25. Сфереческія совокуности кривыхъ 2-го порядка (конопримъ).

Е. С. Федорова.

(Доложено 19 сентября).

Въ рядѣ моихъ работъ не только дано общее опредѣленіе понятію сфероприм, но таковыя дѣйствительно выдѣлялись во всѣхъ разсмотрѣнныхъ мною геометрическихъ системахъ. Опредѣленіе таково: сферопримою въ каждой данной линейной секундѣ какой-нибудь системы называется такая безконечная совокупность элементовъ секунды, которая опредѣляется, и притомъ однозначно и вполнѣ, любыми тремя элементами этой совокупности. Нѣтъ сомнѣнія, что послѣ линейныхъ это простѣйшая и важнѣйшая. Съ нею, между прочимъ, связано одно изъ важнѣйшихъ преобразованій, а именно реципрочное.

Въ статьѣ о родственныхъ системахъ [1]) показано, что понятія этого рода можно расширить, сохраняя ихъ значеніе для родственныхъ системъ, въ которыхъ изъ одной во всѣ другія передаются всѣ теоремы и всѣ построенія, но вмѣстѣ съ тѣмъ является необходимость выдѣлить тѣ элементы, которые играютъ роль безконечно-удаленныхъ.

Системы точекъ и прямыхъ на плоскости не родственны, потому что безконечно-удаленныхъ точекъ имѣется линейная прима, тогда какъ безконечно-удаленныхъ прямыхъ всего одна. Въ каждой прямой, какъ линейной примѣ точекъ, имѣется одна безконечно-удаленная, а въ линейной примѣ прямыхъ, въ общемъ случаѣ, нѣтъ ни одной безконечно-удаленной. Поэтому даже реципрочное преобразованіе (прямой въ кругъ) изъ системы точекъ не можетъ быть перенесено въ систему прямыхъ.

Но опредѣленіе понятія о такихъ особыхъ элементахъ, которые играютъ роль безконечно-удаленныхъ, подлежитъ дальнѣйшей разработкѣ. Вообще можно сказать, что такіе элементы должны въ каждой системѣ образовать строго опредѣленную самостоятельную совокупность. Иначе выражаясь: такая совокупность могла бы быть выдѣлена какъ отдѣльная система.

Назовемъ такіе элементы экстраэлементами и разсмотримъ ихъ расположеніе на примѣрѣ различныхъ системъ.

Въ системѣ точекъ вообще такими экстраэлементами являются безконечно-удаленныя: полная совокупность ихъ есть линейная секунда. Эта система экстраэлементовъ родственна системѣ лучей, исходящихъ изъ одного центра, а также системѣ точекъ на шарѣ. Въ ней самой уже экстраэлементовъ не имѣется. Въ полной секундѣ точекъ на плоскости имѣется линейная прима такихъ экстраэлементовъ, а въ каждой линейной примѣ этой системы имѣется одинъ такой элементъ.

Въ полной терціи точекъ въ пространствѣ такіе экстраэлементы составляютъ линейную секунду, а въ каждой линейной секундѣ точекъ такіе экстраэлементы составляютъ линейную приму.

Въ системѣ прямыхъ на плоскости имѣется всего одинъ экстраэлементъ, а вообще въ линейныхъ примахъ такихъ экстраэлементовъ не имѣется; такія линейныя примы, въ которыхъ онъ имѣется, составляетъ спеціальную приму (прима параллельныхъ прямыхъ).

Въ терціи плоскостей въ пространствѣ имѣется всего одинъ экстраэлементъ—плоскость, безконечно-удаленная. Поэтому тѣ линейныя примы плоскостей, въ которыхъ имѣется этотъ элементъ, есть особо спеціальныя примы.

Въ той особой, изученной мною, системѣ точекъ, въ которой всѣ линейныя примы проходятъ

[1]) Эти Записки т. II, 376.

чрезъ постоянную для данной системы точку (и, слѣдовательно, составляютъ круги) безконечно-удаленныя точки уже не составляютъ экстраэлементовъ, потому что ихъ совокупность не составляетъ линейной примы. Линейныя примы этой системы, содержащія въ себѣ такой элементъ, есть уже примы спеціальныя, которыя должны быть изучаемы особо. Точка, чрезъ которую проходятъ всѣ линейныя примы, тоже не есть экстраэлементъ, потому что ею и какою-либо другою точкою системы линейная прима еще не опредѣляется.

Теперь разсмотрю системы кривыхъ 2-го порядка (конопримъ).

Въ системѣ конопримъ точекъ за экстраэлементы можно принять круги, потому что эти элементы составляютъ сами по себѣ особую систему и въ то же время какая-угодно кривая съ кругомъ опредѣляетъ линейную приму. Но вообще въ линейной примѣ такого экстраэлемента не имѣется, а только въ линейной секундѣ. Но можно составить линейную секунду и изъ линейной примы обыкновенныхъ (а не векторіальныхъ) круговъ и еще какой-нибудь конопримы.

Такая линейная секунда однако уже будетъ спеціальная, а потому должна разсматриваться, какъ особая система, и такая система будетъ родственна системѣ точекъ на плоскости, причемъ безконечно-удаленнымъ точкамъ послѣдней должны быть особымъ образомъ проективны круги первой.

Также, если составимъ линейную терцію изъ какой-нибудь линейной секунды круговъ и еще какой-нибудь конопримы, то такая система будетъ родственна системѣ точекъ въ пространствѣ.

Но все эти будутъ особыя, спеціальныя системы конопримъ точекъ.

Если возьмемъ линейную приму конопримъ общаго характера, то не можемъ также принимать за экстраэлементы ни прямыхъ, ни даже сопряженныхъ паръ прямыхъ, потому что такіе элементы особой системы не образуютъ. Мы не можемъ принять за экстраэлементы и параболъ, потому что вообще въ составъ каждой линейной примы входятъ двѣ или ни одной параболы.

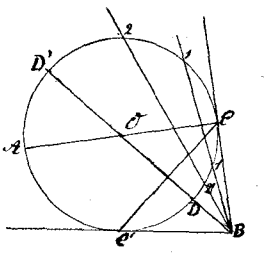
Но равносторонняя гипербола удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ экстраэлемента: такія гиперболы составляютъ особую состему; кромѣ того, каждая изъ нихъ съ каждымъ другимъ элементомъ нетолько опредѣляетъ линейную приму, но одна изъ нихъ, и притомъ только одна, непремѣнно входитъ въ составъ линейной примы общаго характера.

Для большей ясности этихъ и послѣдующихъ разсужденій, я позволю себѣ возстановить построенія Штейнера относительно состава линейныхъ примъ.

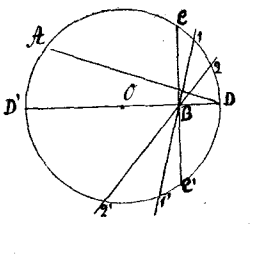
По теоремѣ Дезарга произвольная прямая на плоскости пересѣкаетъ не только противоположныя стороны простого четырехугольника, но и всѣ проходящія чрезъ его вершины кривыя (то есть всю линейную приму кривыхъ) въ инволюціи (точки пересѣченія могутъ быть вещественны или мнимы, и притомъ мнимыя точки пересѣченія имѣются только тогда, когда двойныя точки инволюціи вещественны), но сопряженные діаметры каждой кривой примы также образуютъ инволюцію, и двойными лучами этой инволюціи будутъ тѣ два діаметра, которые пересѣкаютъ безконечно-удаленную прямую въ точкахъ кривой; въ частности, парабола пересѣкаетъ или, вѣрнѣе, касается этой прямой въ одной точкѣ, черезъ которую проходитъ главный діаметръ, гипербола въ точкахъ ассимптотъ, а эллипсъ въ двухъ мнимыхъ діаметрахъ (понятны и пересѣченія паръ прямыхъ).

Пересѣчемъ приму сопряженныхъ діаметровъ безконечно-удаленною прямою и получимъ приму направленій, которую можемъ привести въ перспективное положеніе съ любою точкою A на плоскости, и чрезъ эту же точку проведемъ произвольный кругъ.

Такъ какъ характеръ кривой вообще опредѣляется свойствами двухъ двойныхъ діаметровъ инволюціи, а прима кривыхъ опредѣляется двумя произвольно взятыми кривыми, то слѣдующимъ построеніемъ легко опредѣлить составъ примы по двумъ даннымъ кривымъ.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Проведемъ черезъ A лучи, параллельные обѣимъ парамъ двойныхъ діаметровъ инволюціи данныхъ кривыхъ то есть напр. лучи 1 съ 1′ и 2 съ 2′. Тогда, соединяя соотвѣтственныя точки пересѣченія лучей съ кругомъ прямыми, получимъ въ пересѣченіи двухъ прямыхъ точку B, центръ лучей, опредѣляющихъ на кругѣ положеніе всѣхъ другихъ двойныхъ діаметровъ то есть попарно для каждой кривой примы.

При этомъ могутъ встрѣтиться два, и только два случая (если отвлечься отъ случаевъ спеціальныхъ): или 1) точка B находится внѣ круга (фиг. 1), или 2) она находится внутри круга (фиг. 2).

Въ первомъ случаѣ получимъ изъ точки A пары лучей (параллельныхъ двойнымъ діаметрамъ кривыхъ) подъ всѣми углами, начиная отъ нуля (лучи AC и AC′ до прямого (лучи AD и AD′). Лучи AC и AC′, соединяющіе A съ точками касанія круга изъ B, есть вещественные двойные лучи инволюціи; они соотвѣтствуютъ тѣмъ точкамъ на безконечно удаленной прямой, въ которыхъ только въ однѣхъ двѣ кривыя примы касаются этой прямой. Ясно, что это двѣ параболы.

Слѣдовательно, въ примахъ этого рода имѣются двѣ параболы, гиперболы (въ частности пары прямыхъ) съ ассимптотами всякихъ величинъ угловъ, вплоть до прямого, и такая, то есть равносторонняя гипербола, имѣется въ примѣ только одна (что понятно и напередъ, такъ какъ чрезъ произвольныя четыре точки плоскости можно провести лишь одну такую гиперболу). Такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣемъ два вещественныхъ двойныхъ луча, то по извѣстнымъ правиламъ выведемъ и мнимые пары лучей, соотвѣтствующія каждая опредѣленному эллипсу.

Во второмъ случаѣ (фиг. 2) мы мнимыхъ паръ лучей не имѣемъ, а потому прима представлена только гиперболами, но уже не со всякими углами между ассимптотами, а только въ предѣлахъ отъ CAC′, гдѣ CC′ перпендикулярна къ OB, до прямого DAD′, гдѣ DD′ тотъ же діаметра круга, что и OB.

Уже изъ этого разсужденія мы можемъ заключить, что въ линейной секундѣ общаго характера совокупность параболъ представляетъ не линейную, а квадратичную приму, и притомъ опредѣленнаго характера, такъ какъ всякія другія линейныя примы или пересѣкаютъ ее въ двухъ кривыхъ или вовсе не пересѣкаютъ (и значитъ въ частности лишь касаются); но равностороннія гиперболы всегда присутствуютъ во всѣхъ линейныхъ примахъ, и всегда въ единственномъ числѣ.

Отсюда заключаемъ, въ свою очередь, что именно эти кривыя есть настоящіе экстраэлементы и что линейная секунда (или терція) кривыхъ родственна линейной секундѣ (или терціи) точекъ въ обыкновенной ихъ системѣ.

Но если въ примахъ общаго характера имѣется только два только-что упомянутыя раздѣленія, и въ обоихъ нѣтъ ни одного круга и только одна единственная равносторонняя гипербола, то во всей секундѣ, когда точка B принимаетъ всѣ возможныя положенія, въ томъ числѣ и крайнія, мы имѣемъ и особые частные случаи.

Эти частные случаи, когда 1) точка B занимаетъ положеніе центра O, 2) когда она находится на окружности круга и 3) когда она попадаетъ въ безконечное удаленіе.

Въ первомъ случаѣ прима лучей изъ A изотропна то есть всѣ пары лучей взаимноперпендикулярны. Это случай примы сплошь изъ равностороннихъ гиперболъ.

Во второмъ случаѣ имѣется одна единственная парабола, а во всѣхъ остальныхъ гиперболахъ параллельны по одной изъ ассимптотъ между собою и діаметру параболы.

Наконецъ въ третьемъ случаѣ діаметры двухъ параболъ взаимно-перпендикулярны, ассимптоты равно-сторонней гиперболы дѣлятъ пополамъ прямой уголъ этихъ діаметровъ, а въ числѣ эллипсовъ появляется и крайній членъ—кругъ.

Въ линейной секундѣ общаго характера всего одинъ кругъ, потому что, если бы ихъ было два, то была бы представлена и цѣлая прима круговъ, и тогда одинъ кругъ находился бы въ каждой примѣ общаго характера, чего нѣтъ [1]). Въ случаѣ присутствія въ примѣ круга, инволюція двойныхъ діаметровъ стала бы симметричной и два направленія двойныхъ лучей то есть діаметровъ двухъ параболъ стали были направленіями биссектрисъ всѣхъ остальныхъ двойныхъ діаметровъ то есть направленіями осей всѣхъ кривыхъ примы; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, оси кривыхъ примы паралельны, и сама прима можетъ быть выведена изъ двухъ кривыхъ съ параллельными осями (ср. фиг. 3).

Если бы мы составили линейную секунду изъ примы круговъ и еще какой-нибудь кривой, то параллельными оказались бы оси всѣхъ кривыхъ (діаметры параболъ въ каждой примѣ были бы взаимноперпендикулярны).

Въ секундѣ же общаго характера всѣ примы, проходящія чрезъ единственный кругъ секунды, обладаютъ только что отмѣченными особенностями.

Вышеприведенными разсужденіями Штейнера устанавливается связь между кривыми одной линейной примы. Каждая кривая на безконечно-удаленной прямой представлена двумя сопряженными точками инволюціи.

На инволюціи же, по ихъ опредѣленію, можно смотрѣть какъ на особеннымъ образомъ совмѣщенныя

[1]) Иначе можно выразить такъ: линейная секунда общаго характера пересѣкается съ линейною терціею въ одномъ единственномъ элементѣ, а полная совокупность круговъ и есть линейная терція.

двѣ проективныя системы, такъ что изъ каждой пары сопряженныхъ элементовъ одинъ можно отнести къ одной, а сопряженный съ нимъ къ другой, проективной, системѣ. Если мы изъ каждой пары возьмемъ по одному элементу, то по немъ легко выведемъ четвертый, гармоническій, и тогда, такъ какъ четыре гармоническіе элемента одной системы всегда проективны четыремъ же гармоническимъ элементамъ другой, проективной, системы, то и выведенные изъ первыхъ четыре элемента будутъ также гармоническими.

Такимъ образомъ по произвольно даннымъ тремъ кривымъ одной линейной примы мы можемъ опредѣлить четвертую гармоническую кривую той же примы.

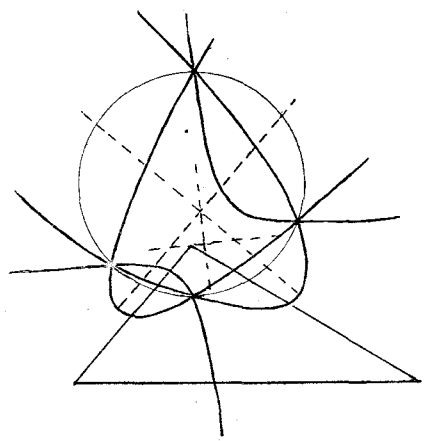
Съ другой стороны, извѣстно, что каждой точкѣ A плоскости по отношенію ко всѣмъ кривымъ (конопримамъ точекъ) примы сопряжена опредѣленная точка A′, а по отношенію къ четыремъ кривымъ имѣются четыре поляры этой точки, которыя всѣ пересѣкаются въ точкѣ A′; если эти четыре поляры есть четыре гармоническія прямыя, то гармоническими будутъ и соотвѣтственныя кривыя примы.

Отсюда заключаемъ, что если четыре гармоническія кривыя примы пересѣкаются въ общей точкѣ, то и четыре касательныя къ нимъ въ этой точкѣ будутъ четырьмя гармоническими лучами.

Переходя къ нашему случаю примы съ однимъ кругомъ, мы легко найдемъ, что онъ и есть четвертая гармоническая кривая примы, сопряженная равносторонней гиперболѣ, а двѣ другія гармонически-сопряженныя есть параболы, діаметры коихъ въ этомъ случаѣ взаимно-перпендикулярны (легко видѣть, что то же относится къ парѣ изъ круга и равносторонней гиперболы и еще парѣ подобныхъ кривыхъ).

Ради наглядности прилагаю фиг. 3 [1]), демонстрирующую эти взаимоотношенія (спеціально этотъ выводъ изложенъ въ приложеніи къ этой статьѣ).

Для этого случая точка B на фиг. 1 безконечно-удалена, а потому нетолько пара точекъ D съ D′, но и точки C съ C′ находятся на діаметрѣ круга. Если изъ первой пары возьмемъ D, то этой кривой по отношенію къ обѣимъ гармонически-сопряженнымъ параболамъ, коимъ соотвѣтствуютъ точки C и C′, будетъ сопряжена та, которой соотвѣтствуетъ точка D′, какъ точка той же системы. Но такъ какъ точкѣ D′, какъ вещественной, принадлежитъ та же равносторонняя гипербола, что и точкѣ D, то значитъ для четвертой кривой ее нужно принять за мнимую, и тогда ей будетъ соотвѣтствовать кругъ (какъ кривая опредѣляемая на безконечно-удаленной прямой взаимно-перпендикулярными парами мнимыхъ точекъ [1]).



Фиг. 3.

Если это справедливо для одной произвольной примы, проходящей чрезъ кругъ, то справедливо и для всѣхъ такихъ примъ линейной секунды. Принимая же во вниманіе, что въ этой системѣ, родственной системѣ точекъ на плоскости, линейная прима равностороннихъ гиперболъ коррелятивна примѣ безконечно-удаленныхъ точекъ, находимъ, что кругъ коррелятивенъ центру той квадратичной примы, которая представлена въ секундѣ параболами.

Но квадратичная прима параболъ есть прима особая, такъ какъ ее можно опредѣлить произвольно взятыми тремя ея элементами и значитъ совокупность параболъ точекъ въ линейной секундѣ конопримъ точекъ, есть сфероприма.

[1]) Кромѣ упомянутыхъ четырехъ гармоническихъ кривыхъ примы на ней изображенъ полярный (по отношенію ко всѣмъ кривымъ примы) трехугольникъ, а пунктиромъ показаны главные діаметры обѣихъ параболъ и ассимптоты равностороннихъ гиперболъ; первыя двѣ съ двумя другими образуютъ съ математическою точностью уголъ 45°.

[1]) Побочно изъ тѣхъ же соображеній вытекаютъ слѣдующія теоремы: если какія-нибудь четыре кривыя пересѣкаются въ четырехъ общихъ точкахъ, то въ каждой общей точкѣ пересѣченія получаются четыре касательныя какъ лучи, исходящіе изъ одной точки, и во всѣхъ четырехъ точкахъ лучи, касательные къ одной и той же кривой проективны. Въ частности, если въ одной изъ четырехъ точекъ четыре луча гармоническіе, то это имѣетъ мѣсто и во всѣхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полная совокупность параболъ точекъ есть нѣкоторая кварта, такъ какъ въ каждой точкѣ плоскости пересѣкается секунда параболъ, для которыхъ эта точка есть вершина (точка ея пересѣченія съ главнымъ діаметромъ).

Такъ какъ въ линейной секундѣ конопримъ точекъ изъ всей этой кварты общими имѣются только параболы только что охарактеризованной примы, то значитъ пересѣченіе кварты параболъ точекъ съ линейною секундою конопримъ точекъ есть сфероприма параболъ точекъ, а линейная секунда конопримъ точекъ общаго характера, вполнѣ и однозначно опредѣляется тремя параболами [1]).

Мы видѣли, что между линейными примами общаго характера мы можемъ отличать тѣ, которыя включаютъ двѣ параболы, отъ тѣхъ, которыя не включаютъ ни одной параболы (а состоятъ только изъ гиперболъ). Такъ какъ вообще двѣ линейныя примы *одной и той же линейной секунды пересѣкаются* въ единичномъ элементѣ, то отсюда видимъ, что всѣ элементы секунды можемъ раздѣлить на два разряда: 1) тѣ, въ которыхъ пересѣкаются двѣ примы перваго разряда, и такіе элементы мы назовемъ внутренними по отношенію къ сферопримѣ и 2) тѣ, въ которыхъ какая-либо прима пересѣкается съ примою второго разряда и которые мы назовемъ внѣшними по отношенію къ сферопримѣ. Ясно, что кругъ Z относится къ внутреннимъ элементамъ.

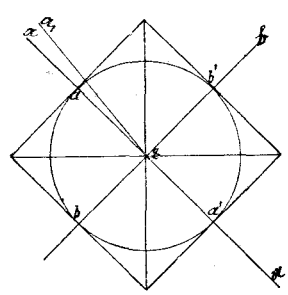
Сама сфероприма разграничиваетъ элементы внутреннія отъ элементовъ внѣшнихъ, и если, въ частныхъ случаяхъ, линейная прима включаетъ только одну параболу точекъ, то такая прима есть касательная къ сферопримѣ. Всѣ разсужденія этого рода мы можемъ прямо заимствовать изъ родственной съ этою системою точекъ на плоскости.

Имѣя сфероприму параболъ точекъ и линейную приму равносторонихъ гиперболъ точекъ, мы можемъ установить родственную коррелятивность между элементами разсмотрѣнной линейной секунды и точками плоскости, на которой возьмемъ какой-нибудь кругъ k имѣющій центромъ точку z.

Мы сначала произвольно возьмемъ точку a на кругѣ плоскости и параболу A на сферопримѣ; проведемъ діаметръ az до пересѣченія съ k въ точкѣ a' и въ *безконечно удаленной прямой* въ точкѣ $\mathfrak{a}$. Соотвѣтственно проводимъ чрезъ параболу A и кругъ Z линейную приму до пересѣченія со сферопримою K въ параболѣ A′, а также до пересѣченія съ примою равносторонихъ гиперболъ въ элементѣ $\mathfrak{A}$.

Изъ точки $\mathfrak{a}$ проводимъ къ кругу двѣ касательныя, и пусть точки касанія b и b', а ихъ прямая пересѣкаетъ безконечно-удаленную прямую въ точкѣ $\mathfrak{b}$. Соотвѣтственно проводимъ изъ $\mathfrak{A}$ къ сферопримѣ двѣ касательныя линейныя примы, которыя со сферопримою будутъ имѣть параболы B и B′ какъ элементы касанія, и пусть линейная прима BB′ пересѣкаетъ приму равносторонихъ гиперболъ въ элементѣ $\mathfrak{B}$.

Такъ какъ для установленія коррелятивности въ секундахъ достаточно четырехъ элементовъ, то этими операціями коррелятивность уже установлена. Для нея достаточно имѣть квадратъ, коего вершины есть точки a, b, a′, b′ и соотвѣтствующій ему квадратъ A, B, A′, B′ въ родственной системѣ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Два діаметра aa′ и bb′ взаимно перпендикулярны; поэтому и въ коррелятивной системѣ мы можемъ считать примы AA′ и BB′ взаимноперпендикулярными. Всѣ прямыя, проходящія чрезъ точки $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и вообще точки безконечно удаленной прямой мы называемъ параллельными, а потому можемъ назвать параллельными и примы, имѣющія общій элементъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ или вообще какую-нибудь равностороннюю гиперболу. Отрѣзки ab, ba′, a′b′, b′a мы называемъ равными, а потому можемъ назвать равными и отрѣзки AB, BA′, A′B′, B′A.

Теперь легко доказать, что мѣру отрѣзковъ и угловъ можно распространить на всѣ коррелятивные элементы.

Сначала относительно мѣры угловъ.

Изъ каждаго элемента очень легко провести двѣ перпендикулярныя примы. Пусть на плоскости дана точка O и чрезъ нее проведены два перпендикуляра. Ясно, что оба эти перпендикуляра въ пересѣченіи

[1]) Любопытно замѣтить, что въ системѣ круговъ (и шаровъ) точечные играютъ ту же роль, что параболы въ системѣ конопримъ вообще: въ каждой линейной примѣ круговъ имѣется или два точечные, или ни одного (одинъ только въ концентрической).

съ безконечно-удаленною прямою дадутъ двѣ точки c и $\mathfrak{d}$. Чтобы въ коррелятивномъ элементѣ провести оба коррелятивные перпендикуляра, замѣтимъ, что на экстраприме достаточно имѣть двѣ пары пересѣченій съ перпендикулярами, чтобы получить инволюцію перпендикуляровъ вообще. Такія двѣ пары перпендикуляровъ мы уже имѣемъ въ предъидущихъ построеніяхъ, а именно пары aa' съ bb' и $a\mathfrak{d}$ съ $a\mathfrak{d}'$. Имѣя на экстраприме двѣ пары соотвѣтственныхъ элементовъ, мы имѣемъ вмѣстѣ съ тѣмъ и инволюцію (изотропную); поэтому, проведя коррелятивную линейную приму $O\mathfrak{E}$ и получивъ экстраэлементъ $\mathfrak{E}$, мы на экстраприме найдемъ сопряженный съ нимъ элементъ $\mathfrak{d}$ и соединимъ его линейною примою съ элементомъ O; она и будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Чтобы вообще найти мѣру для различныхъ угловъ въ разныхъ элементахъ, мы сначала возьмемъ такой маленькій уголъ, чтобы въ немъ, какъ въ единицѣ, съ желаемою степенью точности можно было выразить величину какого-угодно угла. Допустимъ, что мы ограничимся мѣрою въ 0,0001 прямого угла и отложимъ такой уголъ при z отъ za; пусть этотъ уголъ есть azz_1; въ коррелятивной системѣ найдемъ соотвѣтственный элементъ $\mathfrak{A}_1$, и тогда можемъ построить рядъ элементовъ на экстраприме, которые съ каждымъ сосѣднимъ будутъ выражать мѣру того же угла; для этого сначала, построимъ элементъ $\mathfrak{B}_1$, сопряженный съ $\mathfrak{A}_1$ въ инволюціи на экстраприме; затѣмъ найдемъ $\mathfrak{A}_2$, гармонически раздѣленый съ $\mathfrak{A}$ элементами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$; затѣмъ опять найдемъ элементъ $\mathfrak{B}_2$, сопряженный съ $\mathfrak{A}_2$ въ инволюціи на экстраприме; потомъ найдемъ $\mathfrak{A}_3$, гармонически раздѣленный съ $\mathfrak{A}_1$ элементами $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$ и т. д. Такимъ образомъ экстраприма разобьется на 20000 отрѣзковъ, соотвѣтствующихъ равнымъ угламъ, гдѣ бы въ предѣлахъ секунды ни находилась вершина каждаго даннаго угла, мѣру котораго нужно узнать.

Теперь перейдемъ къ мѣрѣ отрѣзковъ.

На параллельныхъ отрѣзкахъ задача разрѣшается особенно просто, такъ какъ каждые два таковые равны, если линейныя примы, проведенныя чрезъ ихъ концы, пройдутъ чрезъ одинъ и тотъ же экстраэлементъ.

Чтобы опредѣлить равные отрѣзки на примахъ разныхъ направленій, нужно сначала умѣть строить сферопримы вообще то есть рѣшить задачу: построить сфероприму по данному центру и величинѣ радіуса?

Если данъ отрѣзокъ CD и элементъ C долженъ быть центромъ сферопримы, то сначала на линейной примѣ отрѣзка отложимъ CD' равный CD, а затѣмъ примемъ D и D' за центры проективныхъ лучей и проведя послѣдовательно примы $D\mathfrak{A}$, $D\mathfrak{A}_1$ $D\mathfrak{A}_2$... будемъ пересѣкать ихъ перпендикулярными примами $D'\mathfrak{A}$, $D'\mathfrak{A}_1$, $D'\mathfrak{A}_2$... Соотвѣтственные элементы D_1, D_2, D_3, и будутъ элементами искомой сферопримы, а вмѣстѣ разрѣшенъ вопросъ и о мѣрѣ отрѣзковъ во всѣхъ направленіяхъ.

Еще удобнѣе разрѣшить вопросъ такъ: если данъ отрѣзокъ CD и нужно найти равный ему отрѣзокъ, CD_n, мы сначала раздѣлимъ уголъ DCD_n пополамъ и если полученная биссектриса есть $C\mathfrak{A}_m$, то проводимъ къ ней чрезъ D перпендикуляръ $D\mathfrak{B}_m$, и тогда его пересѣченіе съ CD_n и даетъ искомый элементъ D_n, который съ C образуетъ отрѣзокъ, равный CD.

Изъ изложеннаго видимъ, что всякая сфероприма дѣйствительно опредѣляется тремя элементами секунды.

Въ самомъ дѣлѣ, если даны три элемента A B и C, то достаточно изъ срединъ отрѣзковъ BC съ CA провести къ нимъ перпендикуляры, и если эти перпендикуляры пересѣкутся въ элементѣ O, то O и есть искомый центръ сферопримы. Тогда соединяемъ O напр. съ A линейною примою и откладываемъ OA' равный OA и получаемъ концы діаметра A и A', по которымъ можемъ построить сфероприму, какъ показано выше.

Изъ всего изложеннаго видимъ, что въ родственныхъ системахъ, какъ напр. въ двухъ только-что разсмотрѣнныхъ, повторяются рѣшительно всѣ построенія, а нетолько одного опредѣленнаго характера, такъ называемыхъ позиціонныхъ; такъ какъ доказательство каждой геометрической теоремы сводится къ опредѣленнымъ построеніямъ, то значитъ къ нимъ ко всѣмъ одинаково приложимы и всѣ теоремы, выведенныя для одной изъ нихъ.

Въ частности, для всѣхъ системъ, родственныхъ съ только-что разсмотрѣнными, приложима и теорема, выведенная для системы точекъ, что если возьмемъ сфероприму и линейнук приму, и примемъ первую за сфероприму реципрочнаго преобразованія, то линейная прима преобразуется въ другую сфероприму, проходящую чрезъ центръ первой.

Уже такимъ образомъ для всѣхъ такихъ системъ изъ одной данной примы можемъ вывести безконечное множество второй степени сферопримъ, проходящихъ чрезъ одинъ элементъ. Построеніе вполнѣ обобщается, если будемъ реципрочно преобразовывать линейныя примы во всѣхъ вновь получаемыхъ сферопримахъ, центры конхъ занимаютъ всевозможныя положенія въ линейной секундѣ.

Но понятно, что всѣ построенія должны пониматься опредѣленнымъ условнымъ образомъ, какъ это мы видѣли для проведенія перпендикуляровъ и отложенія угловъ данной величины вообще, также какъ отложеніе равныхъ отрѣзковъ и т. под.

Въ частности, такимъ же условнымъ образомъ должны пониматься и теоремы, касающіяся симметріи. Мы можемъ утверждать, что во всѣхъ системахъ сферопримы имѣютъ высокую симметрію, а именно ихъ центръ есть центръ вращенія и всѣ радіусы равные; но это не значитъ напр., что всѣ кривыя сферопримы равны и что этотъ центръ непремѣнно кругъ, хотя это и можетъ имѣть мѣсто въ частныхъ случаяхъ, какъ это показано въ статьѣ „Симметрія въ линейныхъ совокупностяхъ кривыхъ 2-го порядка (конопримъ)"; но напр. именно для линейныхъ секундъ это не имѣетъ мѣста, какъ показано въ той же статьѣ. Нетолько тогда, когда для опредѣленія секунды мы возьмемъ вообще какія нибудь три равныя параболы, но даже если выведемъ ихъ изъ одной параболы и нѣкоторой точки, которую примемъ за основаніе тройной оси симметріи, то все-таки получимъ линейную секунду, которая сама по себѣ не обладаетъ осью вращенія въ смыслѣ системы точекъ; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ такою симметріей обладаетъ сфероприма параболъ, какъ увидимъ дальше.

Зная непрерывность состава кривыхъ въ линейной примѣ, мы легко опредѣлимъ возможный составъ кривыхъ сферопримъ. Составъ сферопримы изъ однихъ параболъ есть составъ исключительный. Проводя линейныя примы черезъ центръ круга то есть, проще говоря, проводя діаметры этой исключительной сферопримы, мы легко находимъ, что всѣ ея внутренніе элементы есть эллипсы, а всѣ внѣшніе элементы—гиперболы, считая въ томъ числѣ и пары сопряженныхъ лучей.

Всѣ остальныя сферопримы или пересѣкаютъ исключительную сфероприму параболъ, и тогда состоятъ частью изъ эллипсовъ, частью изъ гиперболъ.

Вообще же ни одна сфероприма экстраэлементовъ то есть равносторонникъ гиперболъ, не содержитъ. Тѣ же, которыя ихъ содержатъ, есть уже спеціальныя сферопримы.

Если сфероприма не пересѣкаетъ исключительной сферопримы, то она состоитъ только изъ гиперболъ или только изъ эллипсовъ.

Наконецъ, въ частномъ случаѣ, сфероприма касательна къ примѣ параболъ. Если касаніе внѣшнее, то она содержитъ кромѣ гиперболъ еще одну единственную параболу, и тогда эта парабола есть элементъ касанія. Если касаніе внутреннее, то сфероприма состоитъ изъ эллипсовъ и содержитъ также одну единственную параболу какъ элементъ касанія.

Означимъ разсмотрѣнную линейную секунду чрезъ S, а какую-нибудь ея линейную приму, проходящую чрезъ кругъ, черезъ P_m. Взявъ еще какой-нибудь экстраэлементъ, то есть равностороннюю гиперболу H_n, не входящій въ составъ секунды, мы можемъ изъ этой секунды и элемента H_n опредѣлить линейную терцію.

Составить послѣднюю мы можемъ различнымъ образомъ: или составлять линейныя секунды изъ P_1, P_2... P_m и экстраэлемента H_n или напр. изъ экстраэлемента H_1, входящаго въ составъ первоначальной секунды и элемента H_n составить предварительно линейную приму, и тогда секунды составлять изъ общей для всѣхъ линейной примы P_m и экстраэлементовъ H_1, H_2... входящихъ въ составъ линейной примы H_1H_m.

Въ первомъ случаѣ мы вращаемъ секунды около общаго діаметра CH_m, во второмъ случаѣ около діаметра P_m, который также проходитъ чрезъ центръ C и нѣкоторый экстраэлементъ H_0.

Въ линейной такимъ образомъ составленной терціи мы пока вывели всего одинъ единственный кругъ C; имѣется линейная секунда экстраэлементовъ $H_0H_1H_m$ и сферосекунда параболъ. Доказать, что совокупность параболъ этой терціи есть именно сферосекунда, мы можемъ аналогично тому, какъ доказали, что совокупность параболъ въ линейной секундѣ общаго характера есть сфероприма, а именно: такъ какъ четырьмя кривыми однозначно и вполнѣ опредѣляется линейная терція, то мы можемъ совокупность параболъ полученной терціи опредѣлить произвольно взятыми четырьмя параболами этой совокупности; для этого достаточно терцію пересѣчь полною квартою параболъ.

Эта терція родственна системѣ точекъ въ пространствѣ то есть и къ ней мы можемъ приложить тѣ-же мѣры отрѣзковъ и угловъ, что и въ системѣ точекъ.

Имѣя уже установленную коррелятивность между линейною секундою AB A′B′ и плоскостью, мы вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ и коррелятивность примы экстраэлементовъ съ безконечно удаленной прямой. Изъ этой примы можемъ къ совокупности параболъ, которая во всѣхъ своихъ сѣченіяхъ съ линейными секундами образуетъ сферопримы, провести двѣ ка-

сательныя линейныя секунды, и тогда линейная прима, проходящая чрезъ обѣ точки касанія (и одновремено чрезъ кругъ то есть центръ сфероприм), есть перпендикуляръ къ линейной секундѣ, который экстрасекунду пересѣчетъ въ экстраэлементѣ, коррелятивномъ экстраприме секунды; четыре такія соотвѣтствія устанавливаютъ коррелятивность между экстраэлементами и экстрапримами въ экстрасекундѣ; эта коррелятивность опредѣляетъ положеніе перпендикуляровъ ко всѣмъ линейнымъ секундамъ, проходящимъ чрезъ центръ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и ко всѣмъ вообще, такъ какъ всѣ остальныя линейныя секунды параллельны секундамъ центральнымъ.

Этимъ устанавливается мѣра всякихъ угловъ между линейными примами и секундами въ нашей терціи, а сферосекунда устанавливаетъ мѣру отрѣзковъ во всѣхъ направленіяхъ діаметровъ сферосекунды.

Параболы исключительной сферосекунды раздѣляютъ терцію на двѣ области: область внутреннихъ элементовъ, представленныхъ эллипсами, въ частности кругомъ, и область внѣшнихъ элементовъ, представленныхъ гиперболами, въ частности сопряженными парами лучей.

Отъ исключительной сферосекунды мы легко перейдемъ ко всѣмъ сферосекундамъ вообще, такъ какъ каждая изъ нихъ опредѣляется четырьмя произвольными элементами, лишь бы въ ихъ составъ не входили экстраэлементы. По этой причинѣ въ сферосекундахъ не представлено вовсе экстраэлементовъ; построеніе же сферосекундъ по четыремъ элементамъ, удовлетворяющимъ этимъ условіямъ, затрудненій не представляетъ. Также не представляетъ затрудненія и опредѣленіе состава сферосекундъ общаго характера въ этой терціи. Или онѣ не имѣютъ со сферосекундою параболъ ни одного общаго элемента, и тогда они представлены только эллипсами (внутренія сферосекунды) или только гиперболами (внѣшнія сферосекунды), или же пересѣкаютъ сферосекунду параболъ въ сфероприме параболъ, и тогда одна часть состоитъ изъ эллипсовъ, а другая изъ гиперболъ.

Разсуждая такимъ же образомъ, мы найдемъ, что если для опредѣленія линейной кварты мы возьмемъ пять параболъ (конечно непринадлежащихъ одной линейной терціи), то получимъ исключительную сферотерцію, если пересѣчемъ линейную кварту съ квартою, то есть полною совокупностью, параболъ. Линейная терція равностороннихъ гиперболъ составитъ въ этой системѣ полную совокупность экстраэлементовъ.

Наконецъ, если возьмемъ шесть параболъ (не входящихъ въ составъ линейной квинты), то получимъ исключительную сферокварту пересѣченіемъ этой квинты то есть полной совокупности всѣхъ кривыхъ вообще, полною совокупностью то есть квартою параболъ и тогда полною совокупностью экстраэлементовъ будетъ кварта равностороннихъ гиперболъ то есть дѣйствительно ихъ полная совокупность.

Въ линейной секундѣ общаго характера мы имѣемъ одинъ ёдинственный кругъ и онъ есть центръ исключительный для этой секунды сферопримы. Вообще ни одна дѣйствительная сфероприма этой секунды не проходитъ ни черезъ одинъ изъ экстраэлементовъ секунды.

И между конопримами точекъ на плоскости мы отличаемъ таковыя общаго характера и спеціальныя. Прямая линія есть нетолько спеціальная кривая второго порядка, но и всѣхъ другихъ, высшихъ порядковъ. Въ частности, она есть спеціальный видъ круга, когда онъ опредѣляется такими тремя точками, которыя находятся на одной прямой.

Если же мы опредѣлимъ кругъ такими тремя точками, изъ которыхъ одна составляетъ экстраэлементъ, ненаходящійся на одной прямой съ двумя другими точками, то получимъ спеціальный кругъ изъ пары прямыхъ, изъ которой одна есть прямая экстраточекъ то есть безконечно удаленная прямая.

Совершенно тотъ же спеціальный видъ мы получаемъ для параболы, если опредѣлимъ ее по тремъ точкамъ, находящимся на одной прямой и одной экстраточкою.

Спеціальный видъ гиперболы вообще есть пара произвольныхъ прямыхъ, а если эти обѣ прямыя взаимно перпендикулярны, то получимъ спеціальный видъ равносторонней гиперболы. Въ виду произвольности этихъ прямыхъ мы одну изъ нихъ можемъ взять безконечно-удаленною то есть экстрапримою и тогда произвольная другая прямая составитъ съ нею тоже спеціальный видъ равностороннихъ гиперболъ. И такихъ особо спеціальныхъ видовъ этихъ кривыхъ мы имѣемъ секунду. Такъ какъ полная совокупность равностороннихъ гиперболъ есть кварта, то такія особо спеціальные виды мы могли бы назвать вдвойнѣ спеціальными.

Въ спеціальныхъ видахъ кривыя разныхъ разрядовъ сходятся и нетолько кривая второго порядка, но даже, какъ только что видѣли, и кривыя разныхъ порядковъ.

Поэтому, когда мы говоримъ совокупность общаго характера то есть не спеціальная, то мы подразумѣваемъ именно присутствіе въ ней тѣхъ признаковъ, которые отличаютъ ее отъ совокупностей другихъ разрядовъ. Для совокупностей же спеціальныхъ мы этого различія не имѣемъ.

Слѣдовательно, если мы выведемъ теорему для совокупности общаго характера, то она справедлива и для спеціальнаго вида, представляя въ рѣшеніи нѣкоторыя особенности; для спеціальнаго же вида мы получимъ именно эти особенности, а потому теорема съ этими особенностями для совокупности общаго характера не примѣнима.

Когда мы перешли отъ линейныхъ секундъ къ линейнымъ терціямъ, то брали только одинъ кругъ какъ центръ исключительной сферопримы въ первыхъ и какъ центръ исключительной сферосекунды во вторыхъ.

Но въ линейныхъ терціяхъ общаго характера мы имѣемъ уже не одинъ кругъ, а цѣлую линейную приму круговъ. Это слѣдуетъ изъ того, что полная совокупность круговъ есть линейная терція, а всякая линейная терція со всякою другою линейною терціею пересѣкаются въ линейной примѣ.

Отсюда, если принять во вниманіе, что центромъ сферосекунды долженъ быть одинъ изъ круговъ ихъ линейной примы, заключаемъ, что въ линейной терціи общаго характера содержащаяся въ ней единственная линейная прима круговъ есть діаметръ исключительной сферосекунды.

Но, какъ линейная прима и какъ діаметръ всякой исключительной сферопримы, находящейся въ проходящихъ чрезъ нее линейныхъ сферосекундахъ, она пересѣкаетъ экстрасекунду въ одномъ элементѣ, и слѣдовательно этотъ элементъ долженъ одновременно принадлежать и примѣ круговъ и примѣ равносторонних гиперболъ.

Слѣдовательно, единственная линейная прима круговъ въ линейной терціи общаго характера пересѣкается съ линейною секундою равносторонних гиперболъ въ парѣ прямыхъ, изъ которыхъ одна безконечно-удаленная, а другая есть радикальная ось примы круговъ.

Эта теорема должна быть приложена и къ той спеціальной линейной терціи, въ которой имѣется линейная секунда круговъ.

Слѣдовательно, въ той спеціальной линейной терціи, въ которой имѣется линейная секунда круговъ, всѣ экстраэлементы этой секунды есть пары прямыхъ, изъ которыхъ одна безконечно удаленная, а другая принадлежитъ радикальнымъ осямъ системы круговъ то есть всѣ эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Это очевидно и потому, что въ линейной секундѣ круговъ никакихъ кривыхъ общаго характера кромѣ круговъ не имѣется.

Но съ другой стороны въ линейной терціи общаго характера, имѣющаяся въ ней единственная линейная прима круговъ пересѣкаетъ исключительную сферосекунду, какъ ея діаметръ, въ двухъ элементахъ, которые оба не могутъ быть экстраэлементами, должны одновременно принадлежать примѣ круговъ и исключительной сферопримѣ и притомъ быть гармонически-сопряженными съ двумя предъидущими элементами. и изъ нихъ радикальная ось есть экстраэлементъ.

Такъ какъ въ примѣ круговъ иныхъ элементовъ, общихъ кругамъ съ параболами, кромѣ двухъ прямыхъ, то-есть радикальной оси и безконечно удаленной прямой не имѣется, и притомъ онѣ являются гармонически-сопряженными съ двумя предъидущими, то онѣ именно и есть искомые общіе элементы, и изъ нихъ радикальная ось есть электраэлементъ.

Итакъ, каждая исключительная сферосекунда пересѣкается съ единственною въ линейной терціи линейною примою круговъ въ парѣ прямыхъ, изъ которыхъ одна есть радикальная ось примы круговъ, а другая безконечно-удаленная прямая.

Отсюда же видимъ, что въ линейной секундѣ круговъ исключительною сферопримою является совокупность радикальныхъ осей, то-есть линейная прима прямыхъ, а центромъ ея является ортогональный кругъ примы, вещественный или мнимый, смотря по ея разряду, а линейною примою,—тѣ же радикальныя оси съ присоединеніемъ безконечно-удаленной прямой.

Изъ соображеній этого рода мы можемъ заключить, по аналогіи, не входя въ детали, что въ линейной квартѣ общаго характера та діаметральная линейная секунда круговъ, которая является въ ней единственною, пересѣкаетъ экстратерцію въ парахъ лучей, изъ которыхъ одинъ есть безконечно-удаленная прямая, а другой образуетъ приму радикальныхъ осей секунды круговъ.

Въ той спеціальной линейной квартѣ, въ которой имѣется линейная терція круговъ, всѣ ея экстраэлементы, есть пары прямыхъ, изъ которыхъ одна безконечно-удалне-

ная, а другую составляютъ всѣ прямыя плоскости.

Каждая исключительная сферотерція пересѣкается съ единственною въ линейной квартѣ общаго характера линейною секундою круговъ въ прямыхъ, составляющихъ приму радикальныхъ осей секунды круговъ.

Наконецъ, въ линейной терціи, то-есть полной совокупности круговъ исключительною сферосекундою является совокупность всѣхъ прямыхъ плоскости, а линейною секундою экстраэлементовъ тѣ же прямыя съ присоединеніемъ безконечно-удаленной прямой.

Такимъ образомъ въ самомъ общемъ видѣ разрѣшенъ вопросъ о сферическихъ совокупностяхъ кривыхъ 2-го порядка или колопримъ точекъ.

Произвольная коллинеація преобразуетъ эти сферическія совокупности въ коно-совокупности, то-есть сферопримы въ конопримы, сферосекунды въ коносекунды, сферотерціи въ конотерціи и сферокварты въ конокварты.

Но ко всѣмъ этимъ совокупностямъ одинаково примѣнима общая теорія полюсовъ и поляръ, такъ что, не приводя спеціальныхъ доказательствъ, мы непосредственно можемъ перечислить длинный рядъ теоремъ, и при этомъ перечисленіи намъ придется встрѣтиться съ новыми геометрическими образами и соотвѣтственно съ этимъ ввести рядъ новыхъ опредѣленій.

Сначала разсмотримъ линейную секунду, и возьмемъ въ ней произвольную коноприму конопримъ точекъ.

Изъ произвольнаго внѣшняго элемента этой секунды мы можемъ провести къ ней двѣ касательныя примы и получимъ два элемента касанія, которыя опредѣлятъ линейную приму, составляющую поляру взятаго элемента, какъ ея полюса по отношенію къ конопримѣ. Въ частности, если этотъ полюсъ принадлежитъ экстраприме, поляра проходитъ чрезъ центръ конопримы и составляетъ діаметръ, а обѣ касательныя примы будутъ параллельны.

Если проведемъ другую линейную приму, пересѣкающую первую во внутреннемъ элементѣ, то ей, какъ полярѣ коррелятивенъ внѣшній элементъ, какъ ея полюсъ, и тогда линейная прима, проходящая чрезъ оба внѣшніе полюса, есть поляра внутренняго элемента пересѣченія. Въ частности, центру конопримы коррелятивна экстраприма.

Теперь перейдемъ къ линейной терціи и возьмемъ въ ней произвольную коносекунду конопримъ точекъ.

Изъ произвольнаго внѣшняго элемента мы можемъ провести приму касательныхъ линейныхъ примъ, и эту совокупность назовемъ примоконусомъ или просто конусомъ касанія. Всѣ элементы касанія находятся въ одной линейной секундѣ и составляютъ въ ней коноприму. Эта секунда называется полярною секундою внѣшняго элемента какъ ея полюса. Взявъ другой внѣшній элементъ, получимъ другую полярную секунду, и тогда линейная прима, проведенная чрезъ оба внѣшніе элемента взаимно полярна линейной примѣ пересѣченія обѣихъ полярныхъ секундъ.

Если возьмемъ еще третій внѣшній элементъ, то получимъ коррелятивную съ нимъ третью полярную секунду, и тогда элементъ пересѣченія этихъ трехъ секундъ есть полюсъ линейной секунды, проходящей чрезъ три внѣшніе элемента, и эта секунда будетъ его полярною секундою.

Въ частности, если внѣшній элементъ принадлежитъ экстрасекундѣ, коррелятивная ему полярная секунда есть діаметральная секунда коносекунды, а примоконусъ превращается въ примоцилиндръ или просто цилиндръ. И обратно, если за полюсъ примемъ центръ коносекунды, то коррелятивная ему полярная секунда есть экстрасекунда.

Теперь перейдемъ къ линейной квартѣ и возьмемъ въ ней произвольную конотерцію конопримъ точекъ.

Изъ произвольнаго внѣшняго элемента мы можемъ провести секундоконусъ касательныхъ линейныхъ примъ, и всѣ элементы касанія будутъ принадлежать линейной терціи, въ которой они составятъ коносекунду. Эта терція называется полярною терціею внѣшняго элемента какъ ея полюса.

Взявъ другой внѣшній элементъ, получимъ другую полярную терцію, и тогда линейная прима изъ обоихъ внѣшнихъ элементовъ есть взаимнополярная съ линейною секундою пересѣченія обѣихъ полярныхъ терцій.

Если возьмемъ еще третій внѣшній элементъ, то получимъ третью полярную терцію, а линейная прима пересѣченія этихъ терцій взаимнополярна съ линейною секундою, проходящею чрезъ всѣ три внѣшніе элемента.

Если, наконецъ, возьмемъ четвертый внѣшній элементъ, то получимъ четвертую полярную терцію, а элементъ пересѣченія всѣхъ этихъ четырехъ терцій есть полюсъ линейной терціи, проходящей чрезъ

всѣ четыре внѣшніе элемента, и это будетъ его полярная терція.

Въ частности, если внѣшній элементъ возьмемъ на экстратерціи, то совокупность касательныхъ образуетъ секундоцилиндръ, а коррелятивная ему полярная терція есть діаметральная терція конотерціи. И обратно, если за внутренній элементъ возьмемъ центръ, то коррелятивная ему полярная терція есть экстратерція.

Наконецъ разсмотримъ полную совокупность коноприм точекъ, то-есть ея линейную квинту и возьмемъ въ ней произвольную конокварту.

Изъ каждаго внѣшняго элемента мы можемъ провести терціоконусъ касательныхъ примъ, а всѣ элементы касанія принадлежатъ линейной квартѣ и составляютъ въ ней конотерцію. Эта кварта называется полярною квартою внѣшняго элемента какъ ея полюса.

Изъ другого внѣшняго элемента выведемъ другую полярную кварту, а линейная терція пересѣченія обѣихъ квартъ есть терція взаимнополярная съ линейною примою, проходящею чрезъ оба внѣшніе элемента.

Третій внѣшній элементъ опредѣлитъ третью коррелятивную съ нимъ полярную кварту, и тогда линейная секунда пересѣченія трехъ квартъ называется взаимнополярною съ линейною секундою, проходящею чрезъ оба внѣшніе элемента.

Четвертый внѣшній элементъ опредѣляетъ четвертую коррелятивную съ нимъ полярную кварту, а линейная прима пересѣченія всѣхъ четырехъ квартъ взаимнополярна съ линейною терціею, проходящею чрезъ всѣ четыре внѣшніе элемента.

Наконецъ, пятый внѣшній элементъ опредѣляетъ пятую коррелятивную съ нимъ полярную кварту, а единственный внутренній элементъ пересѣченія всѣхъ четырехъ квартъ есть полюсъ той линейной, какъ его полярной, кварты, которая проходитъ чрезъ всѣ пять внѣшнихъ элементовъ.

Въ частности, если внѣшній элементъ принадлежитъ экстраквартѣ, то полярная, коррелятивная съ нимъ кварта есть діаметральная кварта конокварты, а терціоконусъ становится терціоцилиндромъ. И обратно, если внутренній элелентъ, какъ полюсъ, возьмемъ центръ конокварты, то коррелятивная съ нимъ полярная кварта, есть экстракварта.

Всѣ сферическія совокупности, какъ таковыя, въ разъясненномъ выше условномъ смыслѣ обладаютъ сферическою симметріею, тѣмъ болѣе высокою, чѣмъ выше ступень системы. Но какъ совокупности кривыхъ на плоскости онѣ вообще такою симметріей не обладаютъ, но могутъ обладать тѣми или другими элементами симметріи въ спеціальныхъ случаяхъ.

Наиболѣе высокой симметріи нужно ожидать отъ исключительныхъ сферическихъ совокупностей, такъ какъ таковыя состоятъ изъ кривыхъ одного разряда (параболъ) и въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ могутъ стать равными.

Мы видѣли выше, что въ терціяхъ общаго характера въ составъ исключительныхъ сферосекундъ входятъ элементы въ видѣ прямыхъ, и притомъ въ числѣ двухъ; ясно, что такія сферосекунды не могутъ имѣть оси симметріи высшаго наименованія чѣмъ два.

Но не то въ спеціальныхъ системахъ.

Мы знаемъ, что есть спеціальная линейна терція, имѣющая круговую симметрію; ясно, что принадлежащая ей сферосекунда есть секунда равныхъ параболъ. Эту линейную терцію мы можемъ, слѣдовательно, воспроизвести, исходя изъ одной параболы и четверной оси симметріи, которая изъ нея одной выведетъ четыре равныя, а между тѣмъ для опредѣленія сферосекунды такихъ четырехъ элементовъ и достаточно, и, слѣдовательно, можно уже непосредственно заключить, что ось симметріи этой системы должны имѣть наименованіе не меньшее, чѣмъ четыре.

Однако всѣ вообще системы, обладающія осью вращенія, есть системы спеціальныя, что видно изъ того, что въ нихъ можетъ быть представленъ или одинъ кругъ или полная терція круговъ. Въ терціяхъ же общаго характера имѣется прима, а въ квартахъ общаго характера секунда круговъ.

Особо спеціальная линейная секунда круговъ обладаетъ круговою симметріею.

Остается разсмотрѣть ту секунду общаго характера, которая обладаетъ тройною осью симметріи. Ее можно воспроизвести, если возьмемъ одну параболу, и тройную ось симметріи, которая изъ нее выведетъ три равныя параболы. Полученная линейная терція будетъ общаго характера, если діаметры параболъ не проходятъ чрезъ одну точку (общій центръ системы), и тогда исключительная сфероприма, какъ и вся система, обладаетъ только тройною осью симметріи. Но какъ только удовлетворяется условіе пересѣченія діаметровъ параболъ въ одной точкѣ, линейная секунда становится спеціальною, а симметрія сферопримы, да и всей системы, круговая.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно одной плоскости симметріи, чтобы кривая третьяго порядка, составленная изъ паръ точекъ, сопряженныхъ по отношенію

ко всѣмъ кривымъ секунды (кривая Якоби), разбилась на кривую второго порядка и прямую, а именно слѣдъ плоскости симметріи, въ которомъ должно находиться безконечное число такихъ паръ. Если же имѣется три плоскости симметріи, какъ въ данномъ случаѣ, то всѣ пары точекъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вся кривая превратится въ одну единственную точку-общій центръ системы.

Кромѣ исключительныхъ сферическихъ совокупностей мы до сихъ поръ видѣли только такія совокупности сложнаго состава кривыхъ. Но легко выдѣлить между ними и совокупности простого состава, а именно:

1) Нетолько параболы, но и всѣ вообще подобныя кривыя, за исключеніемъ равносторонніхъ гиперболъ, составляетъ сферокварты.

2) Нетолько равныя параболы, но вообще всѣ равныя кривыя, кромѣ круговъ, составляютъ сферотерціи.

Что полныя совокупности подобныхъ кривыхъ есть квадратичныя кварты, видно изъ того, что въ произвольной линейной примѣ вообще всѣ подобныя кривыя представлены по двѣ, и притомъ двѣ подобныя гиперболы во всѣхъ примахъ вообще, а въ тѣхъ, въ которыхъ имѣются еще и эллипсы, они также располагаются подобными парами за исключеніемъ одного крайняго, который въ исключительномъ случаѣ есть кругъ: если представлены только гиперболы, то въ единичномъ числѣ только одна.

Что эти квадратичныя совокупности есть именно сферо кварты, видно изъ того, что относительно ея пара кривыхъ, кругъ и экстраэлементъ гармонически сопряжены (см. приложеніе) назовемъ такія сферическія совокупности особыми.

Если линейную секунду общаго характера пересѣчемъ полною терціею какихъ-нибудь равныхъ кривыхъ, то всегда получится два элемента пересѣченія, а это означаетъ, что и полная совокупность равныхъ кривыхъ есть совокупность квадратичная, а такъ какъ она имѣетъ симметрію круга, то значитъ и такія совокупности есть совокупности сферическія.

Но, согласно вышеизложенному, центры ихъ не круги, а нѣкоторыя другія кривыя, за исключеніемъ тѣхъ совокупностей, которыя имѣютъ симметрію круга.

Отсюда заключаемъ, что если въ какой-нибудь линейной совокупности имѣется три равныя или подобныя кривыя, то въ ней имѣется ихъ сфероприма, если имѣется такихъ четыре, то имѣется и сферосекунда, наконецъ, если таковыхъ имѣется пять, то имѣется и сферотерція.

Въ линейныхъ совокупностяхъ общаго характера эти особыя сферическія совокупности распредѣлены слѣдующимъ образомъ; въ секундахъ имѣется двѣ равныя кривыя, которыя входятъ въ составъ сферопримы подобныхъ: въ терціяхъ имѣется сфероприма равныхъ, которыя входятъ въ составъ сферопримы подобныхъ; въ квартахъ имѣется сферосекунда равныхъ, которая входитъ въ составъ сферотерціи подобныхъ.

Все это относится къ линейнымъ совокупностямъ, пересѣкающимъ особыя сферическія то есть содержащимъ внутренніе элементы послѣднихъ; въ противномъ случаѣ элементовъ ихъ въ нихъ вовсе не представлено, а если въ нихъ представленъ только одинъ такой элементъ, то это означаетъ что линейная совокупность касательна къ особой сферической совокупности,—состоящей изъ такихъ элементовъ.

Легко опредѣлить и составъ кривыхъ каждой такой особой совокупности, если каждую кривую будемъ характеризовать величиною угла между двойными діаметрами, вещественными и мнимыми.

Во всѣхъ внутреннихъ элементахъ вещественный уголъ меньше, чѣмъ въ кривыхъ сферопримы (это значитъ въ случаѣ гиперболъ), а мнимый уголъ больше (въ случаѣ эллипсовъ); въ случаѣ параболъ, какъ мы видѣли выше, всѣ внутренніе элементы эллипсы. Для внѣшнихъ элементовъ, конечно, правило обратно то есть вещественные углы больше, а мнимые меньше.

Отъ распредѣленія совокупностей конопримы точекъ, какъ извѣстно, существенно отличается распредѣленіе совокупностей конопримъ прямыхъ или лучей. Нѣмецкими геометрами аналогичныя совокупности той и другой системы отмѣчаются особыми специфическими названіями. Линейная прима конопримъ точекъ называется Kegelschnittbüschel, ихъ линейная секунда—Kegelschnittnetz, ихъ линейная терція Kegelschnitt System dritter Stufe, ихъ линейная кварта Kegelschnitt-System vierter Stufe. Въ системѣ конопримъ лучей линейная прима называется Kegelschnitt-Schaar, ихъ линейная секунда Kegelschnitt-Schaarschaar, ихъ линейная терція Kegelschnitt-Gewebe dritter Stufe, а ихъ линейная кварта— Kegelschnitt-Gewebe vierter Stufe.

Всѣ эти совокупности легко выводятся изъ совокупностей предыдущей системы по простой коррелятивности, напр. какъ полюсы и поляры хотя бы по отношенію къ какому-нибудь кругу. Вслѣдствіе такой близости обѣихъ системъ нѣтъ надобности останавливаться на совокупностяхъ этой системы со спеціаль-

нымъ изслѣдованіемъ, подобнымъ вышеприведенному. Достаточно отмѣтить, что и здѣсь можно установить родственную связь съ системою точекъ; но придется принять другую систему электраэлементовъ, а именно взаимно перемѣнится роль параболъ и равносторонних гиперболъ. Въ самомъ дѣлѣ въ линейной примѣ конопримъ лучей, какъ опредѣляемой четырьмя касательными всегда имѣется одна единственная парабола, которая въ этой системѣ образуетъ линейную кварту. Наоборотъ, равносторонняя гипербола или присутствуетъ въ такой линейной примѣ въ двойномъ числѣ или вовсе отсутствуетъ, и только въ спеціальныхъ случаяхъ она представлена единично.

Такимъ образомъ въ системѣ конопримъ лучей экстраэлементами являются параболы, и исключительными сферическими совокупностями совокупности равносторонних гиперболъ, а ихъ центрами—круги.

Въ этой системѣ даже по отношенію къ исключительнымъ сферическимъ совокупностямъ уже нѣтъ раздѣленія эллипсовъ и гиперболъ, однихъ какъ внѣшнихъ, другихъ какъ внутреннихъ элементовъ.

Такъ какъ въ тѣхъ линейныхъ примахъ, которыя заключаютъ въ себѣ два круга, сосѣдніе элементы образуютъ попарно для каждаго круга по два подобныхъ эллипса, то значитъ полныя совокупности подобныхъ элементовъ въ этой системѣ уже не есть квадратичныя, а 4-го порядка.

Мы видимъ, что въ отношеніи распредѣленія кривыхъ вторая изъ разсмотрѣнныхъ системъ то есть конопримъ лучей гораздо сложнѣе, чѣмъ первая система конопримъ точекъ. Мы можемъ наглядно выразить это относительное усложненіе сравненіемъ съ двумя простѣйшими системами на плоскости.

На плоскости мы можемъ различить двѣ неродственныя системы, а именно систему точекъ и систему прямыхъ (лучей), тѣсно связанныя между собою простѣйшими коррелятивными отношеніями (какъ полюсы и поляры). Но система прямыхъ представляется значительно сложнѣе, чѣмъ система точекъ. Если построимъ сфероприму первой системы и примемъ ее за сфероприму реципрочнаго преобразованія, то уже линейныя ея примы преобразуются не въ сферопримы, а въ параболы лучей, а сферопримы преобразуются въ конопримы лучей вообще то есть въ этой системѣ не имѣютъ мѣста тѣ простѣйшія отношенія, которыя мы видимъ въ системѣ точекъ.

Въ этомъ отношеніи систему конопримъ точекъ мы можемъ сопоставить съ родственною ей системою точекъ, а систему конопримъ лучей съ системою конопримъ лучей, и даже отмѣтить ихъ родственность.

Для этого мы и для этой системы сохранимъ систему равностороннихъ гиперболъ какъ систему экстраэлементовъ, но при этомъ выберемъ такую линейную секунду, чтобы въ ней находилась только одна равносторонняя гипербола точекъ.

Какъ заключающая единственный экстраэлементъ эта секунда будетъ родственна системѣ лучей на плоскости. Всѣ ея линейныя примы не будутъ содержать экстраэлемента за исключеніемъ одной единственной линейной примы такихъ примъ, и такія исключительныя примы будутъ параллельны; это будетъ также единственная прима, которая по отношенію къ любой сферопримѣ реципрочно преобразуется сама въ себя то есть въ линейную же приму, а всѣ остальныя линейныя примы преобразуются въ квадратичныя, но не сферопримы и т. д.

Въ системѣ конопримъ точекъ, если мы выберемъ такую секунду, чтобы она заключала въ себѣ единственную параболу и примемъ именно эту параболу за экстраэлементъ, то опять-таки получимъ секунду, родственную съ системою прямыхъ на плоскости.

Какъ въ секундѣ конопримъ точекъ, такъ и въ секундѣ конопримъ лучей мы можемъ принять за экстраэлементъ единственный заключающійся въ первый кругъ; во второй же для этого секунду нужно подобрать. Ясно, что обѣ такія секунды будутъ родственны системѣ прямыхъ на плоскости.

Въ первой изъ нихъ мы имѣемъ исключительную сфероприму параболъ; во второй имѣется исключительная сфероприма равносторонних гиперболъ.

Если въ однихъ мы примемъ единственный кругъ за центръ, въ первой линейную приму равносторонних гиперболъ, а во второй линейную приму параболъ за оси перспективнаго преобразованія, то это преобразованіе не измѣнитъ исключительныхъ сферопримъ то есть при этихъ условіяхъ эти сферопримы самоколлинеарны; а сферопримы подобныхъ конопримъ преобразуются въ другія, также состоящія изъ подобныхъ же конопримъ.

Для расширенія понятія о сферическихъ совокупностяхъ замѣтимъ еще, что всякая полная линейная совокупность можетъ быть разсматриваема какъ особая сферическая, а именно экстрасовокупность.

Простѣйшимъ примѣромъ является плоскость.

Каждую точку мы можемъ принять за центръ концентрическихъ круговъ и во всѣхъ такихъ при-

махъ есть общій кругъ, а именно безконечно-удаленная прямая то есть экстракругъ.

Также каждую точку пространства можно принять за центръ концентрическихъ шаровъ и во всѣхъ этихъ секундахъ имѣется одинъ общій шаръ, а именно безконечно-удаленная плоскость то есть экстрашаръ.

Про шаръ вообще можно сказать, что онъ всякою плоскостью пересѣкается въ кругѣ, а каждою прямою въ двухъ точкахъ, слѣдовательно, плоскости вообще напр. линейная прима плоскостей, пересѣкая его въ кругахъ, какъ бы разлагаютъ его на круги какъ на элементы. Такъ какъ это справедливо вообще, то справедливо и въ спеціальномъ случаѣ экстрашара то есть и экстрашаръ или безконечно-удаленную плоскость можно разсматривать какъ составленную изъ концентрическихъ круговъ; но этотъ экстрашаръ представляетъ ту спеціальную совокупность круговъ, которую уже нельзя пересѣчь линейною прямою плоскостей, потому что вся совокупность представляетъ одну единственную плоскость.

Въ сферическихъ совокупностяхъ конопримъ точекъ мы имѣемъ тоже, но уже въ расширенномъ видѣ, такъ какъ высшая экстрасовокупность уже не линейная секунда, а линейная кварта.

Въ этомъ смыслѣ мы все обыкновенное пространство можемъ разсматривать какъ экстрасферотерцію какъ бы нѣкотораго пространства четвертаго измѣренія; также полную совокупность всѣхъ конопримъ точекъ мы можемъ разсматривать какъ экстраквинту нѣкоторой системы 6-ой ступени.

Но тогда какъ дѣйствительнаго пространства четвертаго измѣренія не существуетъ, такихъ системъ 6-ой ступени, которыя имѣютъ квинту конопримъ точекъ своею экстраквинтою можно построить безграничное множество; простѣйшимъ примѣромъ такой сексты будетъ тотъ, когда кромѣ квинты конопримъ точекъ мы возьмемъ еще какую нибудь безконечно-удаленную точку пространства [1]).

[1]) Чтобы убѣдиться въ существованіи такой системы конопримъ точекъ въ пространствѣ, которую мы условно можемъ назвать цилиндрическою системою, проведемъ сначала всѣ линейныя примы изъ безконечно-удаленной точки $\mathfrak{a}$ и всѣ конопримы экстраквинты; мы получаемъ квинту параллельныхъ цилиндровъ, а всѣ плоскія ихъ сѣченія плоскостями, параллельными плоскости экстраквинты, составятъ искомую сексту элементовъ. Въ этой секстѣ, слѣдователтельно, въ каждой плоскости, параллельной плоскости экстраквинты совокупность элементовъ будетъ тождественна, а потому, если возьмемъ два произвольные элемента этой сексты, находящіеся въ разныхъ параллельныхъ плоскостяхъ, то и всѣ элементы этой примы будутъ тождественны съ тѣми двумя, которыя изъ точки $\mathfrak{a}$ проектируются на экстраквинтѣ. Чтобы узнать, какая именно изъ нихъ находится во всякой данной плоскости, мы съ одной стороны имѣемъ опредѣленное двойное отношеніе между двумя перемѣнными плоскостями и двумя постоянными плоскостями—плоскостью экстраквинты и параллельною ей безконечно-удаленною плоскостью, а съ другой стороны двойное отношеніе между двумя данными конопримами, равностороннею гиперболою и четвертою искомою кривою той же линейной примы; напр. если одну кривую мы возьмемъ на плоскости экстраквинты, а другую на нѣкоторой произвольной плоскости, то въ плоскости, находящейся посрединѣ между ними имѣемъ именно ту коноприму, которая является четвертою гармоническою по отношенію къ остальнымъ тремъ упомянутымъ конопримамъ.

Итакъ, всякую линейную совокупность этой системы мы можемъ разсматривать какъ экстрасферическую то есть составленную изъ совокупности концентрическихъ сферосовокупностей, и притомъ каждый элементъ линейной совокупности можетъ быть принятъ за общій центръ всѣхъ сферическихъ совокупностей, въ числѣ которыхъ линейная секунда экстраэлементовъ составитъ экстрасферическую совокупность. Совокупность параболъ въ одной такой линейной совокупности есть совокупность сферическая и при томъ исключительная, и центръ ея есть нѣкоторый кругъ. Въ спеціальномъ случаѣ, когда имѣющіяся въ линейной совокупности параболы, входящія въ ея составъ, имѣютъ симметрію круга, вся линейная совокупность имѣетъ ту же симметрію.

Если мы всѣ элементы какой-нибудь сферической совокупности соединимъ линейными примами съ однимъ какимъ-нибудь элементомъ, только не той линейной совокупности, которая содержитъ эту сферическую, то получимъ конусъ. Поэтому изъ высшей сферической совокупности мы конуса вывести не можемъ. Конусъ высшей ступени въ этой системѣ можетъ быть полученъ только изъ сферотерціи и тогда, по данному выше опредѣленію, это будетъ терціоконусъ. Совокупность его элементовъ составитъ особую кварту.

Конусъ, линейныя примы котораго проходятъ черезъ полную совокупность параболъ данной линейной совокупности, и центръ коего есть кругъ, мы можемъ назвать конусомъ исключительнымъ для данной линейной совокупности, если центръ этого круга совпадаетъ съ центромъ симметріи совокупности параболъ, а значитъ и съ центромъ симметріи той линейной совокупности, въ которой она находится; такъ какъ кругъ, принятый за центръ конуса, не принадлежитъ этой этой линейной совокупности, то та линейная совокупность, въ которой

находится конусъ, имѣетъ на 1-цу высшую ступень, а въ совокупности элементовъ конуса кругъ будетъ единственный.

Для полной совокупности, чтобы получить ея исключительный конусъ, мы сначала должны взять такую линейную кварту, чтобы входящая въ ея составъ совокупность параболъ имѣла симметрію круга; если теперь возьмемъ произвольный кругъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ круговой симметріи, и проведемъ чрезъ него и всѣ параболы линейныя примы, то получимъ исключительный терціоконусъ. Если возьмемъ только сферосекунду параболъ, имѣющихъ симметрію круга, то получимъ исключительный секундоконусъ.

Полная терція круговъ есть секундоконусъ въ системѣ конопримъ лучей; въ самомъ дѣлѣ, всѣ вообще линейныя совокупности круговъ какъ кривыхъ точекъ есть одновременно квадратичныя совокупности въ системѣ кривыхъ лучей, заключающіяся въ ихъ линейной совокупности ступенью выше. Но всѣ совокупности концентрическихъ круговъ (совокупно съ діаметрами) составляютъ одновременно и линейныя примы въ этой системѣ. Общій элементъ всѣхъ этихъ примъ—центръ конуса, есть безконечно удаленная прямая.

Приложеніе.

Опредѣленіе четвертой гармонической прямой 2-го порядка (конопримы) одной линейной примы по тремъ даннымъ.

Такъ какъ эта задача сводится къ опредѣленію четвертой гармонической пары точекъ на одной прямой по тремъ даннымъ и такъ какъ въ этомъ видѣ рѣшеніе ее уже было приведено въ одной изъ моихъ работъ [1]), то я и не упоминалъ въ текстѣ о способѣ ея рѣшенія. Но съ другой стороны эта задача столь кореннымъ образомъ лежитъ въ основѣ всего предлежащаго труда, что полагаю полезнымъ повторить это рѣшеніе въ приложеніи.

Пары точекъ на прямой и ихъ средины проективны, и всякой данной парѣ коррелятивна одна единственная точка, а слѣдовательно, если коррелятивность будетъ установлена, то и обратно каждой срединѣ коррелятивна одна единственная пара точекъ. Но эти двѣ системы на прямой находятся въ перспективномъ положеніи, потому что очевидно, что точечная пара совпадаетъ съ коррелятивною ей точкою и слѣдовательно для опредѣленія коррелятивности достаточно имѣть два соотвѣтствія.

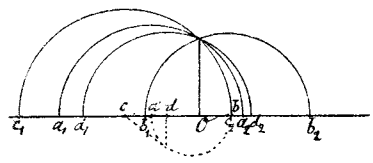
[1]) «Существованіе безграничнаго множества геометрическихъ системъ». Эти Записки I, 322.

Пусть a_1 a_2 и b_1 b_2 двѣ данныя пары точекъ, а ихъ средины соотвѣтственно a и b (фиг. 5 и 6).

Очевидно, что въ расположеніи этихъ паръ точекъ мы для соотвѣтствій общаго характера можемъ различать только 2 случая: или 1) обѣ пары раздѣляютъ другъ друга (фиг. 5), или 2) одна находится внутри другой (фиг. 6) [1])

Въ обоихъ случаяхъ, принявъ точки пары за концы діаметровъ круговъ, мы получимъ перспективные съ парами круги, которые, слѣдовательно, будутъ проективны и точкамъ системы [2]). Ясно, что основаніе радикальной оси—точка O, есть особая точка системы паръ, а именно другая точка ея пары находятся въ безконечности. Всѣ остальныя пары опредѣляются діаметрами круговъ ихъ линейной примы, причемъ центръ этихъ круговъ есть коррелятивныя точки.

Въ каждыхъ двухъ проективныхъ линейныхъ примахъ четыремъ гармоническимъ элементамъ одной проективны четыре гармоническіе элемента другой, а умѣнье находить четвертый гармоническій элементъ при двухъ элементахъ, принимаемыхъ за постоянные, приводитъ къ установленію инволюціи въ данныхъ примахъ.



Фиг. 5.

Такъ какъ въ системѣ точекъ четвертый гармоническій элементъ опредѣляется просто, то просто же можемъ опредѣлять и четвертый гармоническій кругъ, а слѣдовательно и четвертую гармоническую пару точекъ.

Примемъ за третью, перемѣнную, точку c; чтобы найти гармонически сопряженную съ нею, сначала проводимъ кругъ, принимая за діаметръ постоянныя точки a и b, и къ этому кругу проводимъ изъ c касательную, а изъ точки касанія опускаемъ на пря-

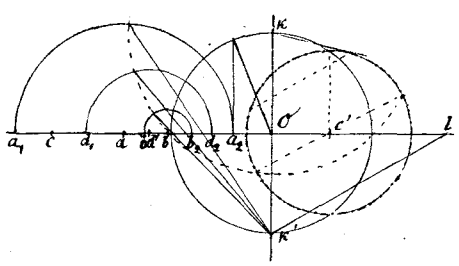
[2]) если при второмъ разрядѣ случаевъ ихъ средины совпадаютъ, мы получимъ спеціальную коррелятивность: всѣмъ парамъ коррелятивна одна и та же средина, что не требуетъ доказательства.

[1]) При этомъ круги находятся съ точками, какъ ихъ центрами даже не въ перспективномъ, а въ особомъ спеціальномъ положеніи согласія (Новая геометрія, стр 53).

мую перпендикуляръ, основаніе котораго и будетъ искомою точкою d.

Въ случаѣ, представленномъ на фиг. 5, чтобы получить коррелятивныя пары точекъ, нужно изъ c и изъ d, какъ изъ центровъ, провести круги черезъ общую точку C то есть круги линейной примы, а это всегда возможно, и потому четвертая гармоническая пара всегда вещественна.

Въ случаѣ, представленномъ на фиг. 6 возможность или невозможность зависитъ отъ того, гдѣ возьмемъ точку c; если она находится внѣ ортогональнаго круга то есть круга, нормально пересѣкающаго всѣ круги примы и имѣющаго центръ въ точкѣ O, то возможность нахожденія пары очевидна, если же точку возьмемъ внутри этого круга, то также очевидна невозможность провести кругъ, перпендикулярный къ ортогональному кругу и имѣющій ее своимъ центромъ; но такъ какъ все-таки двѣ гармонически-сопряженныя точки линейной примы имѣются на лицо въ видѣ точекъ c и d, то значитъ мы должны признать рѣшеніе, хотя и возможнымъ, но мнимымъ; это необходимо для общности рѣшенія вопроса; если мы дѣйствительно опредѣлимъ двѣ мнимыя точки пары, то ясно, что линейная прима паръ точекъ можетъ быть опредѣлена и въ томъ случаѣ, если одна или даже обѣ пары точекъ, опредѣляющихъ линейную приму, будутъ мнимыми.



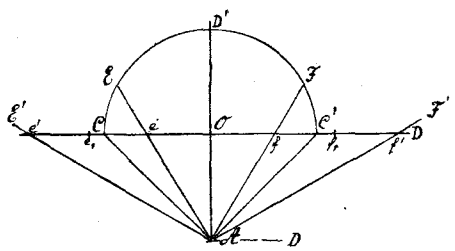
Фиг. 6.

Какъ извѣстно [1]), въ линейной примѣ круговъ тотъ мнимый кругъ, центръ котораго находится внутри ортогональнаго круга, находится, если изъ его центра возставить перпендикуляръ до пересѣченія съ ортогональнымъ кругомъ, и тогда точка пересѣченія и есть искомая точка мнимаго круга.

Если мы опредѣлимъ точки пересѣченія круговъ (и вообще конопримъ) какъ двѣ двойныя точки общей инволюціи круговъ на пересѣкающей прямой, то если два круга вещественно не пересѣкаются, то все-таки имѣется мнимое пересѣченіе въ видѣ двухъ точекъ k и k′ діаметра ортогональнаго круга, составляющаго радикальную ось примы. Названіе это оправдывается въ томъ смыслѣ, что это такія двѣ общія для всѣхъ круговъ точки, къ которымъ примѣнимы теоремы общихъ точекъ пересѣченій, если всегда при примѣненіи теоремы одну замѣнить другою (что и составляетъ коренное свойство мнимыхъ двойныхъ точекъ инволюціи). Слѣдовательно, всякая поляра точки k, то есть мнимая касательная, должна проходить чрезъ точку k′; въ четырехъ гармоническихъ кругахъ эти четыре поляры должны быть гармоническими, что и показано на фиг. 6, гдѣ поляра, которая получилась бы для мнимаго круга если бы онъ былъ вещественнымъ, замѣнена діаметрально противоположною ей (параллельною) прямою, такъ какъ кругъ мнимый.

Такимъ образомъ мы въ самомъ общемъ видѣ разрѣшили задачу построенія четвертой гармонической пары точекъ по тремъ даннымъ. Мы можемъ ее непосредственно примѣнить къ произвольному сѣченію прямою линейной примы конопримъ точекъ, такъ какъ такія конопримы пересѣкаются ею въ инволюціи паръ точекъ.

Посредственно мы можемъ примѣнить эти построенія инволюціи на безконечно-удаленной прямой въ линейной примѣ конопримъ точекъ, и тогда имѣемъ дѣло съ направленіями, которыя можемъ привести въ перспективное положеніе съ нѣкоторою прямою, какъ на фиг. 1 (стр. 293) по способу Штейнера.



Фиг. 7.

Пусть A центръ проектирующихъ лучей (фиг. 7); пусть перпендикулярные лучи AD и AD′ соотвѣтствуютъ ассимототамъ равносторонней гиперболы, а ихъ биссектриссы AC и AC′ соотвѣтствуютъ направленіямъ діаметровъ параболъ. По этимъ условіямъ точки C и C′ на прямой есть двойныя точки инволюціи и представляютъ одновременно и точки, и точечныя пары; средина отрѣзка OD (гдѣ D точка на безконечности) есть точка на безконечности; ясно, что другая пара, представляющая четвертую гармо-

[1]) Новая геометрія какъ основа черченія, стр. 45.

ническую и сопряженную парѣ OD, будетъ пара CC', имѣющая средину въ точкѣ O то есть въ центрѣ ортогональнаго круга, и слѣдовательно она соотвѣтствуетъ двумъ взаимноперпендикулярнымъ мнимымъ лучамъ то есть кругу; кругъ, поэтому, и есть четвертая гармоническая кривая примы, сопряженная равносторонней гиперболѣ.

Если изъ точки A симметрично проведемъ лучи E съ E′ и F съ F′, которымъ на прямой CC′ будутъ соотвѣтствовать пары точекъ ee′ и ff′, то ясно, что средины двухъ послѣднихъ паръ располагается симметрично относительно O и D, а значитъ будутъ гармонически-сопряженными парами; но эти двѣ пары соотвѣтствуютъ или двумъ подобнымъ гиперболамъ, или двумъ подобнымъ эллипсамъ, смотря потому, отнесемъ ли ихъ средины къ D или O. Слѣдовательно, въ линейной примѣ съ кругомъ и равностороннею гиперболою гармонически сопряжены всякія двѣ подобныя кривыя примы.