъ случаѣ, когда и другой произвольной точкѣ мы придадимъ спеціальное положеніе, ясно, что это можно сдѣлать двояко: или а) за парную точку другой пары принять не ту, которая служитъ парною и для первой, и тогда получимъ приму гиперболъ съ двумя общими касательными, которыя обѣ пересѣкаются въ двойной оси симметріи; но такъ какъ очевидно, что гипербола общаго характера не можетъ одновременно касаться одной прямой и пересѣкать ее (въ основаніи оси симметріи), то значитъ этотъ случай относится уже къ спеціальнымъ гиперболамъ, представленнымъ парами прямыхъ; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, мы имѣемъ приму паръ прямыхъ, исходящихъ изъ основанія оси симметріи, причемъ во всѣхъ парахъ имѣется одна общая прямая. Но также очевидно, что въ такой примѣ общая прямая есть слѣдъ плоскости симметріи примы а потому этотъ случай относится уже къ виду симметріи 3).

Въ случаѣ б) можно принять, что другая парная точка, также какъ и первая, совпадаетъ съ основаніемъ оси симметріи, и тогда получаемъ неопредѣленность и круговую симметрію, или же вторая парная точка, также какъ и первая, находится въ безконечности. Въ этомъ случаѣ получается прима гипербол, имѣющихъ общія ассимптоты то есть подобныхъ, и центръ становится центромъ подобія. Ясно, что и въ этомъ случаѣ биссектрисы общихъ ассимптотъ есть слѣды взаимноперпендикулярныхъ плоскостей симметріи, а потому и этотъ случай относится къ виду симметріи 3). Замѣтимъ, что по приведенной выше теоремѣ Штейнера относительно распредѣленія кривыхъ въ примѣ, въ составъ каждой линейной примы вообще входятъ двѣ и только двѣ подобныя гиперболы и значитъ онѣ нетолько не опредѣляютъ примы гиперболъ, но и вообще составляютъ исключительныя кривыя въ этой совокупности. Теперь мы видимъ, что въ частномъ случаѣ подобныхъ гиперболъ, имѣющихъ общій центръ подобія, ими опредѣляется вся линейная прима подобныхъ гиперболъ[1]).

Въ видѣ симметріи 2) также имѣется только два спеціальныя положенія точекъ; или а) точка находится въ безконечности, или б) она находится въ плоскости симметріи. Особый случай составитъ тотъ, когда вторую произвольную точку совмѣстимъ съ первою.

И здѣсь въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ парную точку, и притомъ въ первомъ случаѣ въ безконечности. Слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ получаемъ примы съ общими касательными, непремѣнно перпендикулярными къ плоскости симметріи.

Итакъ, имѣются и линейныя примы коноприм точекъ съ общею касательною и обладающія плоскостью симметріи, перпендикулярною къ этой касательной. Ясно, что если общая точка касанія находится въ безконечности, то всѣ кривыя примы есть гиперболы, имѣющія общую ассимптоту.

Въ особомъ случаѣ въ парныхъ точкахъ всѣ кривыя примы будутъ касаться къ двумъ прямымъ, симметричнымъ по отношенію къ плоскости симметріи, и слѣдовательно эти обѣ общія касательныя пересѣкутся въ точкѣ на слѣду плоскости симметріи. Въ этомъ случаѣ въ составѣ кривыхъ будетъ и одинъ кругъ, касающійся къ общимъ прямымъ въ тѣхъ же парныхъ точкахъ, а потому оси всѣхъ кривыхъ параллельны и спеціально въ этомъ случаѣ одна изъ общихъ осей совпадаетъ со слѣдомъ плоскости симметріи. Изъ двухъ параболъ одна общаго характера, а другая представлена въ спеціальномъ видѣ прямой, проходящей чрезъ обѣ парныя точки, вмѣстѣ съ безконечно-удаленною. Общія касательныя составляютъ спеціальную гиперболу. Это и будетъ одна изъ тѣхъ діаметральныхъ линейныхъ примъ, о которыхъ рѣчь была при изученіи особой

[1]) Это отмѣчено и въ Reye Geometrie der Lage I. S. 195 ff.

линейной кварты. Это второй случай линейной примы вдвойнѣ касательныхъ кривыхъ.

Во вдвойнѣ спеціальномъ случаѣ, когда и другой точкѣ мы придадимъ одно изъ двухъ возможныхъ спеціальныхъ положеній, мы можемъ сдѣлать это двоякимъ образомъ, и всякій разъ получаемъ одну изъ отмѣченныхъ уже въ предъидущей рубрикѣ примъ, и слѣдовательно ничего новаго.

Переходя къ виду симметріи 3) мы различаемъ случаи двухъ разрядовъ; или а) общій, когда всѣ четыре точки вещественны, и б) особенный, когда пары вещественныхъ и мнимыхъ точекъ находятся на слѣдахъ различныхъ плоскостей симметріи.

Въ первомъ разрядѣ особыми положеніями точекъ будетъ или то, когда онѣ находятся въ безконечности, и тогда получимъ одинъ изъ уже разсмотрѣнныхъ случаевъ, или то, когда всѣ четыре точки совпадутъ на слѣду оси симметріи, и тогда получаемъ неопредѣленность и круговую симметрію.

Во второмъ разрядѣ случаевъ мы разсмотримъ сначала тѣ, когда всѣ точки вещественны или мнимы. Конечно, и теперь особыхъ положеній точекъ только два: или точки въ безконечности, или онѣ совпадаютъ со слѣдомъ оси симметріи; и въ томъ и въ другомъ случаѣ мы получаемъ парныя точки, и тогда уже не различаемъ вещественныхъ точекъ отъ мнимыхъ.

Если въ первомъ спеціальномъ случаѣ одну точку возьмемъ въ безконечности, то другая пара точекъ можетъ быть вещественною или мнимою. Мы всегда получимъ приму гиперболъ, имѣющихъ общую ассимптоту въ видѣ слѣда одной изъ плоскостей симметріи, но гиперболы эти пересѣкаются въ двухъ симметричныхъ точкахъ, вещественныхъ или мнимыхъ.

Вообще, если одна пара точекъ становится парною точкою, тѣ три пары прямыхъ, которыя составляютъ спеціальныя кривыя этой примы, замѣняются двумя, если другая пара точекъ вещественна, или остается только одна пара, если другая пара точекъ мнимая. Вообще всегда, когда гиперболы примы имѣютъ общую ассимптоту, геометрическое мѣсто центровъ кривыхъ есть прямая—сама ассимптота (и еще безконечно-удаленная точка).

Поэтому, въ разсматриваемыхъ случаяхъ намъ извѣстна совокупность центровъ, извѣстна та пара прямыхъ, которая имѣется въ примахъ обоихъ родовъ—это слѣдъ одной плоскости симметріи, и прямая безконечно-удаленная (слѣдъ той плоскости симметріи, въ которой находится другая пара точекъ). Когда другая пара точекъ вещественна, имѣемъ еще пару параллельныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ эти точки и еще безконечно-удаленную парную точку, тоже какъ спеціальный элементъ этой примы; и такъ какъ въ этомъ случаѣ эта пара образуетъ уголъ, равный нулю, то значитъ въ этой примѣ представлена парабола, какъ крайній членъ примы; она, слѣдовательно, заключаетъ гиперболы со всякими углами между ассимптотами. Въ ней равносторонняя гипербола представлена въ формѣ двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ.

Въ той же примѣ, въ которой другая пара точекъ есть пара мнимая, имѣется равносторонняя гипербола общаго характера.

Общая точка касанія есть по отношенію къ каждой гиперболѣ полюсъ прямой, проходящей чрезъ центръ этой гиперболы; одна изъ мнимыхъ точекъ этой примы есть полюсъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ другую мнимую точку пары; слѣдовательно, всякая прямая, проходящая чрезъ центръ одной изъ гиперболъ и чрезъ одну мнимую точку, есть ея діаметръ, коего сопряженный есть діаметръ, проходящій чрезъ другую мнимую точку; но такъ какъ эти два сопряженные діаметра образуютъ равные углы съ общею ассимптотою, то другая ассимптота той же, то есть вообще всякой гиперболы этой примы, есть діаметръ къ ней перпендикулярный. Итакъ, эта прима есть прима равносторонних гиперболъ.

Остающіеся вдвойнѣ спеціальные случаи уже были разсмотрѣны при изученіи двухъ предъидущихъ видовъ симметріи.

Теперь посмотрю, нѣтъ ли высшихъ видовъ симметріи, кромѣ круговыхъ, разсмотрѣнныхъ выше.

Ясно, что изъ примъ общаго характера въ этомъ случаѣ можно допустить лишь четверную ось симметріи. Тутъ возможенъ лишь одинъ единственный случай, когда четырехугольникъ, образуемый обѣими парами точекъ, есть квадратъ.

Въ этомъ случаѣ, значитъ, всѣ кривыя пересѣкаются между собою въ вершинахъ этого квадрата; между ними конечно имѣется и одинъ кругъ, и значитъ всѣ оси кривыхъ параллельны другъ другу. Три спеціальныхъ кривыхъ примы есть: одна взаимноперпендикулярная пара діагоналей квадрата, имѣющая центръ въ центрѣ этого квадрата и круга; это единственная спеціальная равносторонняя гипербола примы; двѣ другія—противоположныя параллельныя стороны квадрата, а ихъ центры есть взаимно-перпендикулярныя безконечно-удаленныя точки; эти параллельныя прямыя есть спеціальныя параболы съ взаимно-перпендикулярными діаметрами. Геометрическое мѣсто центровъ кривыхъ есть центръ квадрата и обѣ упомянутыя безконечно-удаленныя точки.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ четверную ось симметріи и четыре, пересѣкающіяся въ ней плоскости симметріи, и прима является исключительною.

Всѣ линейныя примы конопримъ лучей, принадлежащія къ тѣмъ же видамъ симметріи, мы можемъ получить непосредственно полярнымъ преобразованіемъ изъ предъидущихъ.

О тѣхъ примахъ, которыя имѣютъ симметрію круга, рѣчь была выше.

Въ той примѣ, которая имѣетъ четверную ось симметріи и четыре проходящія чрезъ нее плоскости симметріи, мы имѣемъ тотъ же квадратъ, но уже не какъ полный четырехугольникъ, а какъ полный четырехсторонникъ, и всѣ кривыя примы есть кривыя, въ него вписанныя. Такъ какъ въ квадратѣ, какъ полномъ четырехсторонникѣ, кромѣ двухъ паръ его вершинъ имѣется еще пара вершинъ въ видѣ, безконечно-удаленныхъ точекъ, выражаемыхъ направленіями его паръ сторонъ, то всего мы получаемъ три особыя кривыя въ видѣ паръ противоположныхъ вершинъ. Единственная парабола этой примы выводится изъ единственной кривой примы точекъ, проходящей чрезъ центръ, и это есть пара діагоналей квадрата, и потому въ конопримѣ лучей единственная парабола представлена въ спеціальной формѣ именно двухъ безконечно-удаленныхъ точекъ. Какъ извѣстно, въ линейной примѣ конопримъ лучей не черезъ всякую точку на плоскости проходятъ кривыя примы, а потому должна имѣться фигура, внутри которой сосредоточены всѣ эти точки. Въ данномъ случаѣ это тѣ четыре равнобедренные трехугольника съ безконечно-удаленными вершинами, основанія которыхъ есть стороны квадрата; эллипсы всѣ ограничиваются очертаніями квадрата, и двѣ пары его противоположныхъ вершинъ есть спеціальныя формы этихъ эллипсовъ; вся же остальная часть плоскости заполнена гиперболами.

Если бы воспроизвели эту приму полярнымъ преобразованіемъ изъ предъидущей посредствомъ какого либо круга, имѣющаго центромъ центръ всей системы, мы получили бы для полнаго четырехсторонника квадратъ, діагонали котораго параллельны сторонамъ перваго, и обратно, его стороны были бы параллельны діагоналямъ перваго.

Если бы для квадрата примы конопримъ точекъ мы его вершинамъ придали бы спеціальное положеніе въ безконечности или въ основаніи четверной оси симметріи, мы получили бы одну изъ разсмотрѣнныхъ уже примъ съ симметріею круга. Соотвѣтственно этому, не получимъ ничего новаго, если придадимъ спеціальное положеніе сторонамъ квадрата какъ полнаго четырехсторонника.

Линейныя примы общаго характера, относящіяся къ другимъ видамъ симметріи, уже разсмотрѣннымъ въ отношеніи конопримъ точекъ, не представляютъ особаго интереса, и здѣсь мы ограничимся лишь спеціальными примами конопримъ лучей, которыя мы выведемъ изъ спеціальныхъ примъ конопримъ точекъ посредствомъ полярнаго преобразованія напр. при помощи нѣкотораго круга.

Какъ мы видѣли, эти спеціальныя примы имѣютъ ту особенность, что въ нихъ есть парныя точки, а потому и общія касательныя всѣхъ кривыхъ въ этихъ точкахъ. Въ соотвѣтственныхъ примахъ конопримъ лучей мы получаемъ ту же особенность, такъ какъ парныя касательныя есть именно такія касательныя, общія всѣмъ кривымъ примы, которыя касаются въ одной общей точкѣ.

Различіе въ спеціальныхъ линейныхъ примахъ конопримъ точекъ и конопримъ лучей выражается въ томъ, что въ первыхъ, всѣ кривыя, касательныя къ прямой въ опредѣленной точкѣ, еще проходятъ чрезъ двѣ постоянныя точки, вещественныя или мнимыя, а во вторыхъ, всѣ кривыя, касательныя къ прямой въ опредѣленной точкѣ, еще касаются двухъ постоянныхъ прямыхъ, вещественныхъ или мнимыхъ (то есть образующихъ пару вещественныхъ или мнимыхъ касательныхъ).

Линейныхъ примы конопримъ лучей мы можемъ выводить изъ тѣхъ же двухъ паръ точекъ, которыя принимались въ основаніе и вывода линейныхъ примъ конопримъ точекъ. Только теперь эти точки будутъ разсматриваться не какъ вершины полнаго четырехугольника, а только какъ двѣ изъ паръ противоположныхъ вершинъ полнаго четырехсторонника, и искомыя кривыя тѣ, которыя вписаны въ него, то есть касаются всѣхъ его четырехъ сторонъ.

Изъ относящихся сюда линейныхъ примъ общаго характера особенно интересна та, въ которой пара вещественныхъ точекъ находится въ одной изъ плоскостей симметріи вида симметріи 3), а другая пара мнимыхъ точекъ находится въ безконечности на биссектрисахъ между плоскостями симметріи. Это прима конфокальныхъ кривыхъ, причемъ пара вещественныхъ точекъ есть одновременно и единственная кривая, представленная парою точекъ и есть общая пара фокусовъ всѣхъ кривыхъ примы.

Для этой примы можно заключить непосредственно, что коррелятивная ей терція кривыхъ точекъ, есть линейная терція равностороннихъ гиперболъ, всѣ пары ассимптотъ которыхъ сопряжены относительно пары обоихъ фокусовъ примы кривыхъ

лучей. Какъ извѣстно, въ каждой точкѣ плоскости пересѣкается только одна пара прямыхъ взаимноперпендикулярныхъ и сопряженныхъ между собою по отношенію къ общей парѣ фокусовъ. Совокупность ассимптотъ этой линейной терціи гиперболъ, составляетъ слѣдовательно секунду; четыре изъ нихъ опредѣляютъ всю терцію гиперболъ.

Въ частномъ случаѣ, если оба фокуса совпадаютъ въ одну точку то есть когда фокусъ точечный, линейная прямая конопримъ лучей становится совокупностью концентрическихъ круговъ вмѣстѣ съ діаметральными прямыми. Полярная по отношенію къ кругу линейная прима конопримъ точекъ есть просто совокупность концентрическихъ круговъ. Какъ видимъ, даже въ этомъ случаѣ линейныя примы конопримъ точекъ и конопримъ лучей не тождественны.

Тѣмъ интереснѣе разсмотрѣнныя выше и относящіяся къ видамъ симметріи 1) и 2) линейныя примы конопримъ точекъ, представляющія совокупность вдвойнѣ касательныхъ кривыхъ.

Если примемъ за кривую полярнаго преобразованія одну изъ кривыхъ примы, то найдемъ, что поляры парныхъ точекъ есть парныя касательныя, и обратно полюсы парныхъ касательныхъ есть парныя точки, а потому линейныя примы вдвойнѣ касательныхъ конопримъ точекъ есть одновременно и линейныя примы вдвойнѣ касательныхъ кривыхъ лучей.

Поэтому сюда относится и тотъ вдвойнѣ спеціальный случай, когда парныя точки общаго касанія находятся въ безконечности. Совокупность гиперболъ, имѣющихъ пару общихъ ассимптотъ, есть значитъ и линейная прима кривыхъ лучей. Но, какъ отмѣчено выше, эта совокупность принадлежитъ уже виду симметріи 3).

Теперь разсмотримъ виды симметріи линейныхъ секундъ.

Каждой линейной секундѣ конопримъ точекъ взаимнокоррелятивна линейная секунда конопримъ лучей, и обѣ совокупности такъ же существенно связаны съ двумя кривыми 3-го порядка, изъ которыхъ одна (кривая Якоби) есть кривая точекъ, а другая (кривая Кэле: Cayley) есть кривая лучей (или, какъ выражаются математики, кривая 3-го класса), какъ линейная прима и коррелятивная ей линейная терція связаны съ двумя парами точекъ или двумя парами лучей. Кривая Якоби именно и составлена изъ такихъ сопряженныхъ паръ точекъ, и если изъ нее извлечемъ двѣ такія пары, то ими вполнѣ и однозначно опредѣляются нѣкоторая линейная прима конопримъ точекъ и полярная линейная прима конопримъ лучей; и также, если изъ кривой Келле извлечемъ двѣ пары сопряженныхъ лучей, то ими вполнѣ и однозначно опредѣляются двѣ линейныя примы, стоящія другъ къ другу въ такихъ же отношеніяхъ и также принадлежащихъ опредѣляемымъ кривыми 3-го порядка линейнымъ секундамъ конопримъ.

Такимъ образомъ виды симметріи линейныхъ секундъ есть и виды симметріи кривыхъ 3-го порядка.

Какъ линейныя секунды конопримъ вполнѣ и однозначно опредѣляются тремя произвольно взятыми конопримами, такъ и эти кривыя вполнѣ опредѣляются произвольно взятыми тремя парами точекъ или лучей.

Отсюда заключаемъ, что существуетъ—безграничное число линейныхъ секундъ какъ конопримъ точекъ, такъ и конопримъ лучей, имѣющихъ тройную ось симметріи; это конечно относится и къ упомянутымъ кривымъ 3-го порядка.

Чтобы получить такую линейную секунду, достаточно для ея опредѣленія взять произвольную коноприму и произвольно же взять на плоскости точку и принять ее за основанія тройной оси симметріи, и тогда тѣ три равныя кривыя, которыя выведутся изъ одной данной, опредѣляютъ коноприму, обладающую тройною осью симметріи.

Замѣтимъ мимоходомъ, что тѣ же три равныя конопримы опредѣлятъ вполнѣ и однозначно также и нѣкоторую сфероприму этихъ кривыхъ, а если въ той же линейной секундѣ возьмемъ затѣмъ произвольно еще какую-нибудь коноприму, то въ ней, въ силу симметріи, необходимо заключаются и двѣ другія равныя ей конопримы, которыя выводятся изъ нея и тройной оси симметріи.

Слѣдовательно, въ каждой линейной секундѣ конопримъ, все равно, точекъ или лучей, имѣется безграничное множество сфероприм, обладающихъ тройною осью симметріи, если коноприма, въ которой она заключается, обладаетъ этою осью.

Но существованіе безграничнаго числа линейныхъ секундъ, обладающихъ тройною осью симметріи, не исключаетъ возможности существованія секундъ и другихъ видовъ симметріи; но уже при существованіи хотя бы единственной плоскости симметріи линейная секунда получается спеціальная.

Въ самомъ дѣлѣ, для опредѣленія таковой мы можемъ произвольно взять три пары точекъ, симметричныя относительно этой плоскости симметріи; изъ нихъ непосредственно легко выведемъ кривую

Якоби для этого изъ каждыхъ двухъ данныхъ паръ путемъ перекрестнаго соединенія точекъ одной пары съ точками другой пары, будемъ послѣдовательно выводить все новыя и новыя пары, и всѣ эти пары въ совокупности и составятъ кривую Якоби, которая сама по себѣ уже есть нѣкоторая, нелинейная, прима спеціальныхъ кривыхъ секунды.

Замѣчу мимоходомъ, что для опредѣленія этой кривой, необходимо должны быть даны три пары и ими она вполнѣ и однозначно опредѣляется; можно подумать, что эта кривая и представляетъ сфероприму такихъ спеціальныхъ конопримъ въ данной секундѣ. Однако, эта совокупность не есть сфероприма, потому что изъ двухъ паръ точекъ, опредѣляющихъ линейную приму, прежде всего выводится третья пара точекъ, принадлежащая той же линейной примѣ, и такъ какъ каждая линейная прима пересѣкаетъ эту совокупность *не больше* чѣмъ въ трехъ парахъ точекъ, то значитъ и какъ прима спеціальныхъ конопримъ она есть 3-го порядка. Тоже приходится повторить и по отношенію къ кривой Кэле и парамъ сопряженнымъ лучей, изъ которыхъ она составлена (какъ огибаемая кривая).

Ясно, что если три взятыя пары точекъ симметричны относительно нѣкоторой плоскости симметріи, то мы при составленіи кривой Якоби получимъ пары сопряженныхъ точекъ и на слѣду плоскости симметріи. Если мы, составивъ эту кривую, будемъ для пересѣченія ея точекъ исходить изъ произвольно взятой на ней пары сопряженныхъ симметричныхъ точекъ, то всякая пара лучей, опредѣляющая одну изъ ея точекъ есть пара сопряженныхъ прямыхъ этой секунды и такія пары лучей получатся двоякаго рода: 1) пары лучей, пересѣкающіяся въ точкахъ на слѣду плоскости симметріи; совокупность такихъ паръ точекъ составитъ инволюцію на этой прямой и 2) пары лучей, пересѣкающіяся въ другихъ точкахъ кривой, и совокупность такихъ точекъ составитъ кривую 2-го порядка, и притомъ, такъ какъ лучи, послѣдовательно опредѣляющіе эти точки, слѣдуютъ другъ за другомъ въ противоположномъ направленіи (несогласномъ), то эта кривая непремѣнно есть гипербола.

Итакъ, *если линейная секунда обладаетъ плоскостью симметріи, то принадлежащая ей кривая Якоби разложится на инволюцію паръ точекъ на слѣду плоскости симметріи и на гиперболу, для которой этотъ слѣдъ есть одинъ изъ діаметровъ.*

Изъ каждой точки гиперболы и пары сопряженныхъ точекъ на слѣду плоскости симметріи мы составляемъ инволюцію лучей; но, какъ извѣстно, двойные лучи этой инволюціи составляютъ ту особую пару, которая входитъ въ составъ коррелятивной секунды конопримъ точекъ въ качествѣ спеціальной ея кривой. Отсюда заключаемъ что всѣ такія спеціальныя кривыя, а слѣдовательно и *всѣ кривыя линейной секунды конопримъ точекъ проходятъ черезъ двойныя точки инволюціи на слѣду плоскости симметріи.*

Если возьмемъ двѣ пары сопряженныхъ лучей какъ двѣ спеціальныя кривыя линейной секунды конопримъ точекъ, то ими опредѣляется линейная прима кривыхъ этой секунды и въ томъ числѣ третья пара, которая состоитъ изъ слѣда плоскости симметріи и перпендикулярной къ ней прямой; совокупность же послѣднихъ пересѣкается въ одной точкѣ въ безконечности, соотвѣтствующей направленію, перпендикулярному къ плоскости симметріи.

Слѣдовательно, *вся кривая Кэле сводится къ тремъ точкамъ, изъ коихъ двѣ есть двойныя точки инволюціи на слѣду плоскости симметріи, а третья точка въ безконечности на перпендикулярахъ къ плоскости симметріи.*

Итакъ, достаточно присутствія одной плоскости симметріи, чтобы линейная секунда получила совершенно спеціальный характеръ, который можетъ быть еще спеціальнѣе, смотря по положенію инволюціи точекъ на слѣду плоскости симметріи. Напр. инволюція можетъ быть точечною (нѣмецкіе геометры называютъ ее параболическою), или же одна изъ двухъ двойныхъ точекъ можетъ быть на безконечности или, наконецъ, инволюція можетъ быть съ мнимыми двойными точками (иначе эллиптическая въ отличіи отъ гиперболической съ вещественною парою точекъ).

Ясно, что если въ линейной секундѣ имѣется двѣ плоскости симметріи, то отъ правыхъ Якоби и Кэле могутъ оставаться точки лишь въ пересѣченіи обѣихъ плоскостей симметріи (то есть въ основаніи оси симметріи, такъ какъ пересѣченіе двухъ плоскостей симметріи приводитъ къ равнодѣйствующей оси симметріи) или точки въ безконечности. Отсюда заключаемъ, что если въ линейной секундѣ имѣется больше, чѣмъ одна плоскость симметріи, секунда имѣетъ симметрію круга, и основаніе оси вращенія есть точка пересѣченія плоскостей симметріи.

Такъ какъ въ линейной секундѣ конопримъ точекъ имѣется одинъ кругъ, то ясно, что если секунда имѣетъ симметрію круга, то этотъ кругъ долженъ

имѣть своимъ центромъ основаніе оси вращенія секунды.

Если для полярнаго преобразованія мы возьмемъ кругъ, центръ коего совпадаетъ съ основаніемъ оси вращенія секунды конопримъ точекъ, то и въ полярной линейной секундѣ конопримъ лучей получимъ концентрическій съ нимъ кругъ.

Оба круга станутъ тѣми же самыми, если для полярнаго преобразованія возьмемъ единственный кругъ линейной секунды конопримъ точекъ.

Отсюда видимъ, что мы можемъ воспроизвести безграничное число линейныхъ секундъ, имѣющихъ симметрію круга, все равно, будетъ ли эта секунда конопримъ точекъ или конопримъ лучей.

Для этого достаточно взять одинъ кругъ, одну произвольную коноприму, расположенную такъ, чтобы одинъ изъ ея діаметровъ проходилъ черезъ центръ этого круга и затѣмъ полученную линейную приму вращать около оси, основаніе которой есть центръ этого круга.

Всякая такая линейная секунда разложится на приму сферопримъ равныхъ кривыхъ, имѣющихъ симметрію круга.

Если, въ частности, мы возьмемъ какую нибудь діаметральную линейную приму, то искомая линейная секунда получается, если эту приму будемъ вращать около оси, основаніе которой есть центръ единственнаго ея круга. Но такъ какъ всякая такая прима вдвойнѣ касательныхъ другъ къ другу кривыхъ есть одновременно и линейная прима конопримъ лучей, то всѣ полученныя такимъ образомъ линейныя секунды, имѣющія симметрію круга, есть одновременно и секунды конопримъ точекъ, и секунды конопримъ лучей. Тѣ двѣ точки общаго касанія, въ которыхъ касаются другъ къ другу всѣ кривыя діаметральныхъ линейныхъ примъ, образуютъ хорды круга, а перпендикулярные къ нимъ діаметры круга есть общіе діаметры кривыхъ примы: эти хорды представляютъ въ соотвѣтственныхъ примахъ спеціальныя параболы, а пары касательныхъ прямыхъ въ концахъ этихъ хордъ, составляютъ спеціальныя ихъ гиперболы.